Géométrie de la Réalité Augmentée

Gilles Simon

« C'est une chose qui me paraît toujours admirable, qu'on ait découvert de si sublimes vérités avec l'aide d'un quart de cercle et d'un peu d'arithmétique »

Voltaire, quinzième Lettre philosophique,1727

La perspective centrale

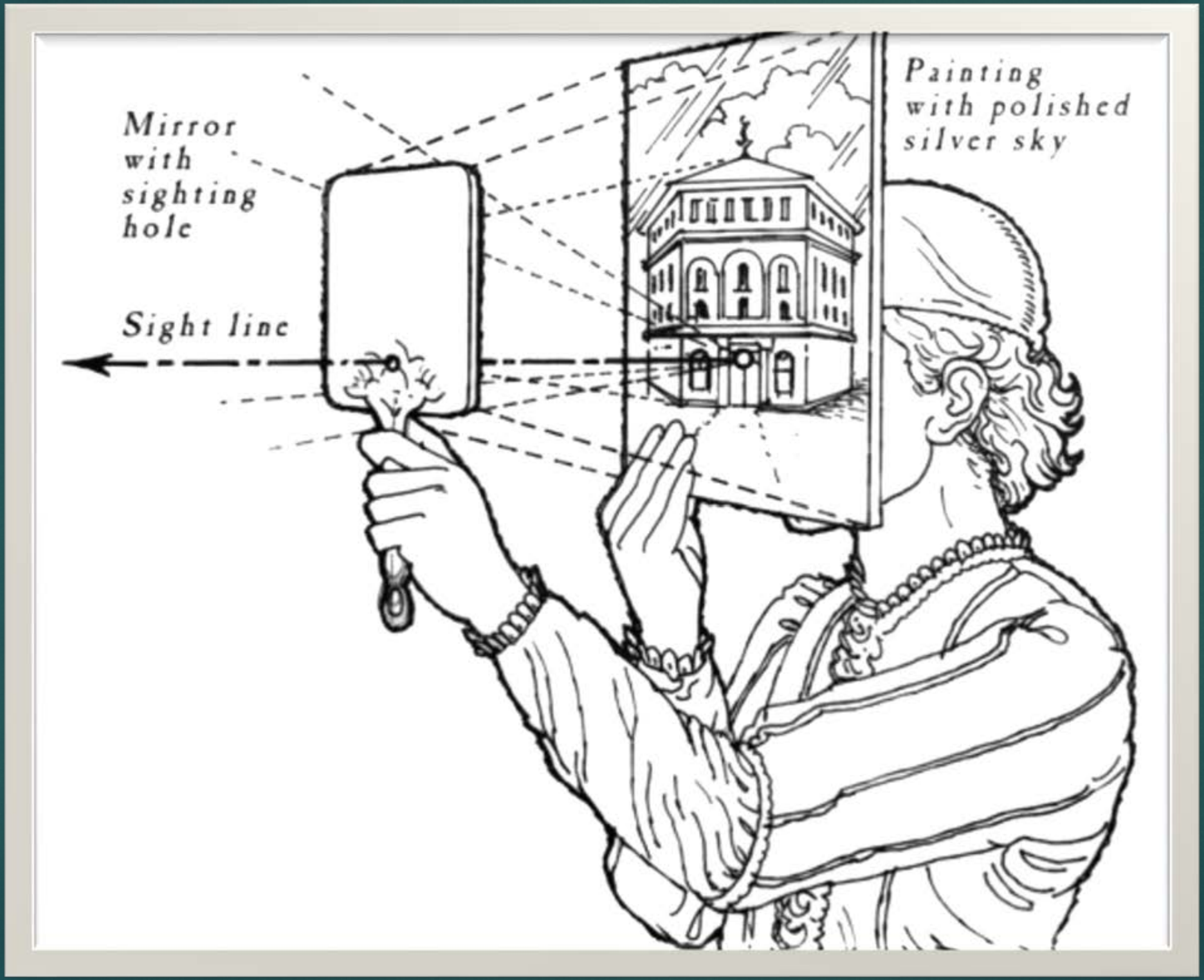
Ambrogio Lorenzetti, Les effets du bon gouvernement, 1340

La perspective centrale

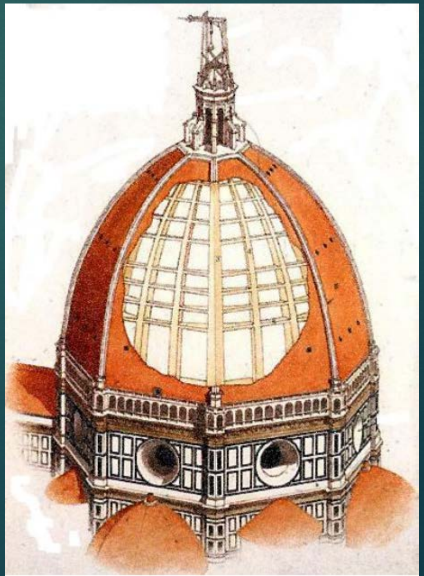
« Quand donc la lumière du jour entoure le flux issu des yeux, alors le feu intérieur qui s'échappe, le semblable allant vers le semblable, après s'être combiné avec la lumière du jour se constitue en un seul corps ayant les mêmes propriétés tout le long de la droite issue des yeux, quel que soit l'endroit où le feu qui jaillit de l'intérieur entre en contact avec le feu qui provient des objets extérieurs »

Platon, *Timée*, vers -360

La perspective centrale



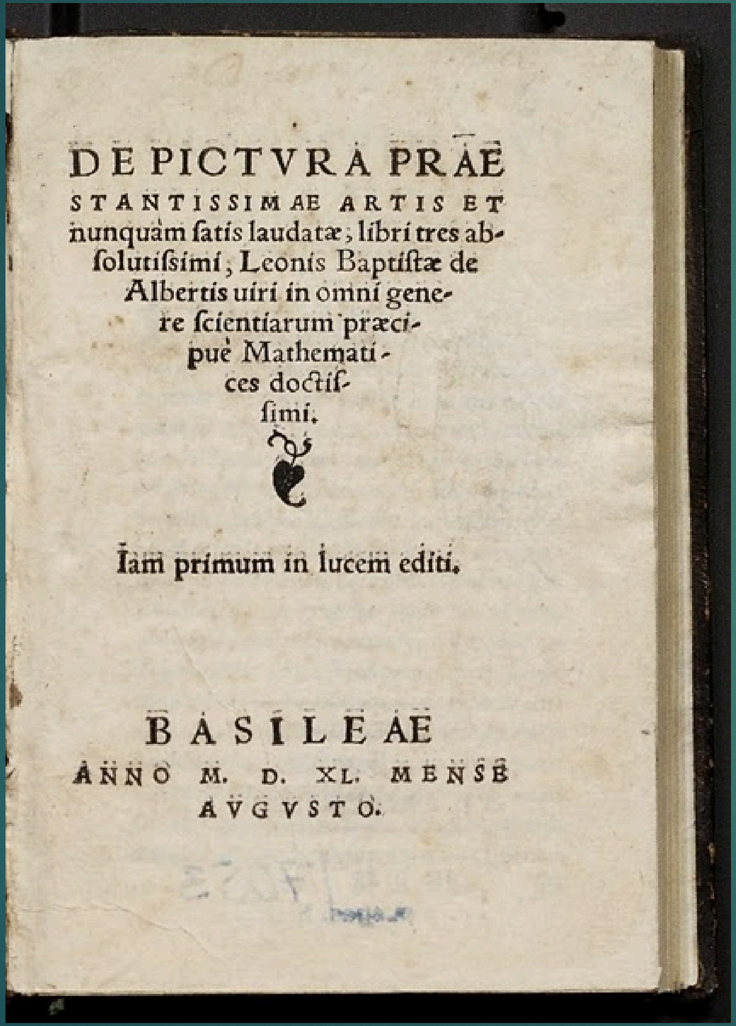
La *tavoletta* de Brunelleschi, vers 1420



La perspective centrale

Masaccio, La Trinité, 1427

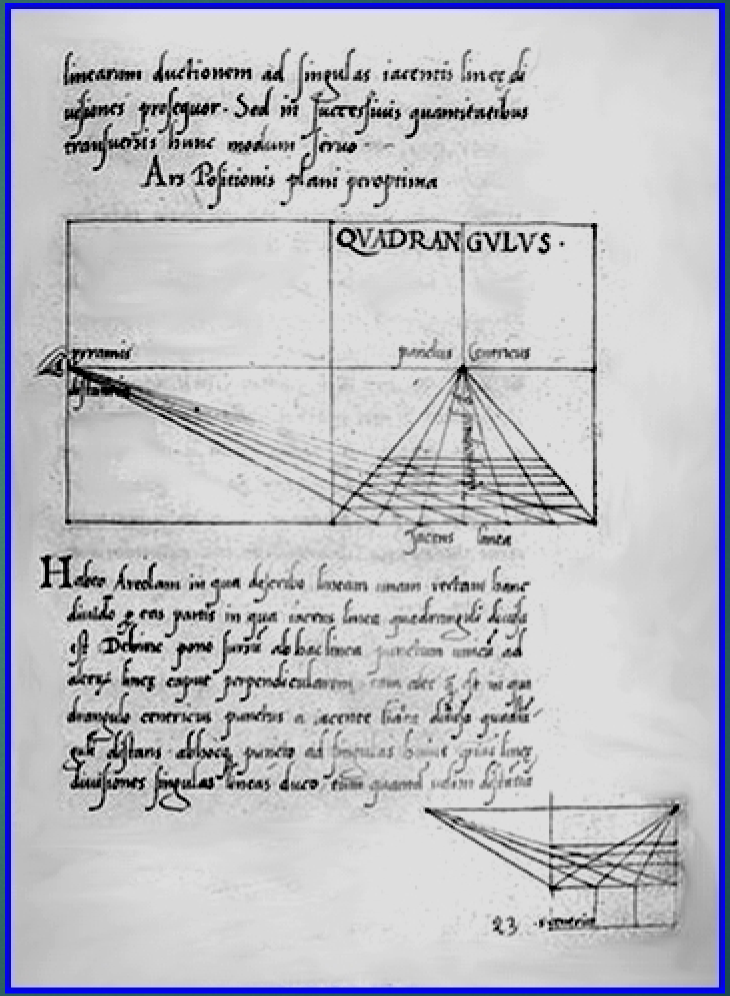
La perspective centrale



DE PICTVRA PRAE
STANTISSIMAE ARTIS ET
nunquàm ſatis laudatæ; libri tres ab-
ſolutiſsimi, Leonis Baptiſtæ de
Albertis uiri in omni gene-
re ſcientiarum præci-
puè Mathemati-
ces doctiſ-
ſimi.

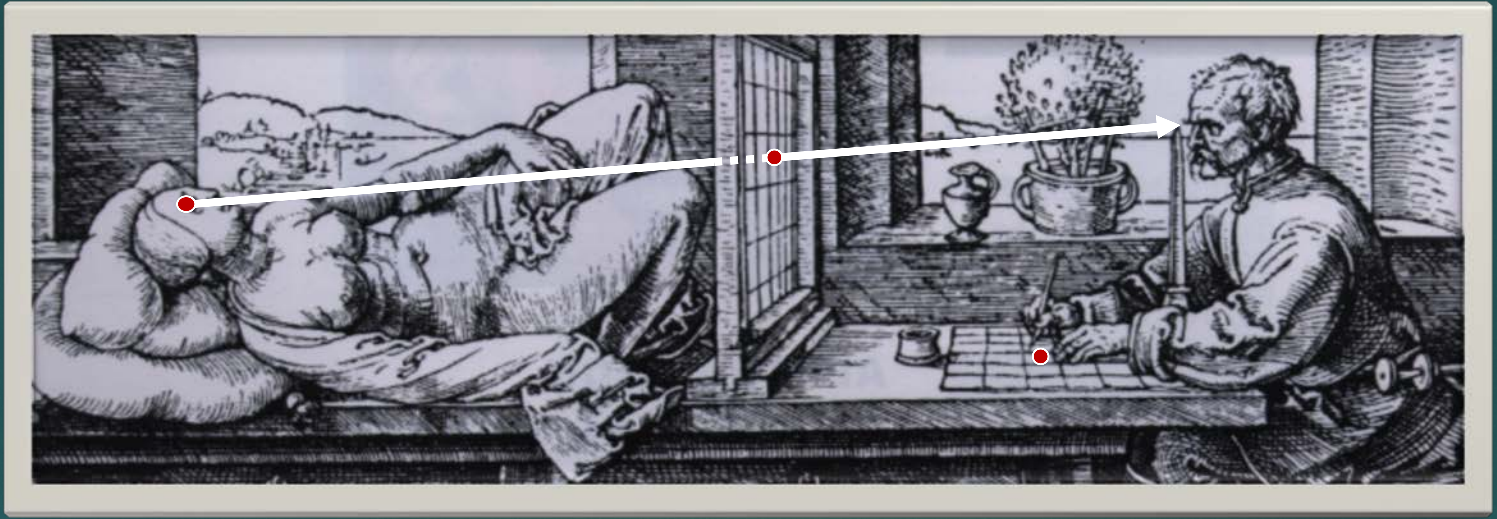
Iam primum in lucem editi.

BASILEAE
ANNO M. D. XL. MENSE
AVGVSTO.



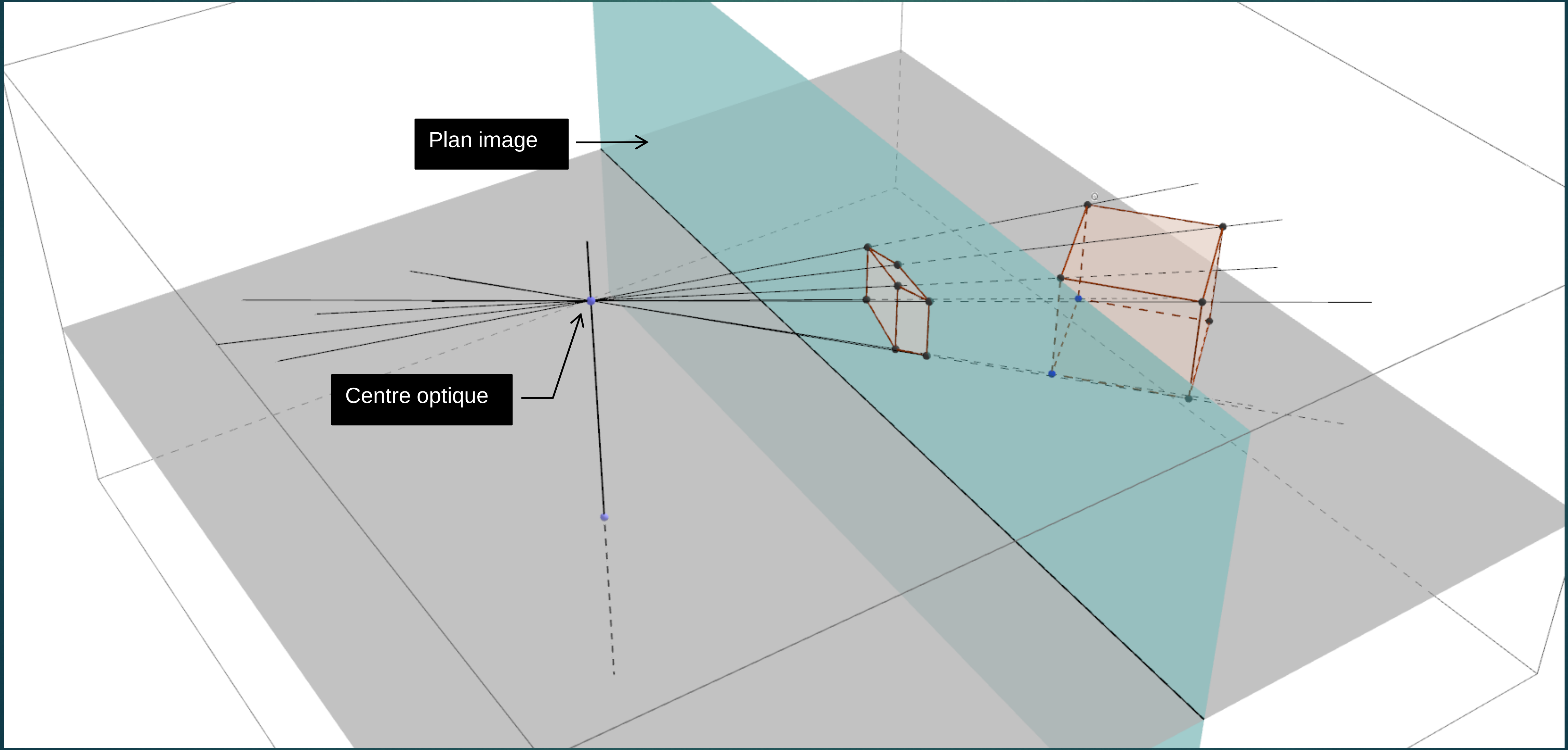
Alberti, De pictura (« De la peinture »), 1435

La perspective centrale



Albrecht Durer, Instructions pour mesurer (Le dessinateur de la femme couchée), 1527

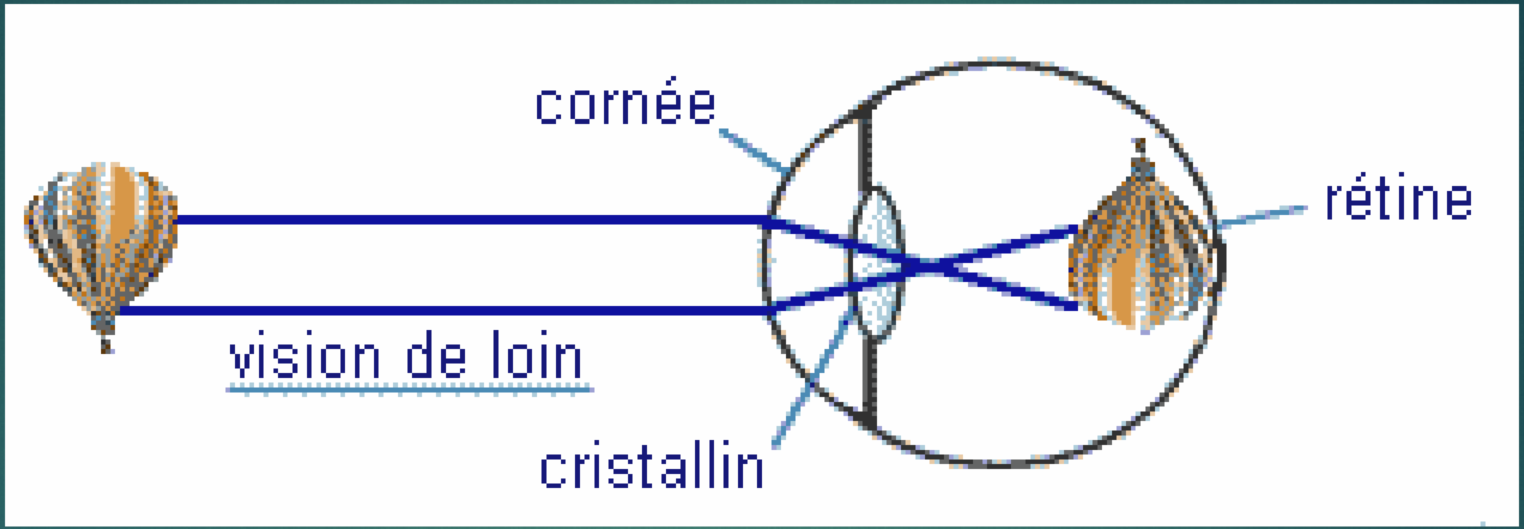
La perspective centrale

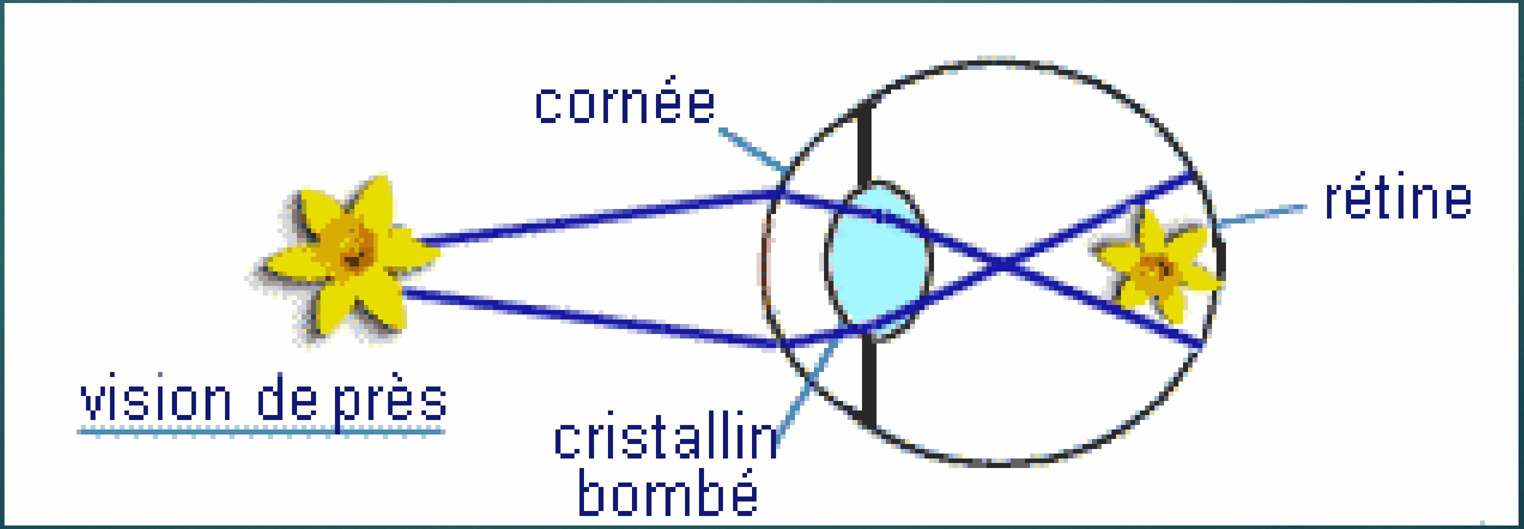


La perspective centrale

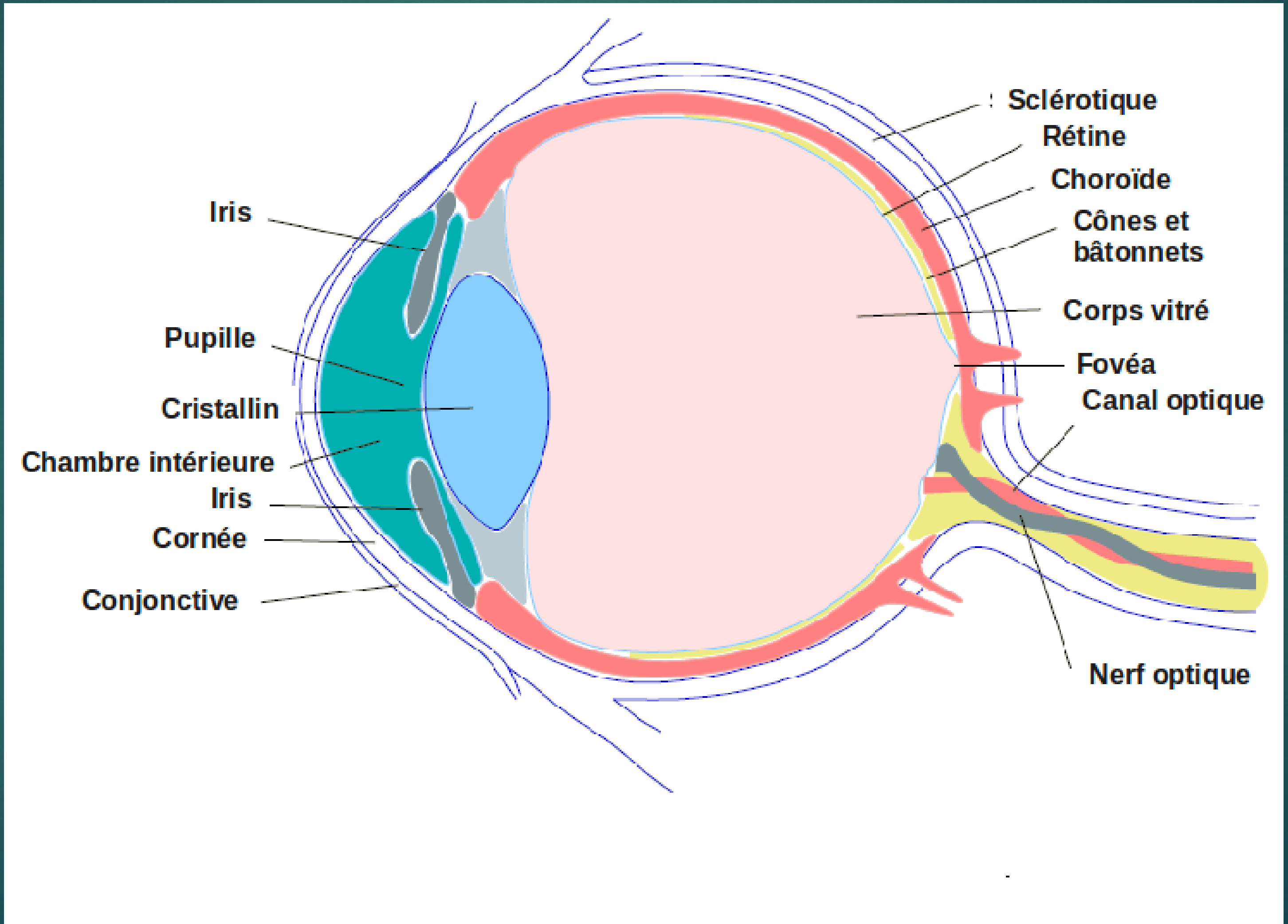
Ce modèle est-il respecté
(prolongé) à l'intérieur de l'œil ?

La perspective centrale

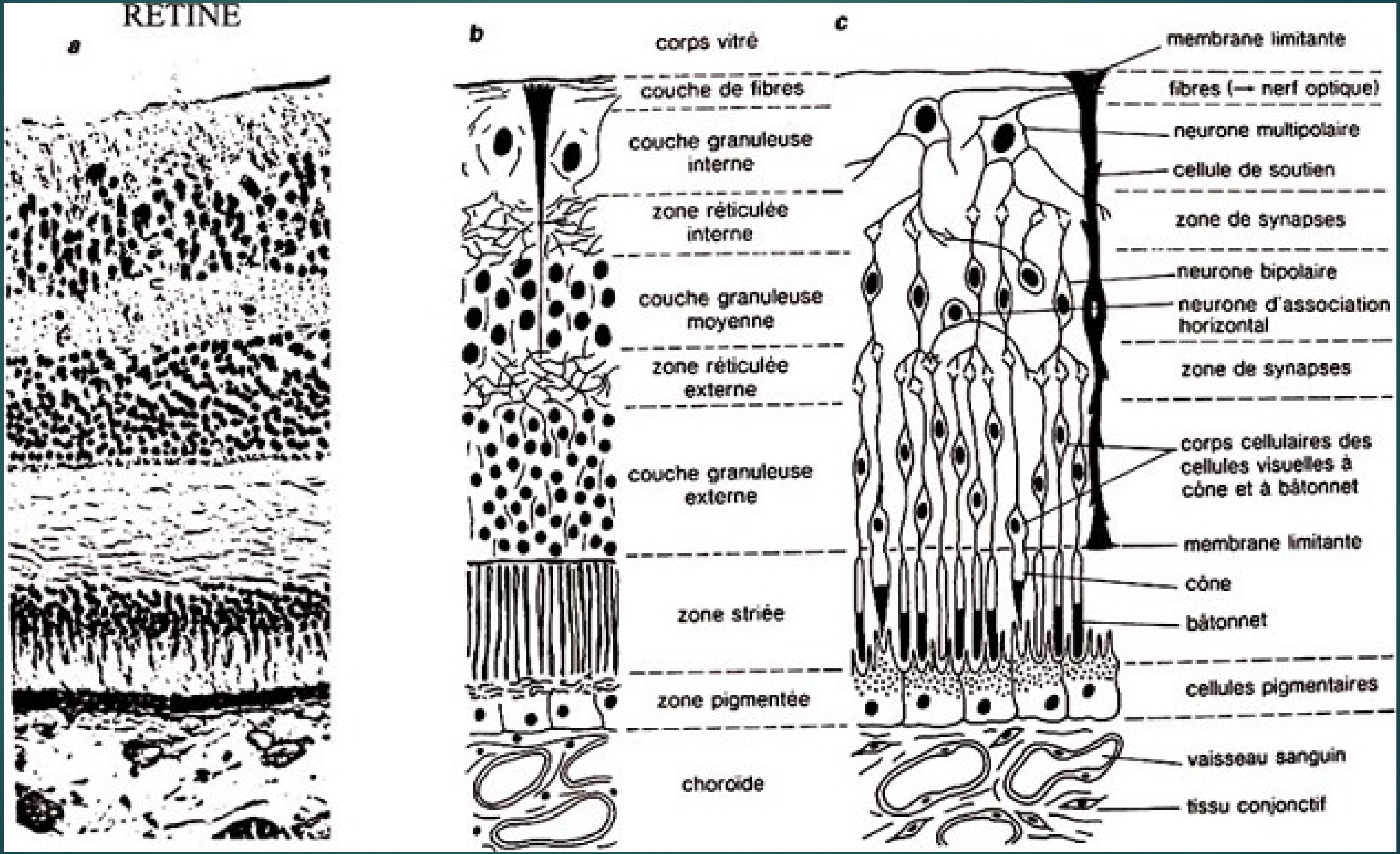




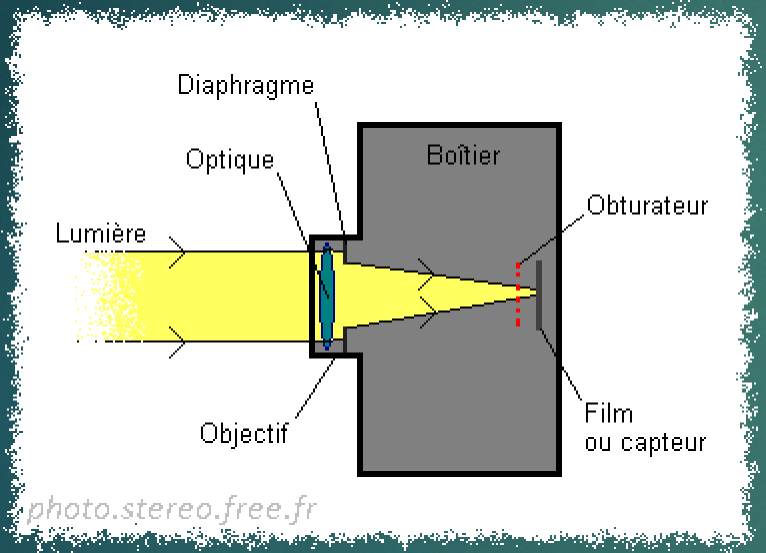
La perspective centrale

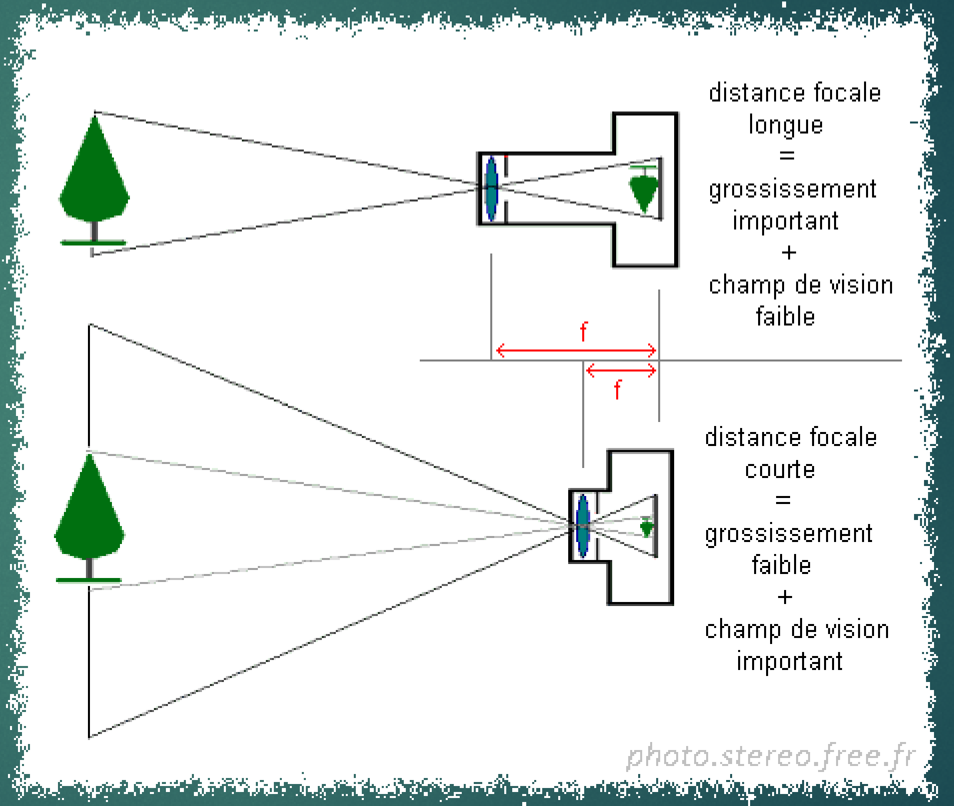


La perspective centrale

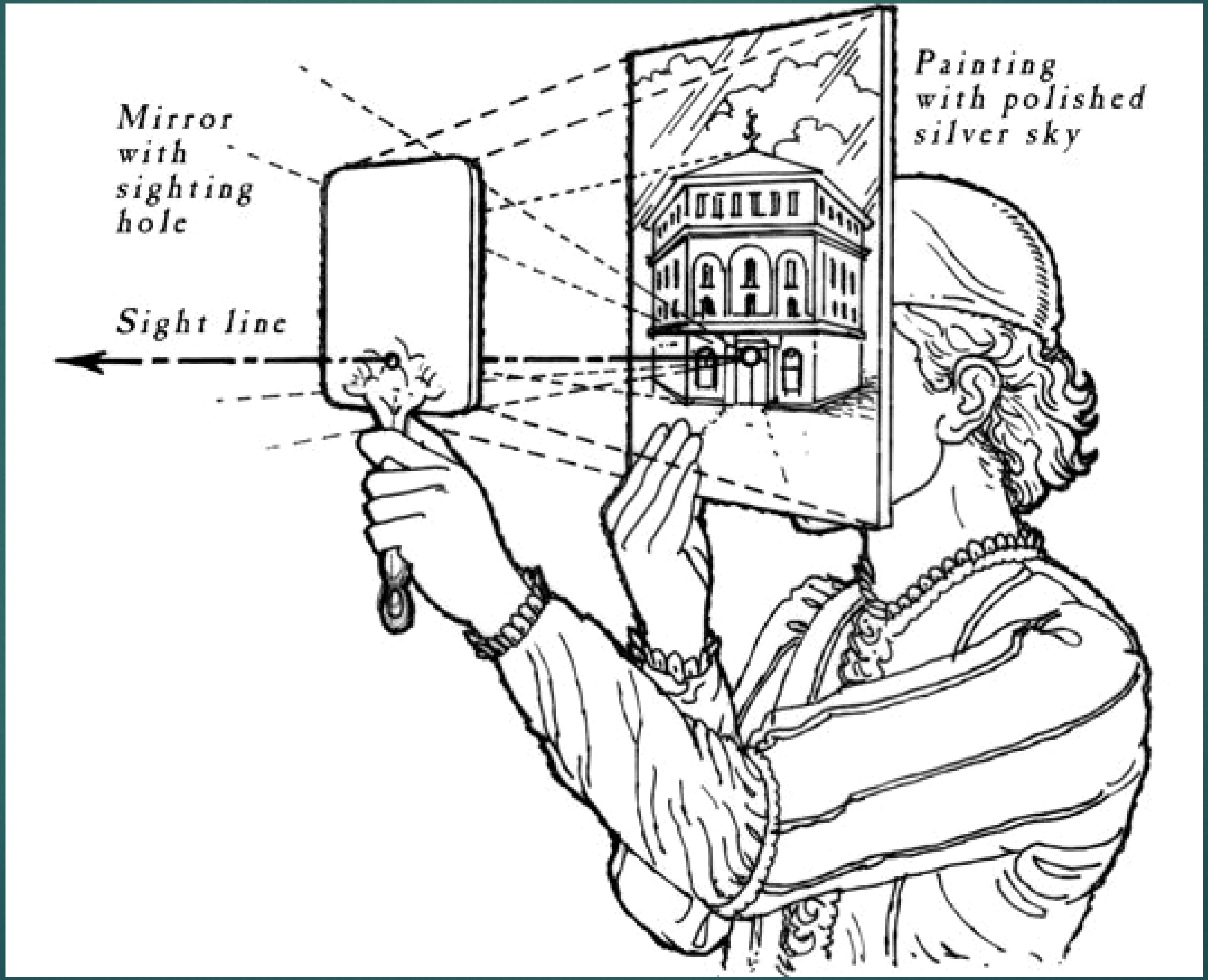


La perspective centrale

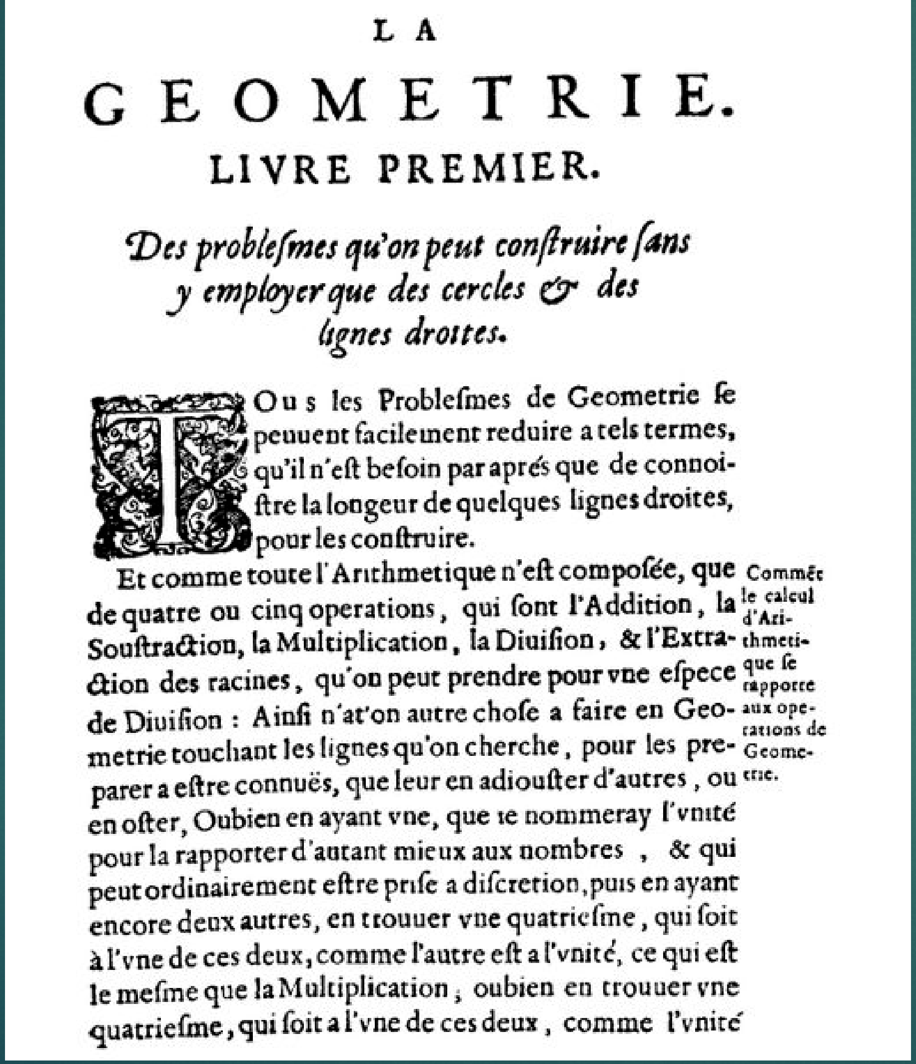




La perspective centrale



Solutions algébriques



LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

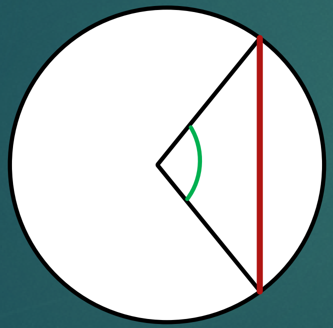
Commēt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

René Descartes, 1637

Origine de la trigonométrie

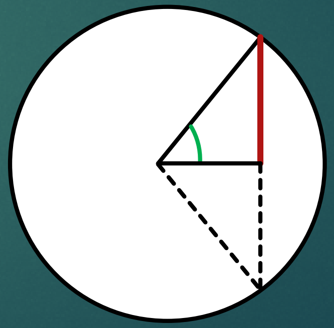
- Du grec *"trigone"* (triangle) et *"metron"* (mesure)

Hipparque de Nicée (-190 ; -120) : premières tables trigonométriques

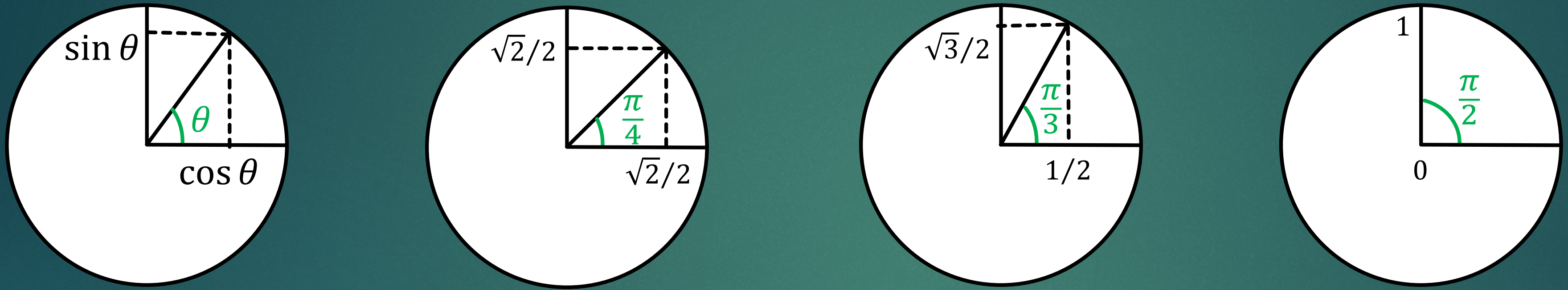


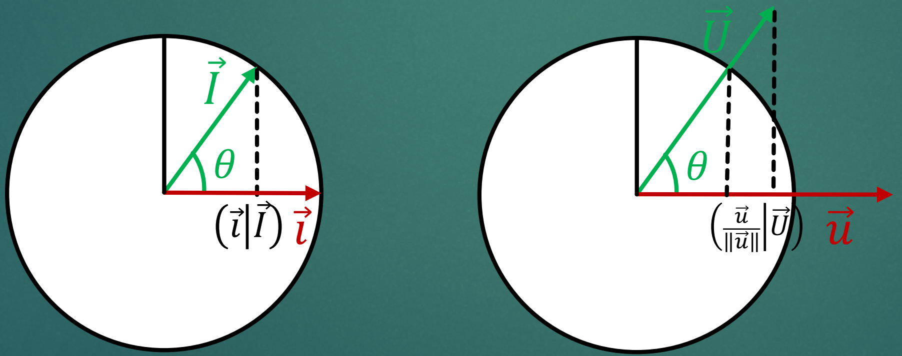
La règle de Ptolémée (90 ; 168)

Aryabhata l'Ancien (476 ; 550) utilise la demi corde : premières tables de sinus



Rappels sur la trigonométrie et le produit scalaire

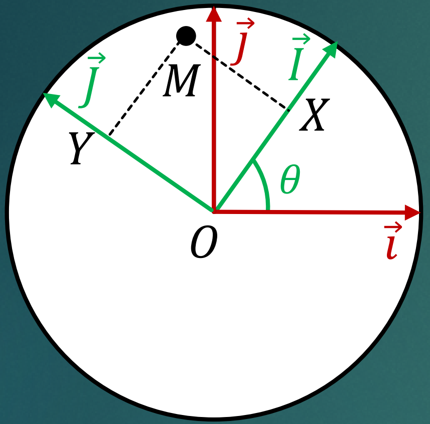


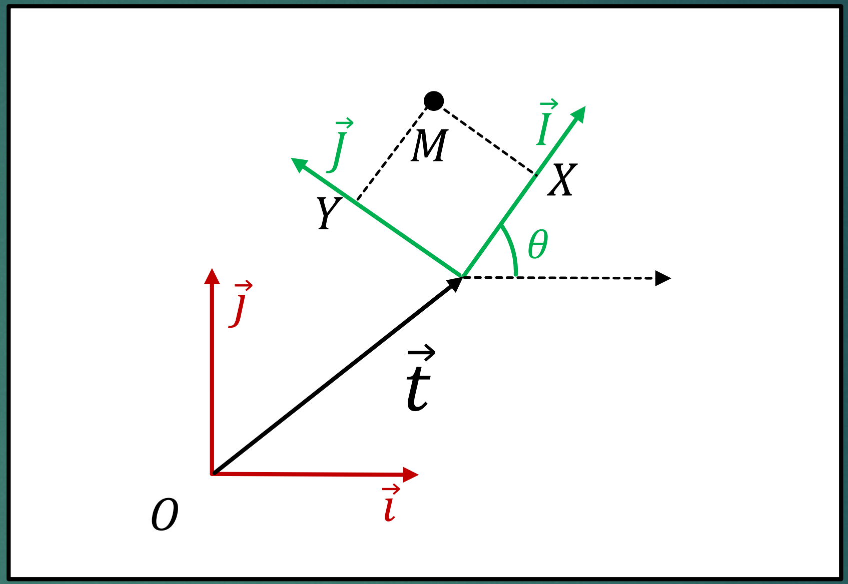


$$(\vec{\imath}|\vec{I})=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right)$$
$$=\cos\theta$$

$$\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\middle|\frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}\right)=\cos\theta$$
$$\Rightarrow(\vec{u}|\vec{U})=\|\vec{u}\|\,\|\vec{U}\|\cos\theta$$

Rappels sur les changements de repère





Si (X, Y) sont les coordonnées du point M dans le repère $(\vec{I}, \vec{J})$, que valent ses coordonnées dans le repère $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$?

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= X\vec{I} + Y\vec{J}\\ &= X\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + \mathrm{Y}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Même question si le repère $(\vec{I}, \vec{J})$ est, de plus, translaté d'un vecteur $\vec{t}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \vec{t} + X\vec{I} + Y\vec{J}\\ &= \begin{pmatrix}t_x\\ t_y\end{pmatrix} + \mathbf{R}_\theta\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\mathbf{R}_\theta & \mathbf{T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Transformation inverse :

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \overrightarrow{OM} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_\theta\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

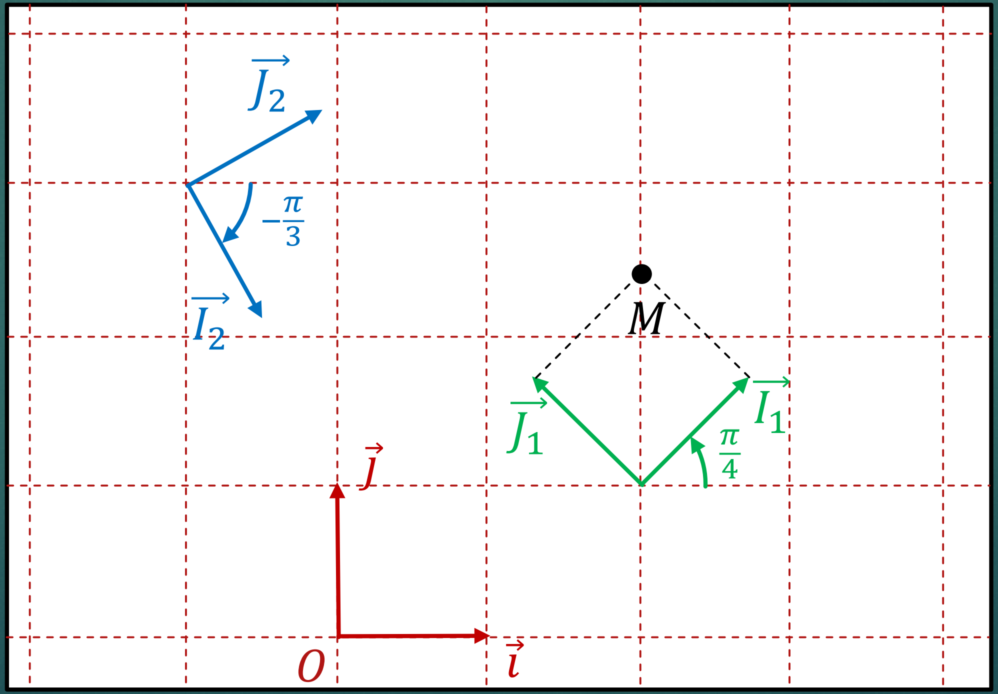
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \mathbf{R}_\theta^{-1}\mathbf{T}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{R}_\theta^{-1} & -\mathbf{R}_\theta^{-1}\mathbf{T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}$$

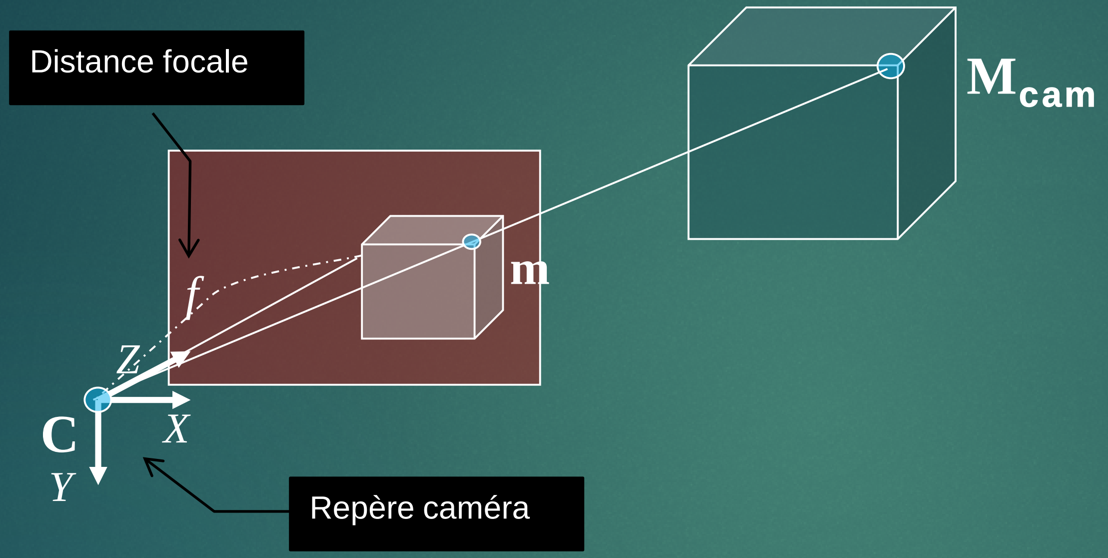
« Coordonnées homogènes »

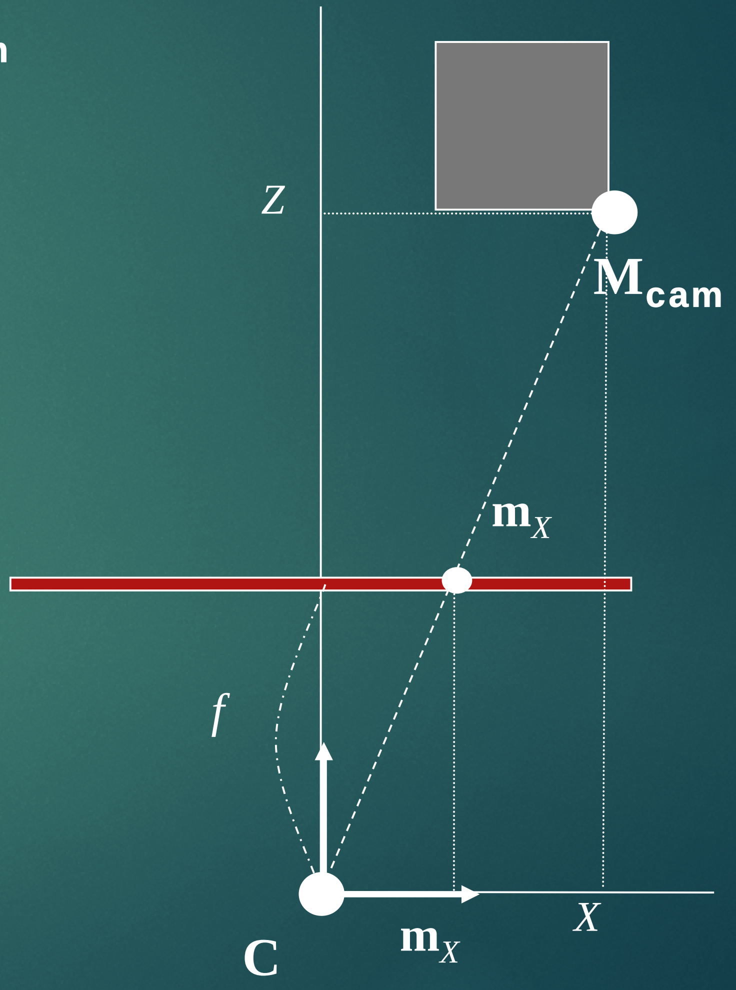
Rappels sur les changements de repère

- Exemple : Quelle sont les coordonnées du point M dans le repère $(\overrightarrow{I_2}, \overrightarrow{J_2})$?



Projection dans le plan image

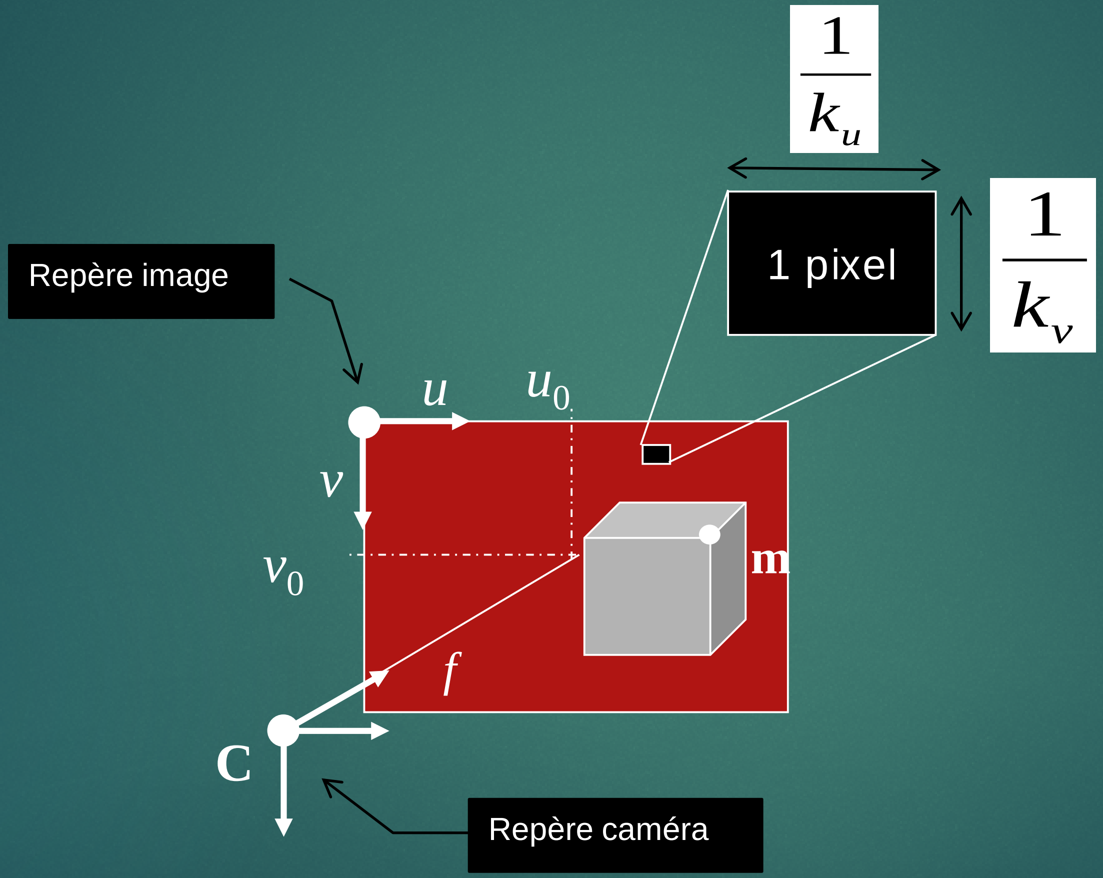




Calcul des coordonnées de m dans le plan image à partir des coordonnées de $\mathbf{M}_{\mathbf{cam}}$, **exprimées dans le repère caméra** (Thalès) :

$$\boxed{\frac{\mathbf{m}_X}{f} = \frac{X}{Z} \quad \rightarrow \quad \mathbf{m}_X = f\,\frac{X}{Z}}$$

Passage aux coordonnées pixels



$$\mathbf{m}_u = u_0 + k_u \mathbf{m}_X, \quad \mathbf{m}_v = v_0 + k_v \mathbf{m}_Y$$

Synthèse

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{m}_X = f\dfrac{X}{Z}, \quad \mathrm{m}_Y = f\dfrac{Y}{Z} \\ \mathbf{m}_u = u_0 + k_u \mathbf{m}_X, \quad \mathbf{m}_v = v_0 + k_v \mathbf{m}_Y \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} \mathrm{m}_u = u_0 + k_u f \dfrac{X}{Z} \\ \mathrm{m}_v = v_0 + k_v f \dfrac{Y}{Z} \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$\boxed{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ définit m en coordonnées homogènes $\rightarrow \begin{cases} \mathbf{m}_u = \dfrac{u}{w} = u_0 + k_u f \dfrac{X}{Z} \\ \mathbf{m}_v = \dfrac{v}{w} = v_0 + k_v f \dfrac{Y}{Z} \end{cases}$

La matrice de calibration interne

La matrice $\begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

est appelée “matrice de calibration interne” ou “matrice de calibration intrinsèque” ou matrice de calibration” ou “matrice des paramètres intrinsèques”

Elle est généralement notée K et paramétrée par quatre valeurs α_u, α_v, u_0, v_0:

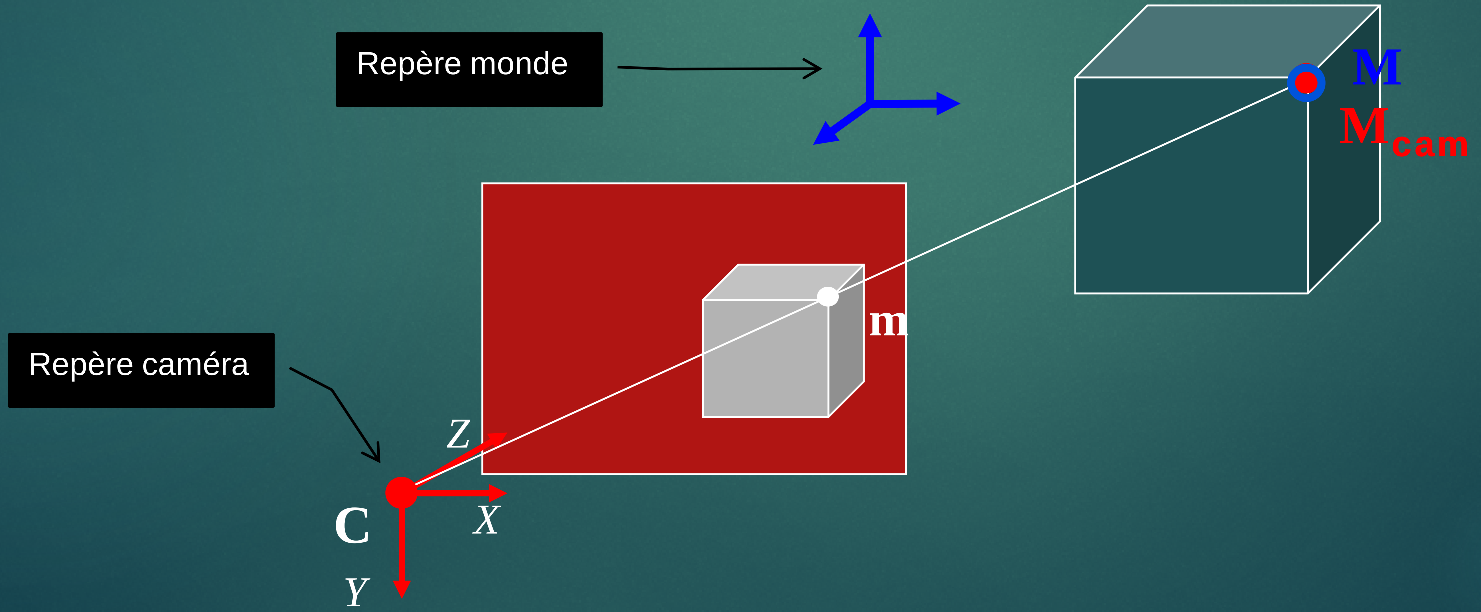
$$\boxed{K = \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Le nombre de paramètres peut être réduit sous certaines hypothèses :

- (u_0, v_0) est parfois pris au centre de l'image
- $\alpha_u = \alpha_v$ suppose que les pixels sont carrés

Passage du repère monde au repère caméra

- La projection dans le plan image considère des coordonnées 3D ***exprimées dans le repère caméra***
- Les coordonnées des points de la scène sont exprimées dans un repère arbitraire, appelé « repère monde »



Passage du repère monde au repère caméra

Il s'agit d'un changement de repère correspondant à une **transformation rigide** de $\Re^3$ (rotation + translation) :

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathbf{cam}} = \mathbf{RM} + \mathbf{T}}$$

où :

$\mathbf{R}$ est une matrice de rotation de taille 3x3 et

$\mathbf{T}$ est un vecteur de taille 3

$$\mathbf{M}_{\text{cam}} = \mathbf{RM} + \mathbf{T} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} X_{\text{cam}} \\ Y_{\text{cam}} \\ Z_{\text{cam}} \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{T} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} X_{\text{cam}} \\ Y_{\text{cam}} \\ Z_{\text{cam}} \end{pmatrix} = (\mathbf{R} \mid \mathbf{T})\underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathrm{M}}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}_{\text{cam}} = (\mathbf{R} \mid \mathbf{T})\tilde{\mathbf{M}}$$

$\tilde{\mathrm{M}}$ (représente le point M en coordonnées homogènes)

$(\mathbf{R} \mid \mathbf{T})$ est une matrice 3x4

La matrice de calibration externe

La matrice

$$(\mathbf{R}\,|\,\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}$$

est appelée “matrice de calibration externe” ou “matrice de calibration extrinsèque” ou “matrice des paramètres extrinsèques”

Elle peut être paramétrée par 6 valeurs : 3 pour la rotation (angles d’Euler, …), 3 pour la translation

La matrice de projection

En composant la projection et le changement de repère on obtient :

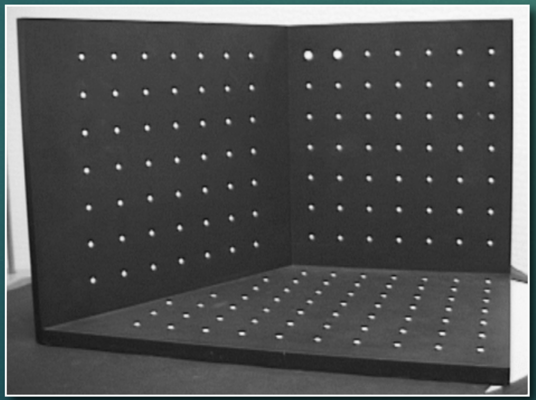
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

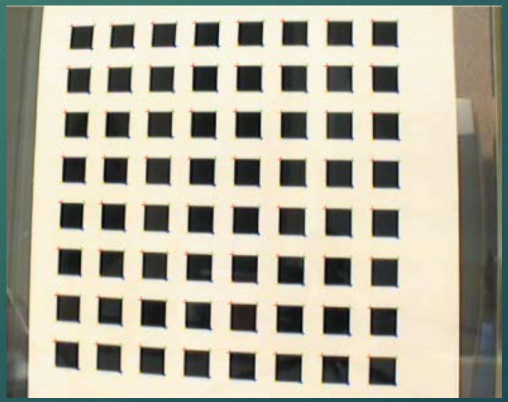
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{R} \mid \mathbf{T})$ est appelée **matrice de projection**

Calibration de la caméra

- La matrice de projection P = K(R | T) comporte une partie intrinsèque (K) et une partie extrinsèque (R et T)
- Les paramètres intrinsèques de la caméra restent généralement fixes pour un dispositif de RA donné
- Ils sont calculés préalablement à l'utilisation du système de RA, au cours d'une phase dite de **calibration de la caméra**
- Utilisation d'une mire de calibration ou d'un damier imprimé





L'algorithme de calibration DLT

Chaque correspondence donne lieu à deux équations :

$$\tilde{\mathbf{m}}_i = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{M}}_i$$

$$\begin{cases} u_i = \dfrac{P_{11}X_i + P_{12}Y_i + P_{13}Z_i + P_{14}}{P_{31}X_i + P_{32}Y_i + P_{33}Z_i + P_{34}} \\ v_i = \dfrac{P_{21}X_i + P_{22}Y_i + P_{23}Z_i + P_{24}}{P_{31}X_i + P_{32}Y_i + P_{33}Z_i + P_{34}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{11}X_i + P_{12}Y_i + P_{13}Z_i + P_{14} - P_{31}X_iu_i - P_{32}Y_iu_i - P_{33}Z_iu_i - P_{34}u_i = 0 \\ P_{21}X_i + P_{22}Y_i + P_{23}Z_i + P_{24} - P_{31}X_iv_i - P_{32}Y_iv_i - P_{33}Z_iv_i - P_{34}v_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_iu_i & -Y_iu_i & -Z_iu_i & -u_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & Z_i & 1 & -X_iv_i & -Y_iv_i & -Z_iv_i & -v_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \\ \dots \\ P_{34} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

- 11 coefficients à estimer
- Chaque correspondance 3D-2D donne 2 equations
  $\rightarrow$ **6 correspondances** doivent être connues
- En pratique, un plus grand nombre de correspondances sont utilisées

L'algorithme de calibration DLT

- Extraction de la matrice K

On considère la matrice $\mathbf{P}_3$ constituée des 3 premières colonnes de $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_3 \mid \mathbf{c}_4)$$
$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{KR}$$

On calcule

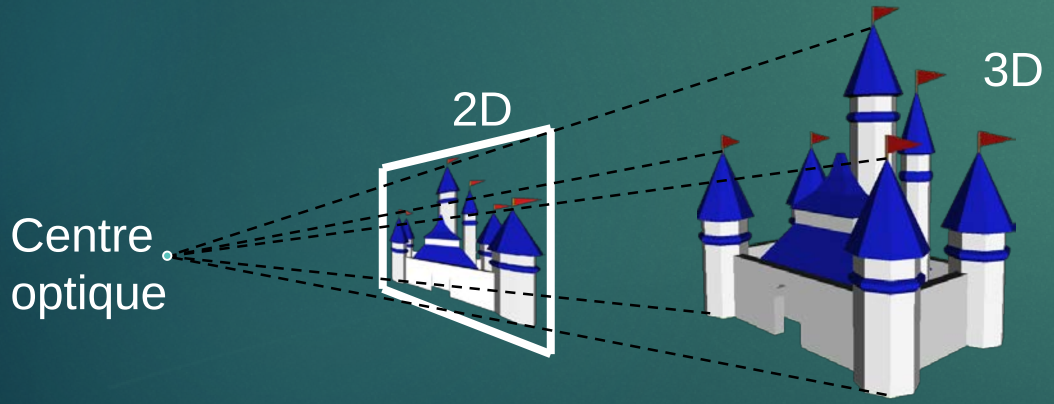
$$\mathbf{P}_3\mathbf{P}_3^T = (\mathbf{KR})(\mathbf{KR})^T = \mathbf{KRR}^T\mathbf{K}^T = \mathbf{KK}^T$$

$\mathbf{K}$ étant une matrice triangulaire (supérieure), elle peut être calculée en utilisant la méthode de factorization de Cholesky

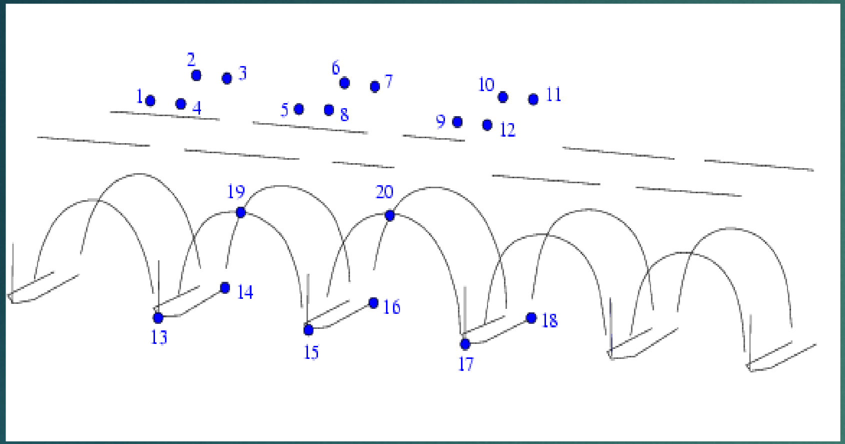
La matrice $\omega = \left(\mathbf{KK}^T\right)^{-1}$ est appellée **image de la conique absolue**

Calcul du point de vue

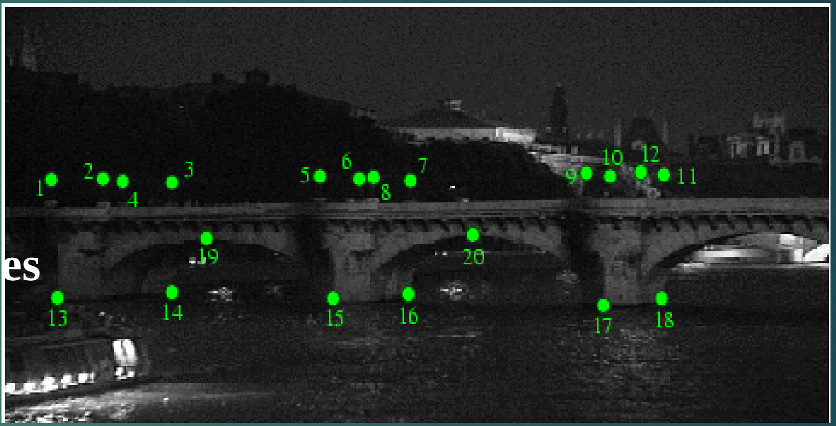
- Nous considérerons deux méthodes de positionnement basé image :
  - Méthode 1 : Utilisation de points du modèle identifiés dans l'image
  - Méthode 2 : Utilisation de contraintes entre des points de fuite de l'image



Méthode 1



Correspondances 3D/2D



Recalage

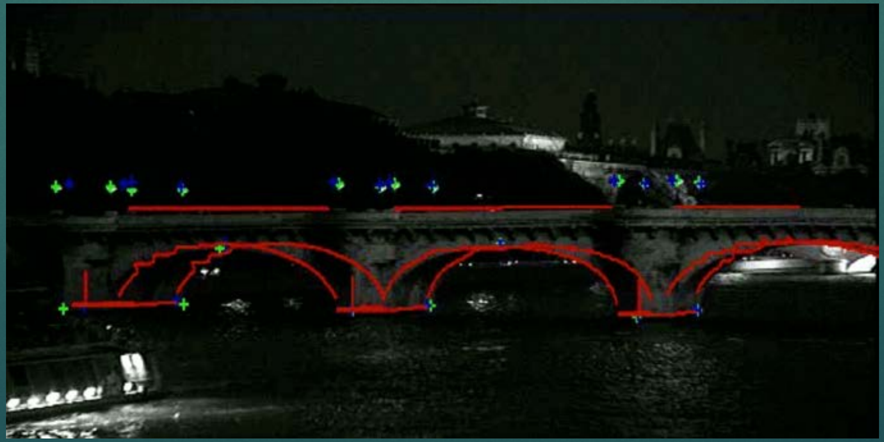
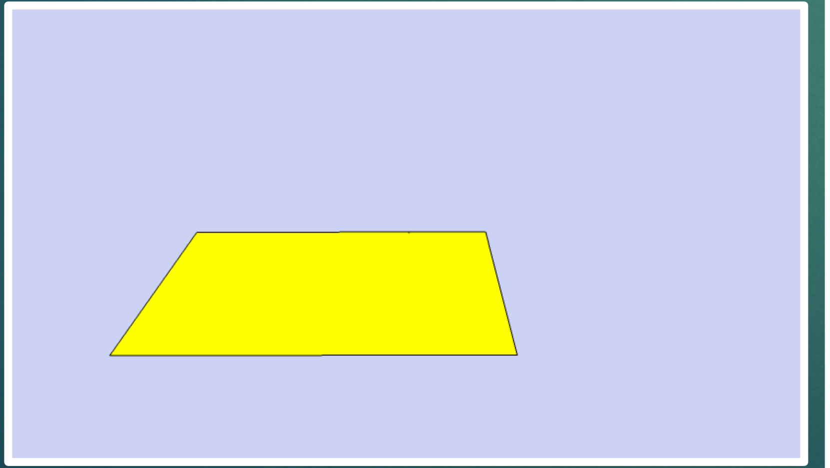
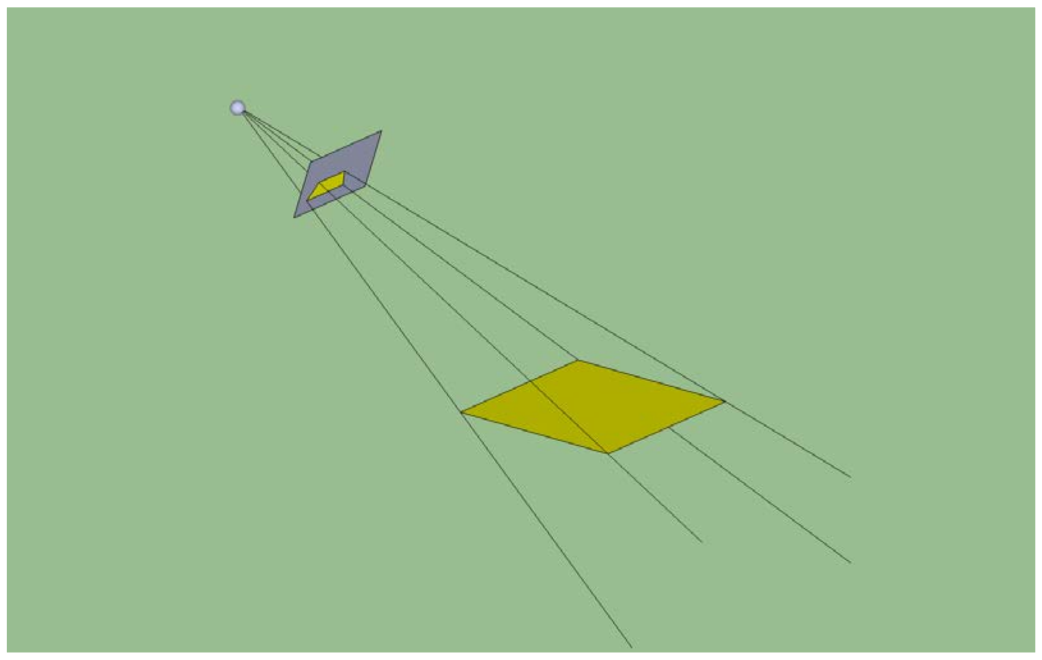


Illustration géométrique

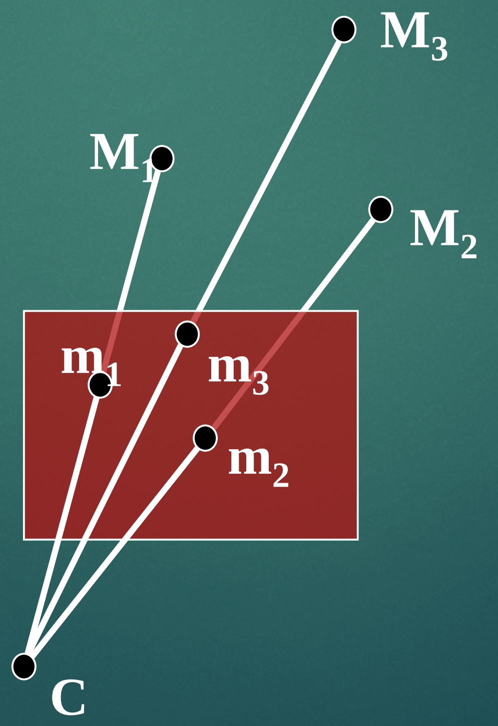
- Les points du modèle correspondant aux points de l’image doivent se trouver sur les "rayons inverses" de l’image
- Un seul point de vue (orientation + position) est possible lorsque **4 correspondances** de points sont connues



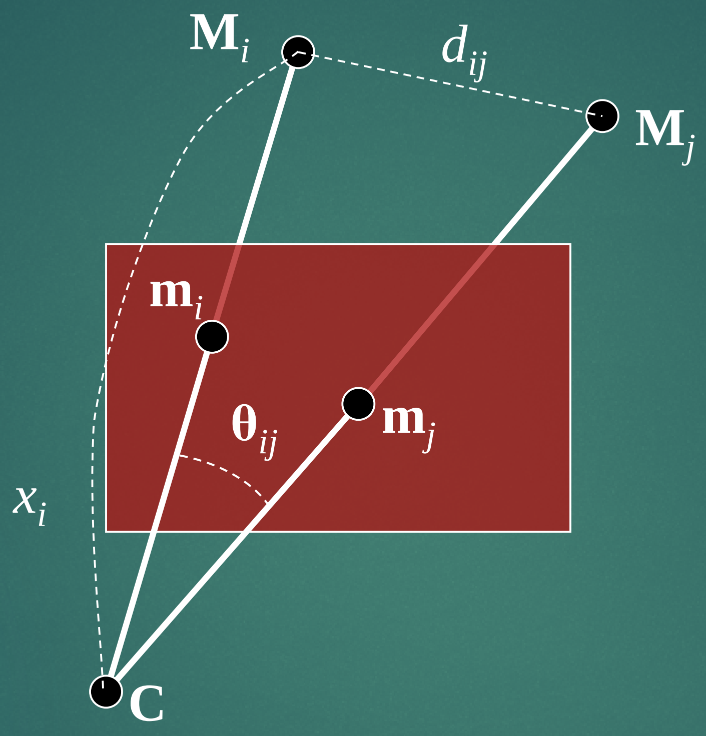


Le problème PnP

- PnP (Perspective-n-Points) : estimation de l'orientation **R** et de la position **T** du repère monde par rapport au repère caméra, à partir de n correspondances de points 3D/2D
- P3P : suffisant en théorie mais 4 solutions → ajout de contrainte nécessaire



La méthode P3P



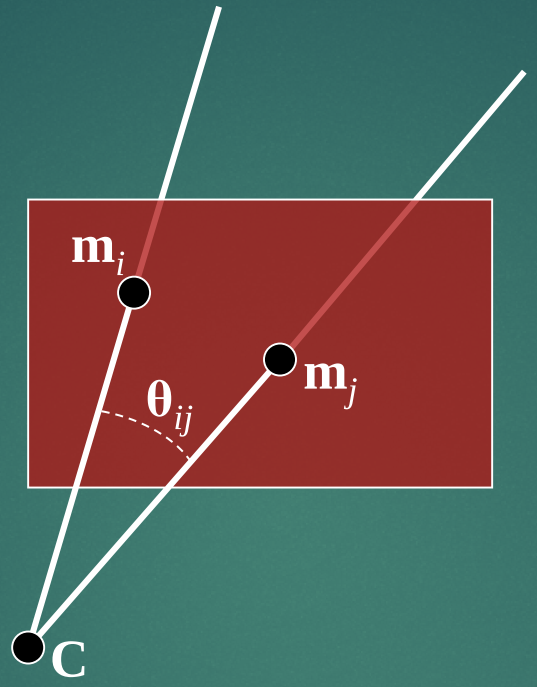
Chaque paire de correspondances $\mathbf{M}_i \leftrightarrow \mathbf{m}_i$ et $\mathbf{M}_j \leftrightarrow \mathbf{m}_j$ donne une contrainte sur les distances (inconnues) $x_i = ||\mathbf{M}_i - \mathbf{C}||$ et $x_j = ||\mathbf{M}_j - \mathbf{C}||$:

$$d_{ij}^2 = x_i^2 + x_j^2 - 2\, x_i\, x_j \cos\theta_{ij},$$

$d_{ij} = ||\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_j||$ est la distance (connue) entre $\mathbf{M}_i$ et $\mathbf{M}_j$

θ_{ij} est l'angle (connu) entre $(\mathbf{CM}_i)$ et $(\mathbf{CM}_j)$

La méthode P3P



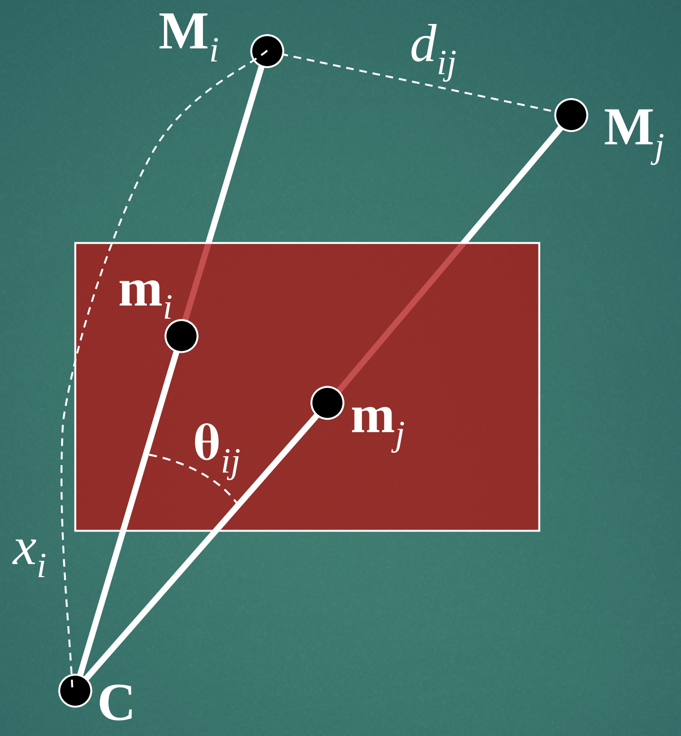
$\cos\theta_{ij}$ depend uniquement des positions 2D (connues) $\mathbf{m}_i$ et $\mathbf{m}_j$.

$$\cos\theta_{ij} = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i}\right)}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j}\right\|\left\|\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i}\right\|} = \frac{\left(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i}\right)}{\sqrt{\left(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j}\right)}\sqrt{\left(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i}\right)^{\mathrm{T}}\left(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i}\right)}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}_i$$

$$\cos\theta_{ij} = \frac{\mathbf{m}_j^{\mathrm{T}}\omega\mathbf{m}_i}{\left(\mathbf{m}_j^{\mathrm{T}}\omega\mathbf{m}_j\right)^{1/2}\left(\mathbf{m}_i^{\mathrm{T}}\omega\mathbf{m}_i\right)^{1/2}} \text{ avec } \omega = \left(\mathbf{KK}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \text{ l'image de la conique absolue}$$

La méthode P3P



Algorithme :

1. Résoudre les distances x_i
2. Calculer les positions $\mathbf{M}_i^C$ des points $\mathbf{M}_i$ dans le repère camera
3. Calculer $\mathbf{R}$ et $\mathbf{T}$ comme la transformation rigide entre les $\mathbf{M}_i$ et les $\mathbf{M}_i^C$

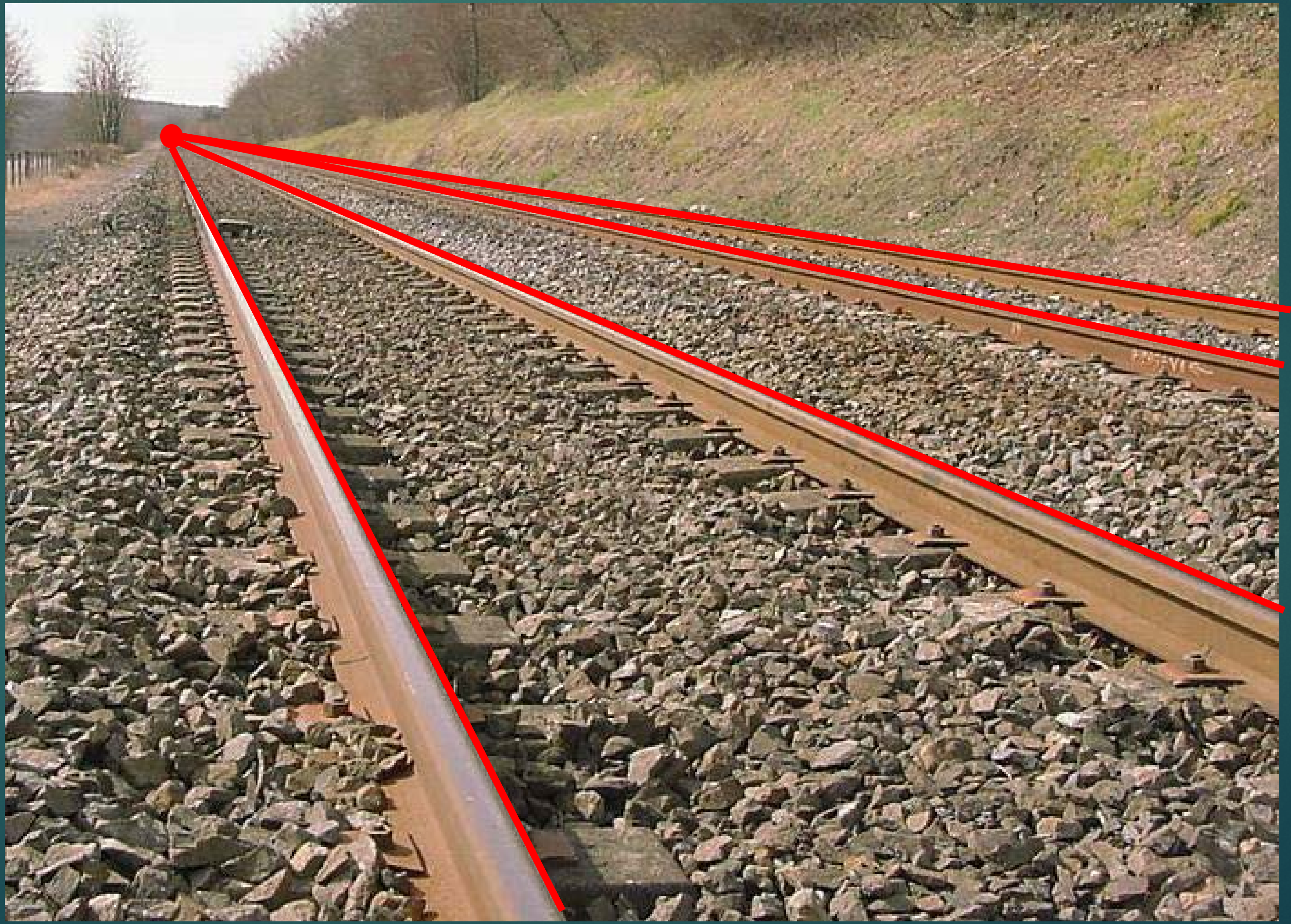
Optimisation non linéaire

- Les méthodes PnP peuvent manquer de précision, surtout lorsque n est petit
- Le point de vue est généralement affiné en utilisant une optimisation non linéaire (Gauss-Newton, Levenberg Marquardt, ...) tenant compte de tous les appariements disponibles :

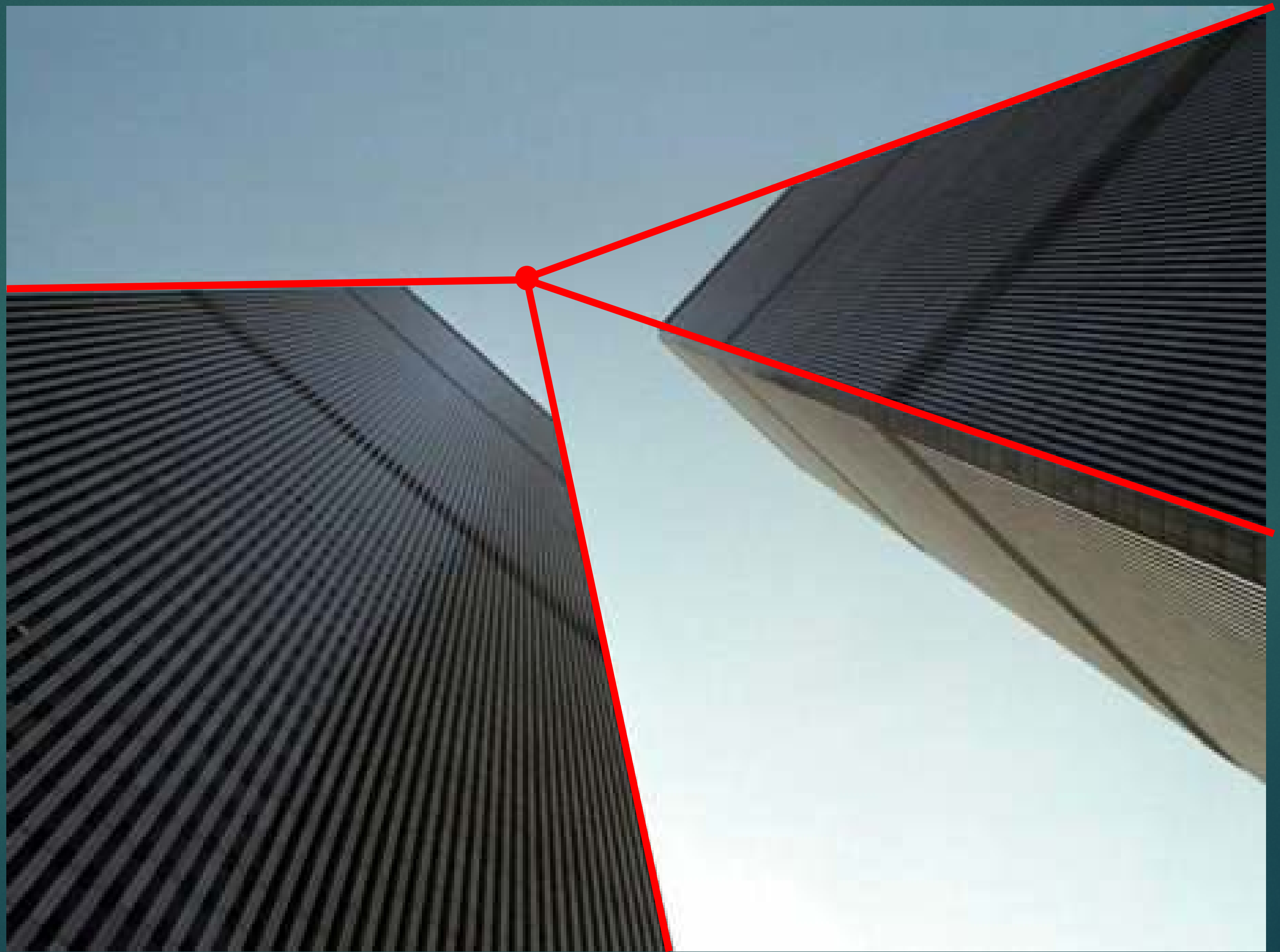
$$\min_{\mathbf{R},\mathbf{T}} \sum_i \left\| \mathbf{K}[\mathbf{R} \mid \mathbf{T}]\mathbf{M}_i - \mathbf{m}_i \right\|^2$$

- Intérêts :
  - Minimisation d'une erreur ayant un sens physique (erreur de reprojection, en pixels)
  - Peut prendre en compte un nombre arbitraire de points

Méthode 2 : utilisation des points de fuite de l'image



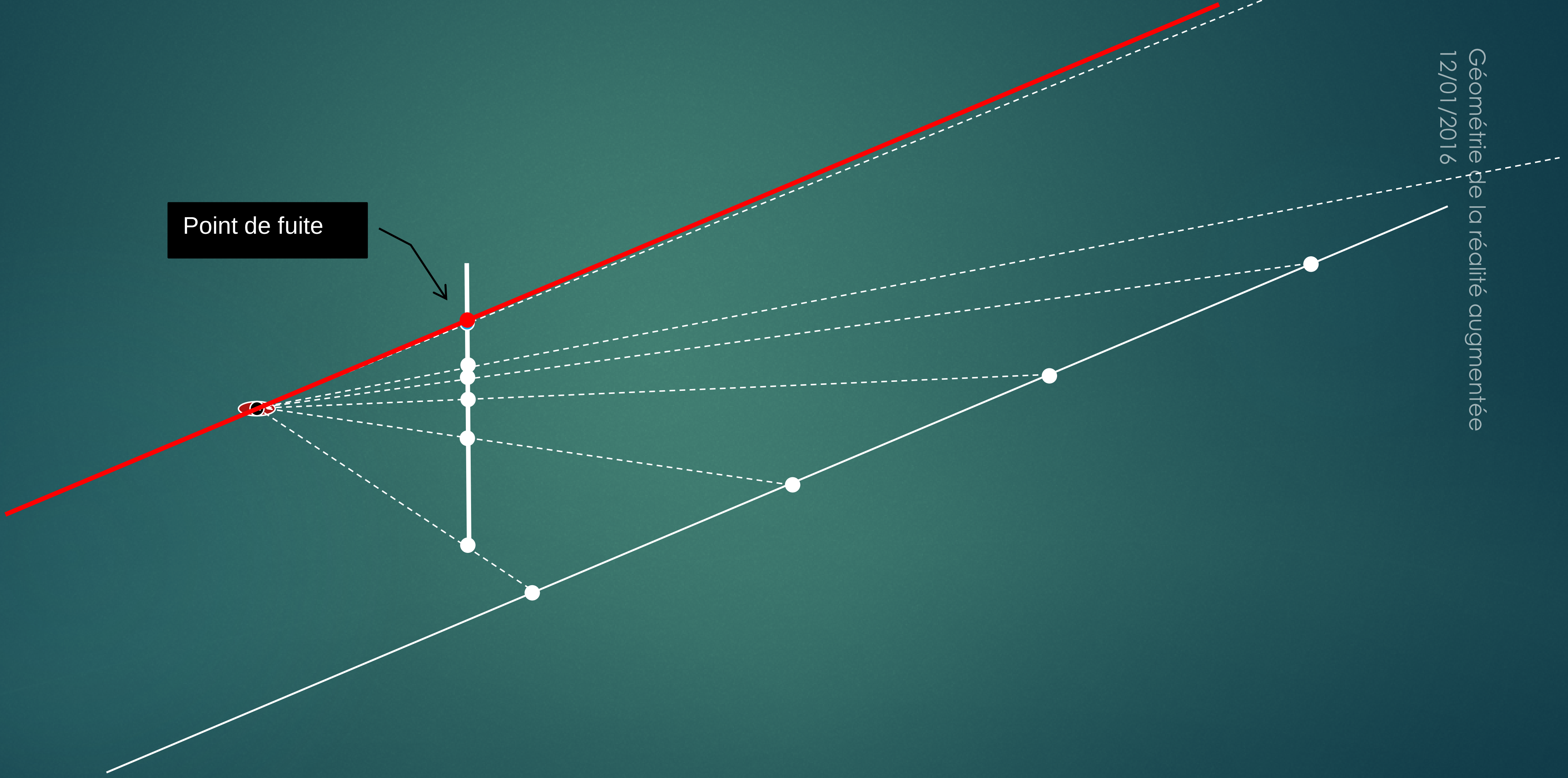
Méthode 2 : utilisation des points de fuite de l'image



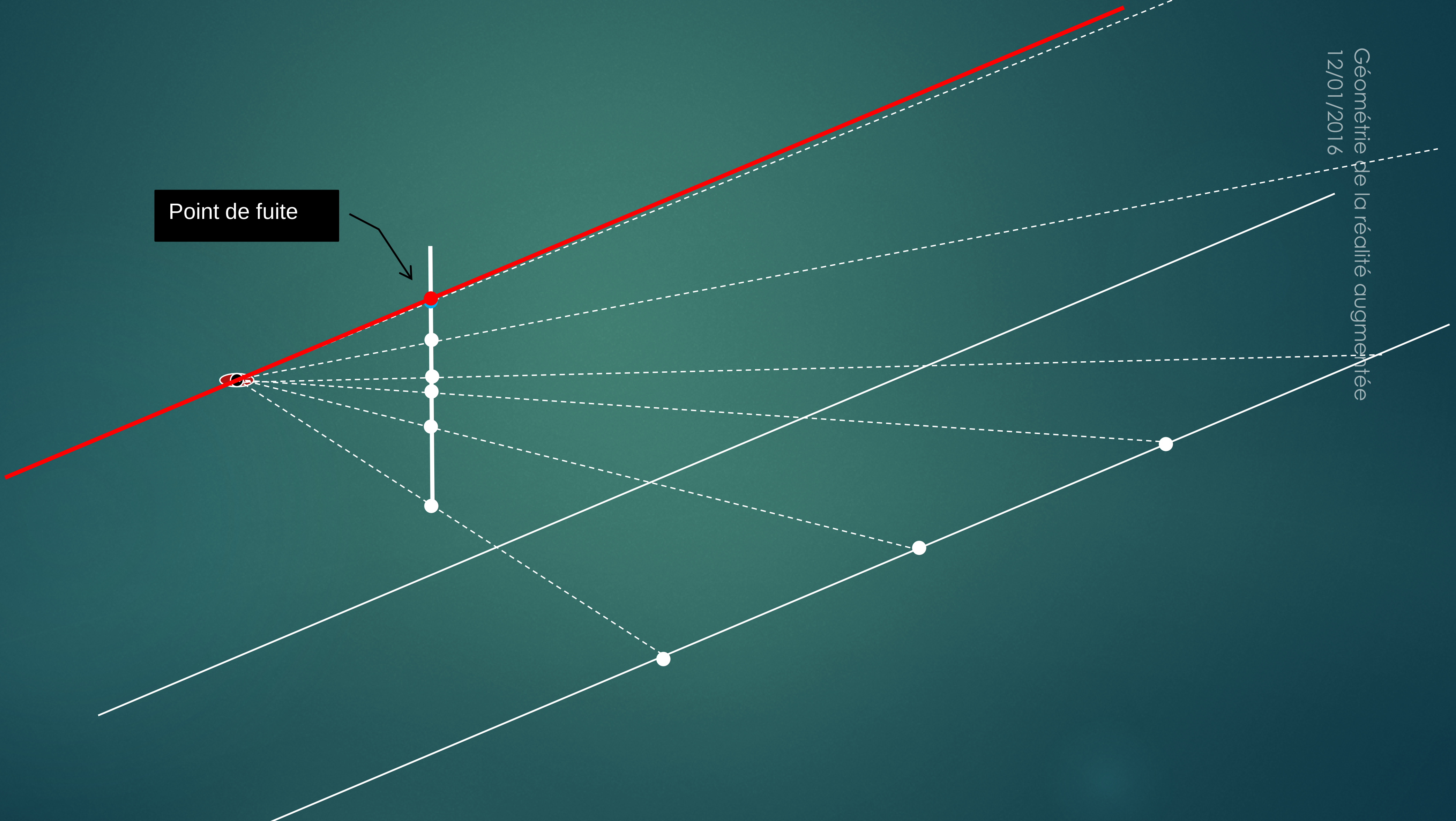
Le point de fuite

Obtient-on un point de convergence ?
Si oui, comment le construire géométriquement ?

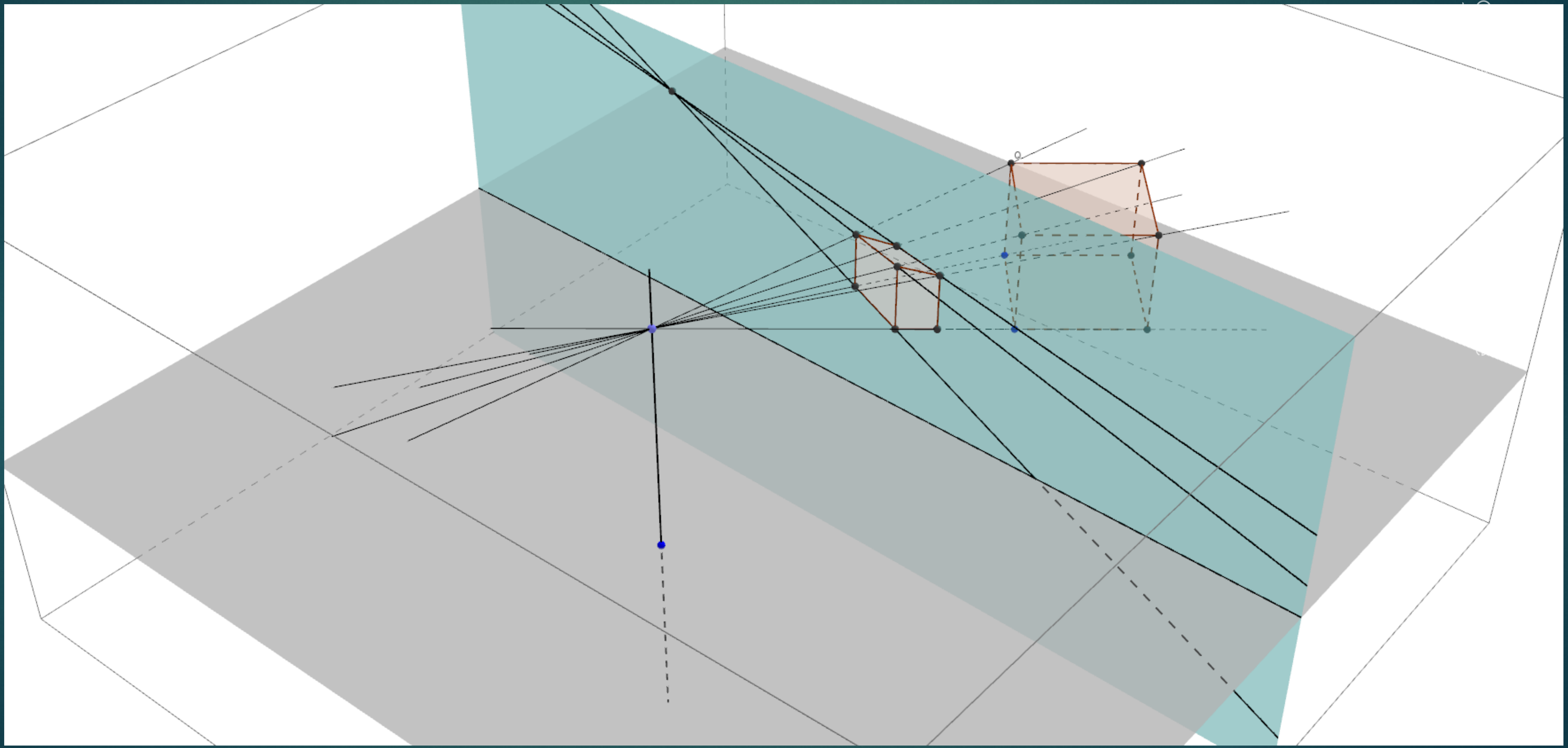
Le point de fuite



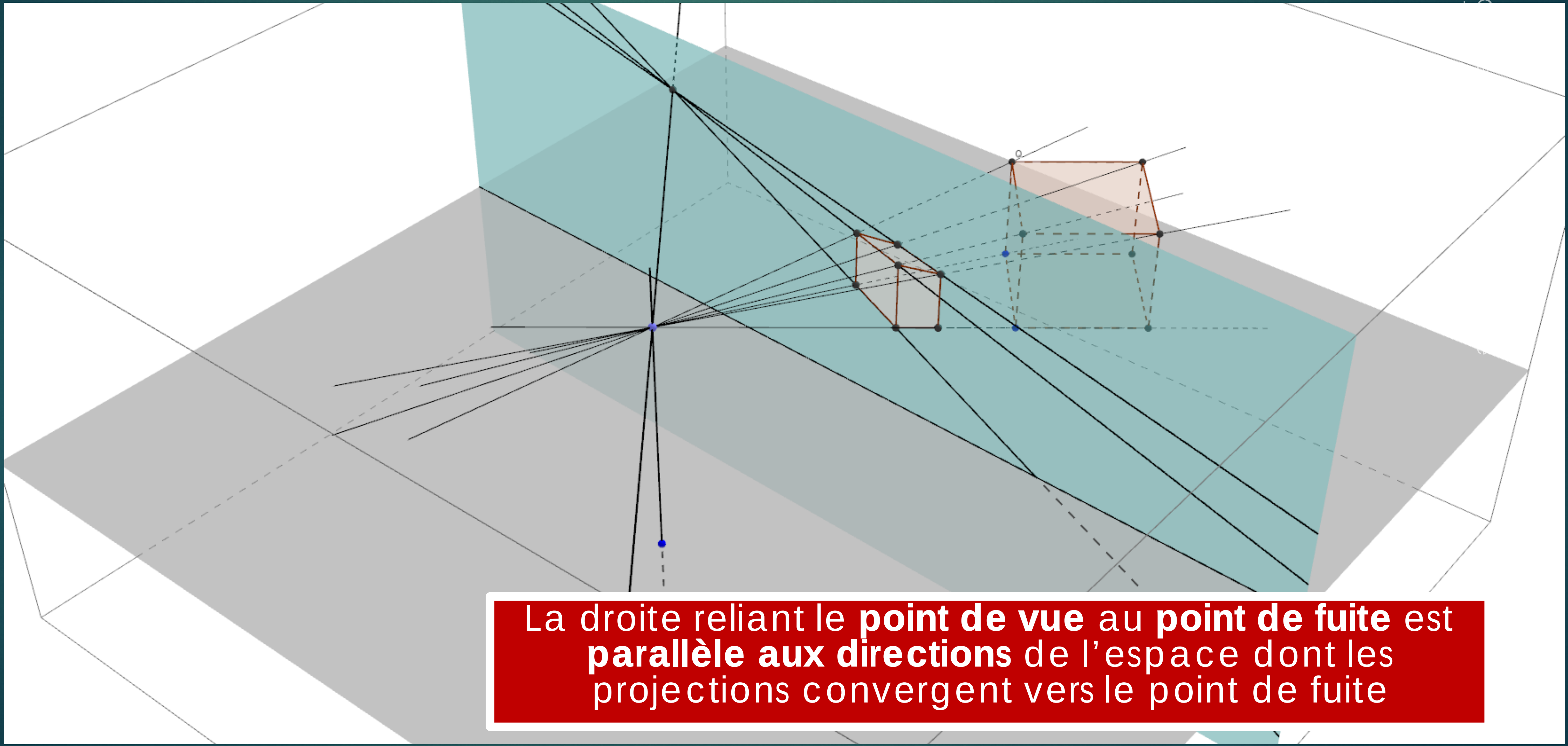
Le point de fuite



Le point de fuite

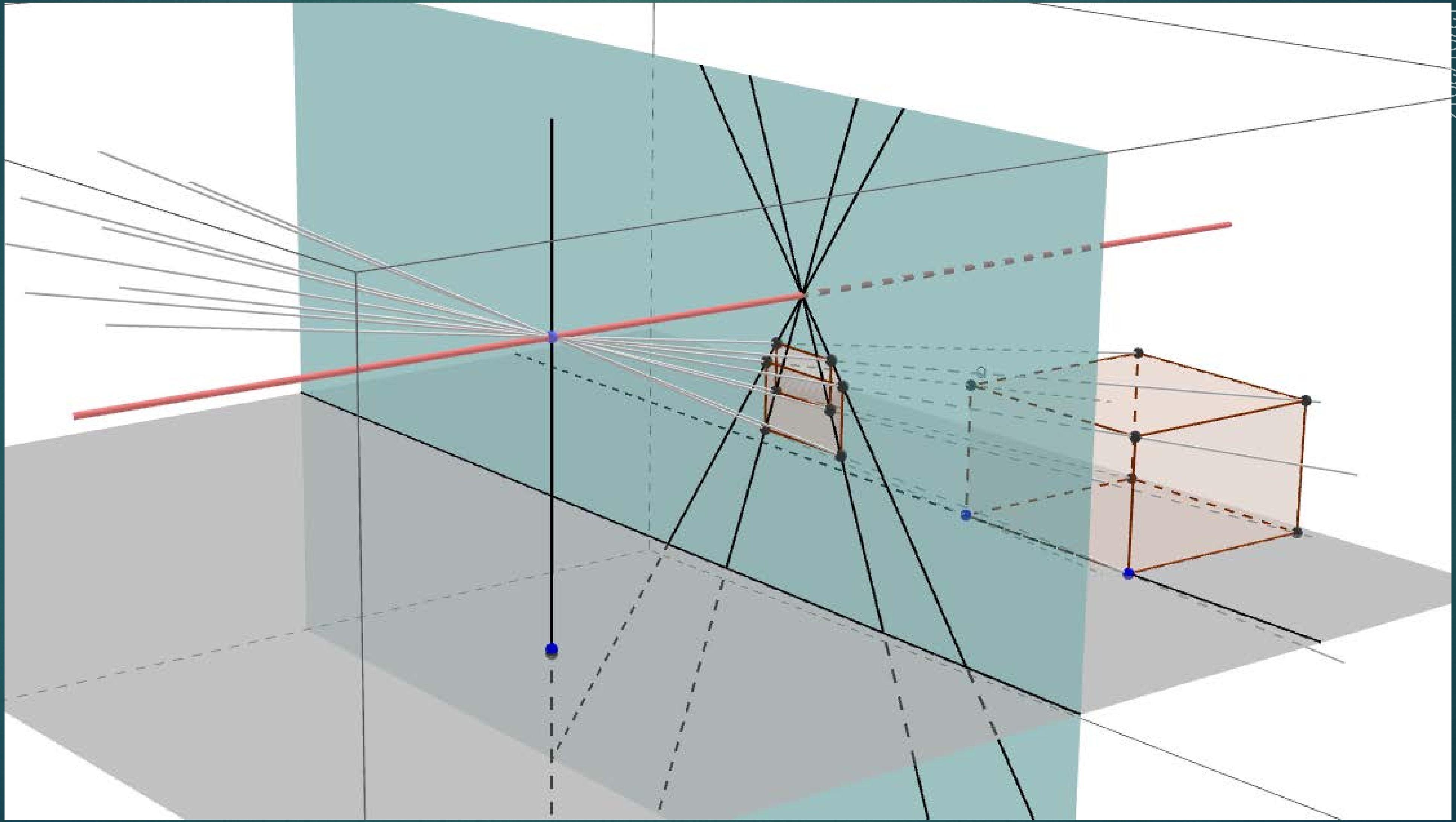


Le point de fuite

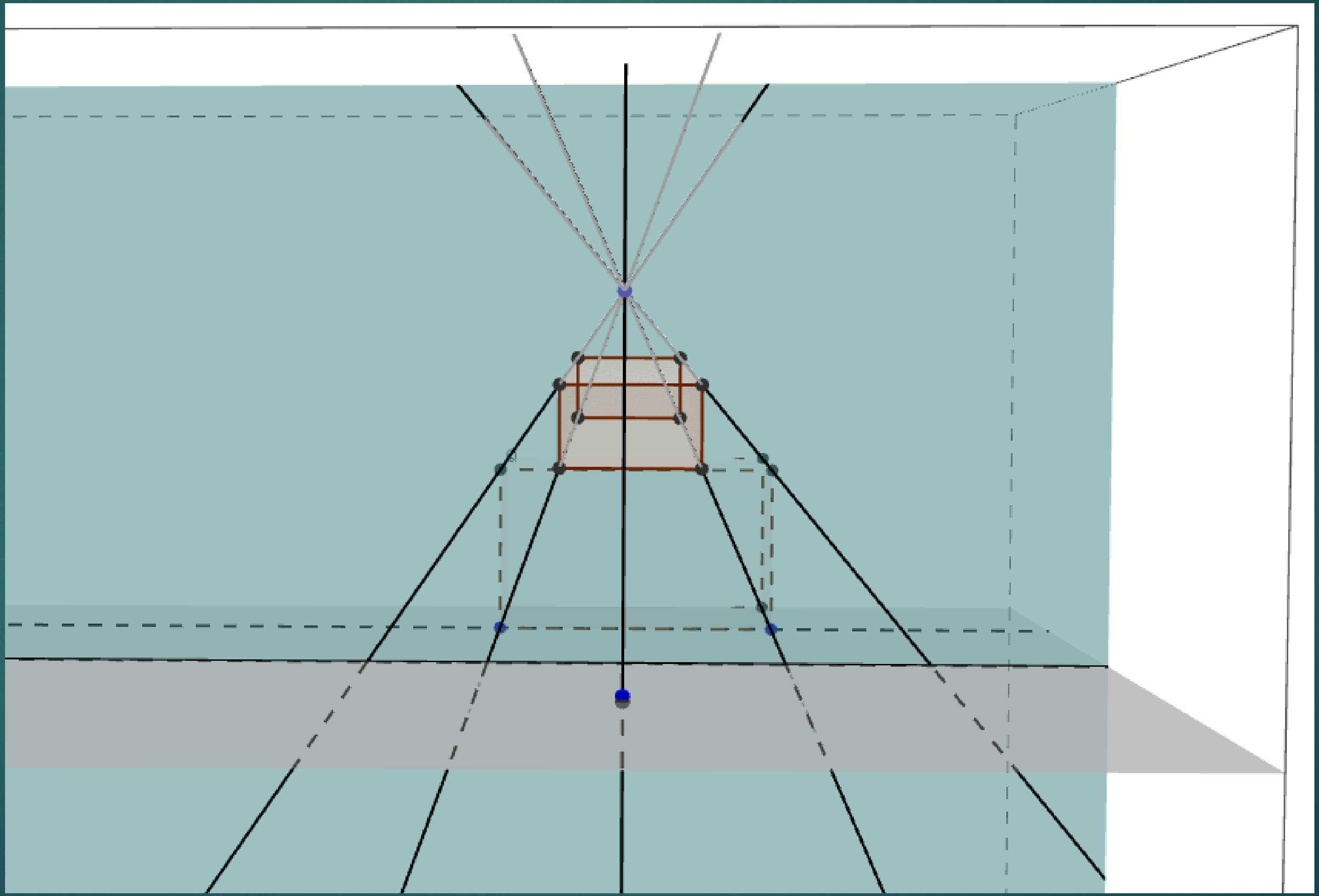


La droite reliant le **point de vue** au **point de fuite** est **parallèle aux directions** de l'espace dont les projections convergent vers le point de fuite

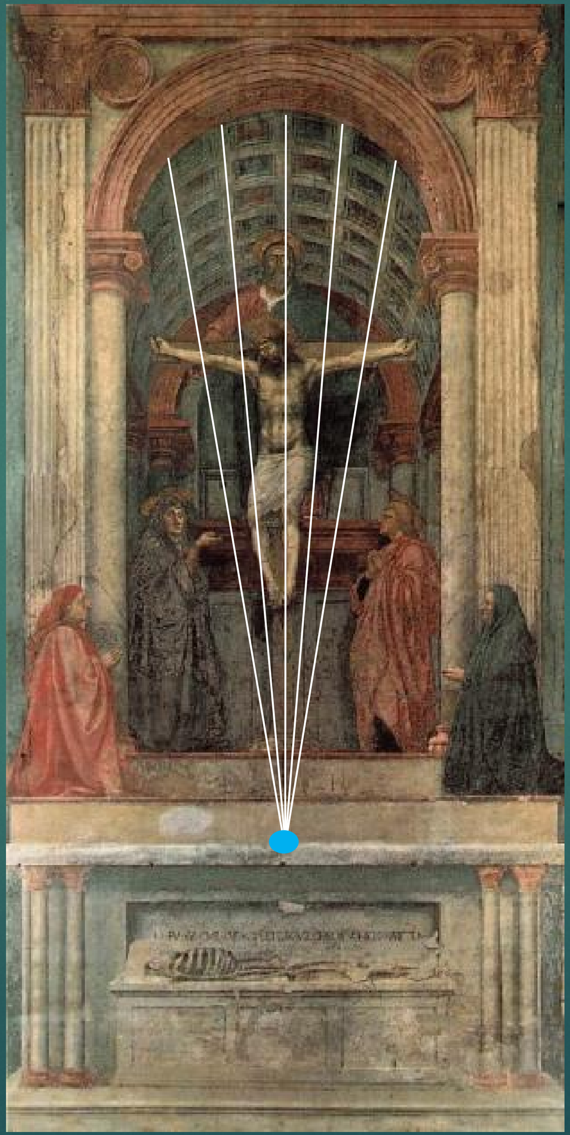
Le point de fuite



Le point de fuite



Le point de fuite

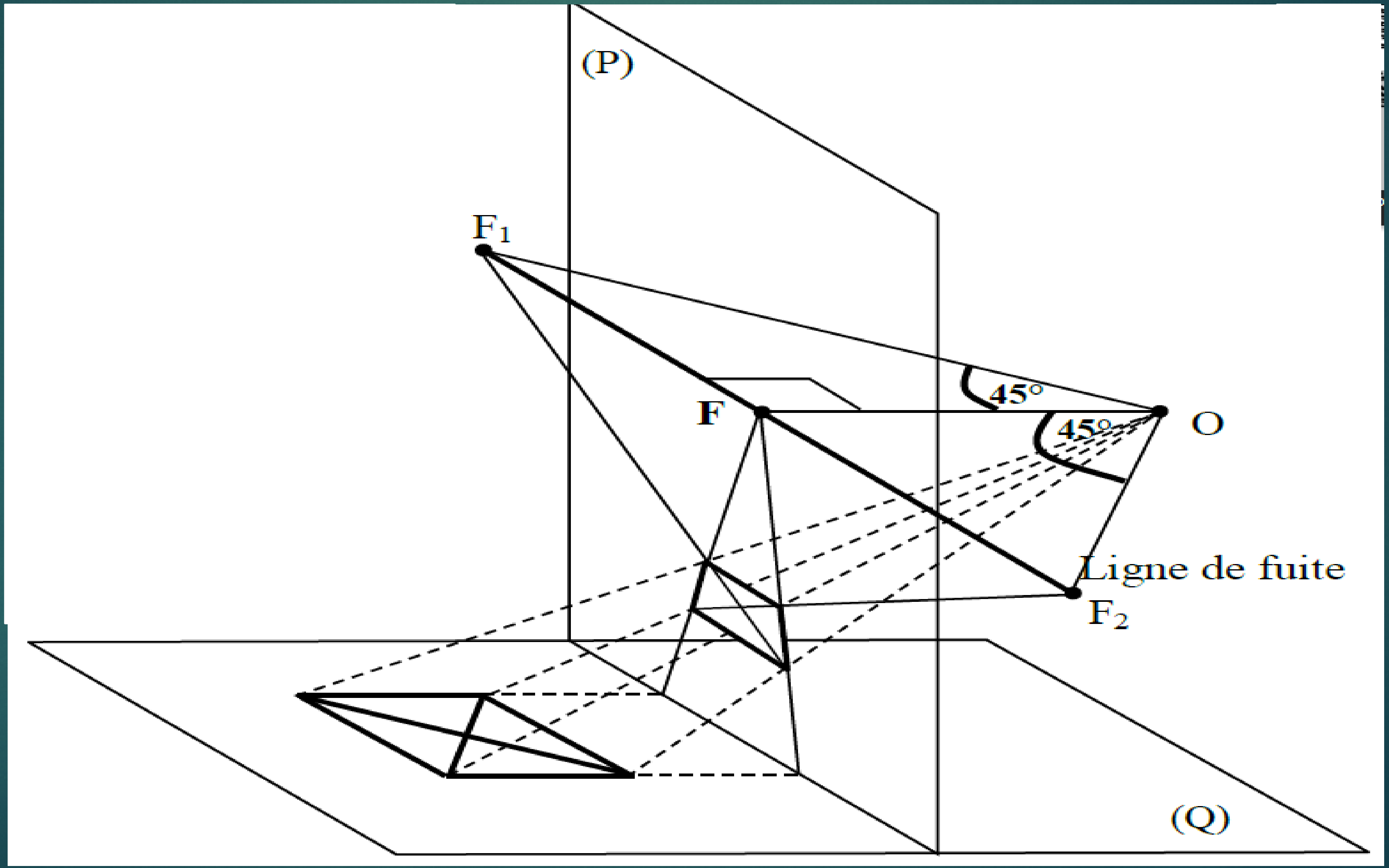


Masaccio, La Trinité, 1427

Le point de fuite

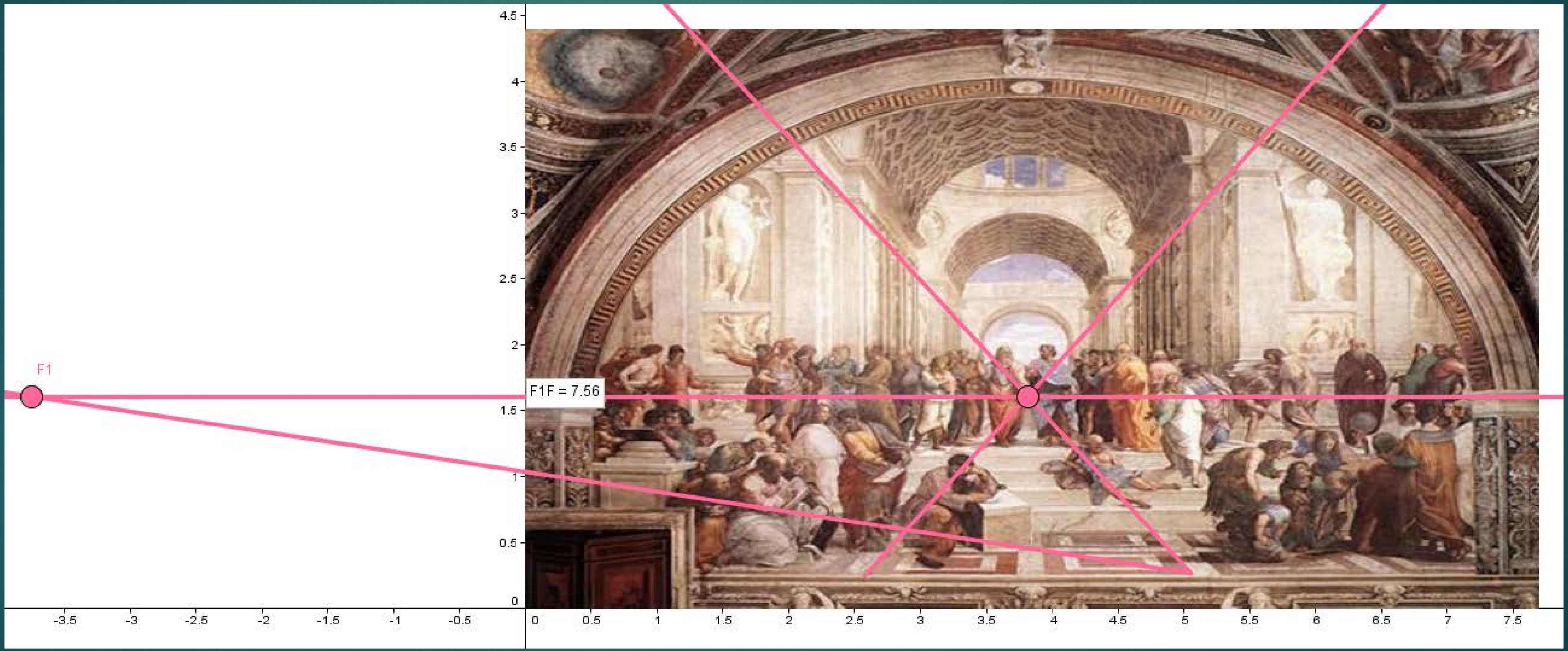
Est-ce un hasard ?
Que peut-on en déduire ?

Calcul du point de vue à partir d'un carré au sol, parallèle au plan de projection

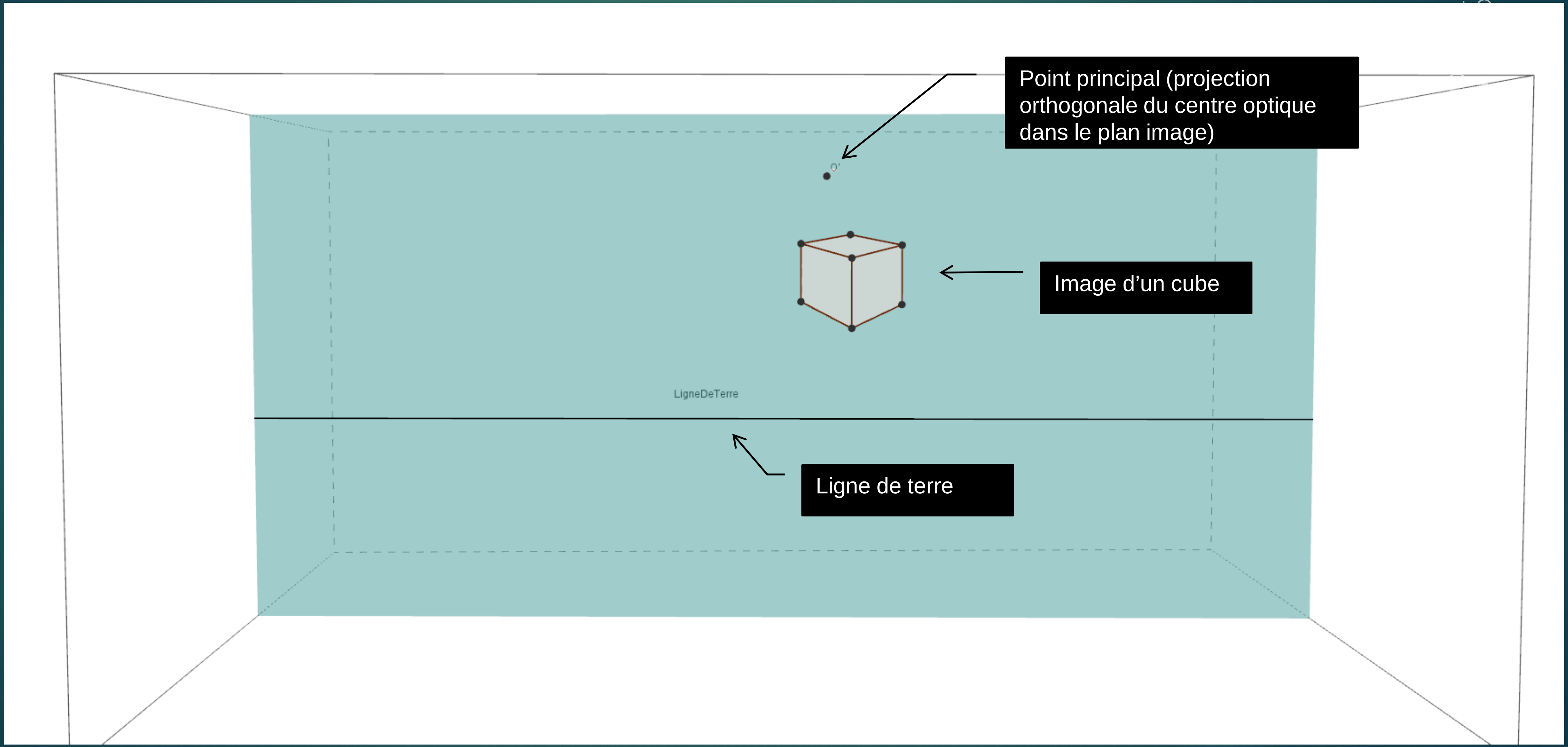


Calcul du point de vue à partir d'un carré au sol, parallèle au plan de projection

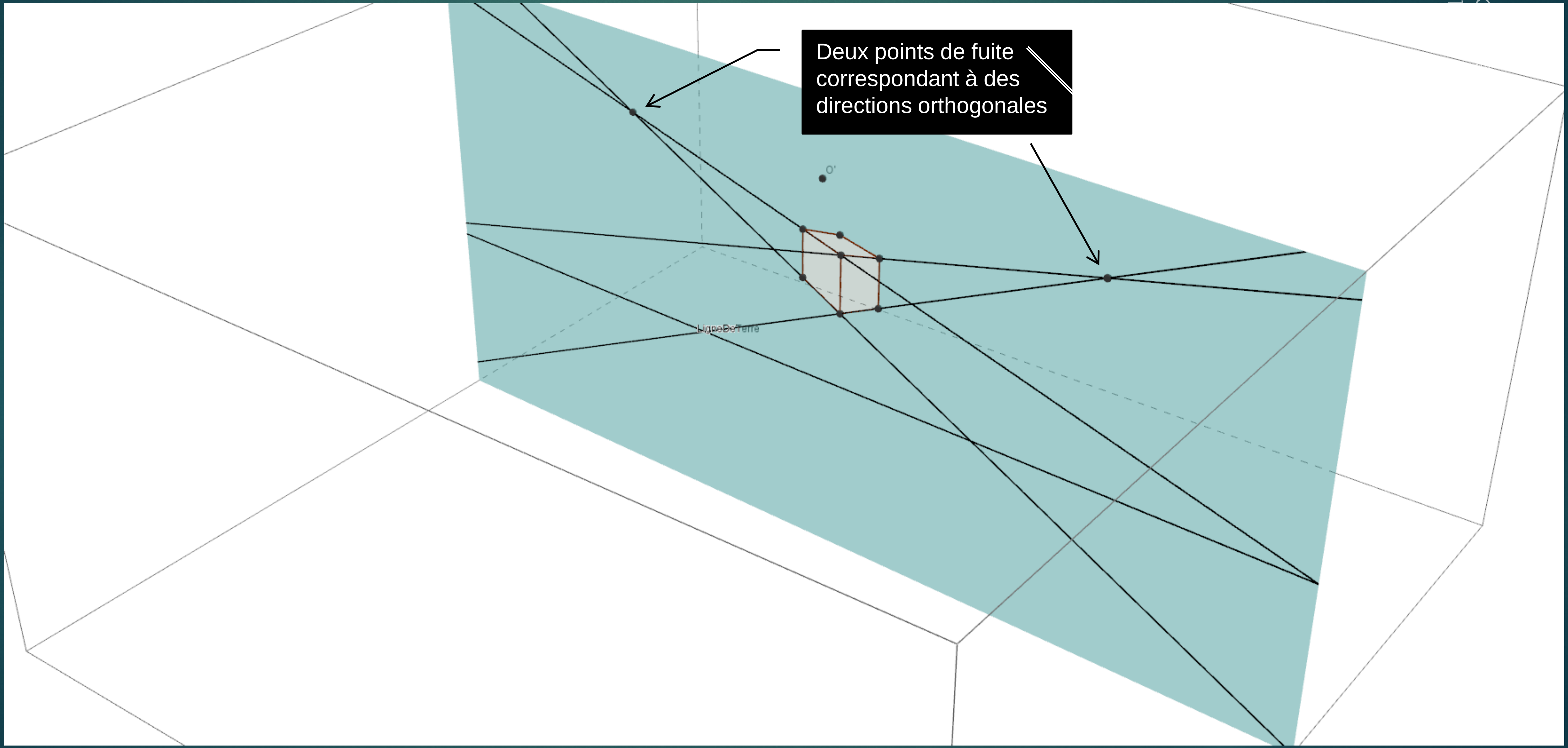
Exemple : L'École d'Athènes (Raphaël)



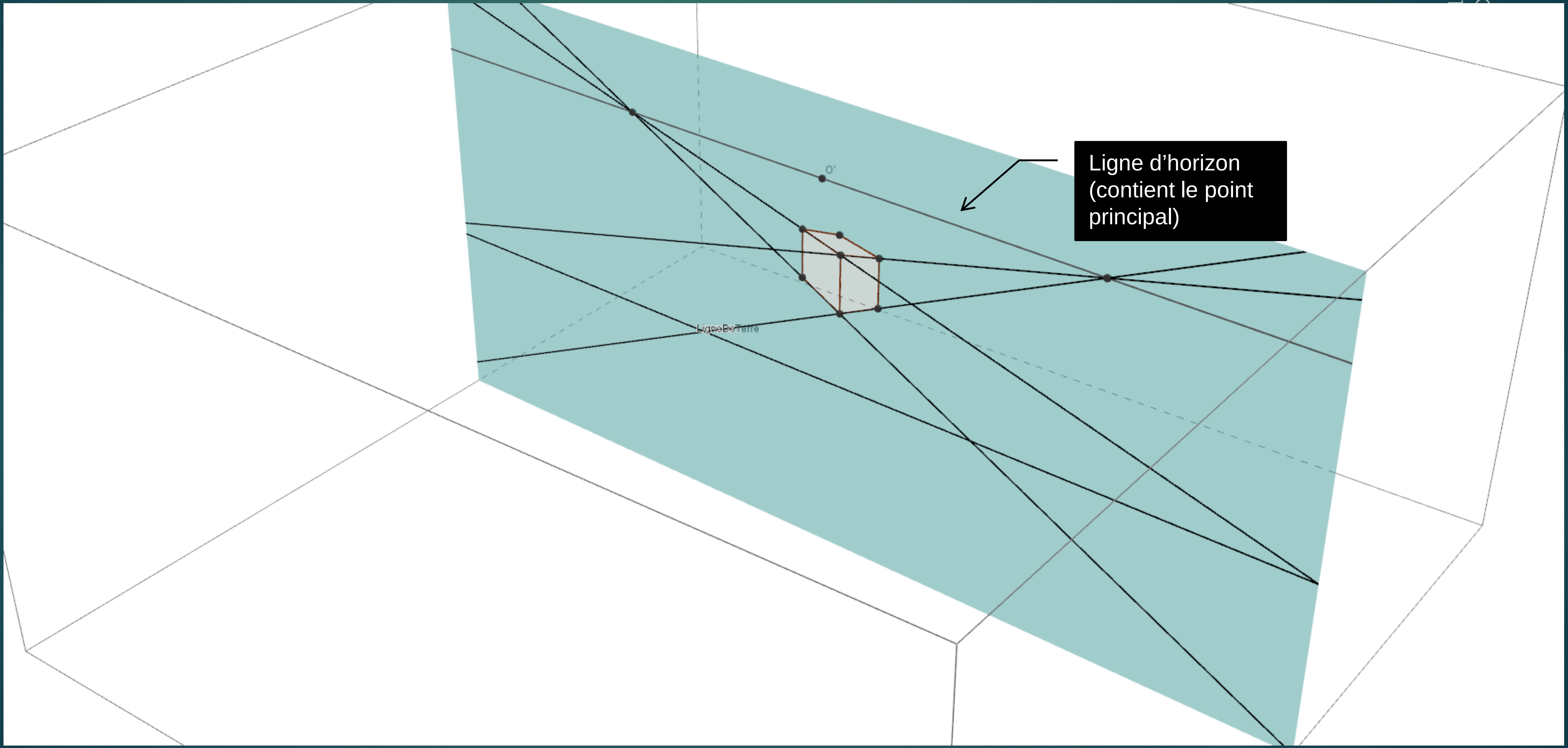
Calcul du point de vue à partir de deux points de fuite horizontaux



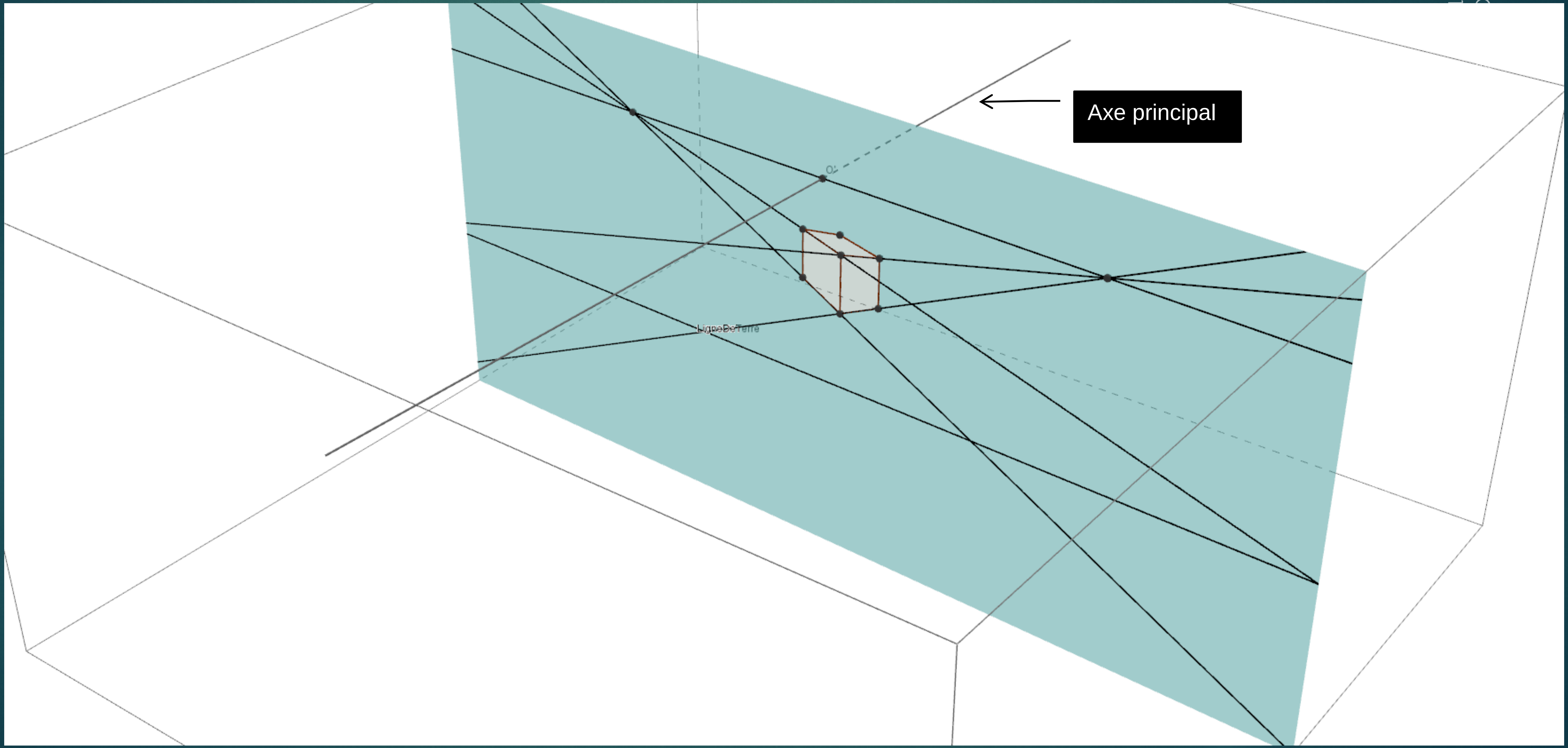
Calcul du point de vue à partir de deux points de fuite horizontaux



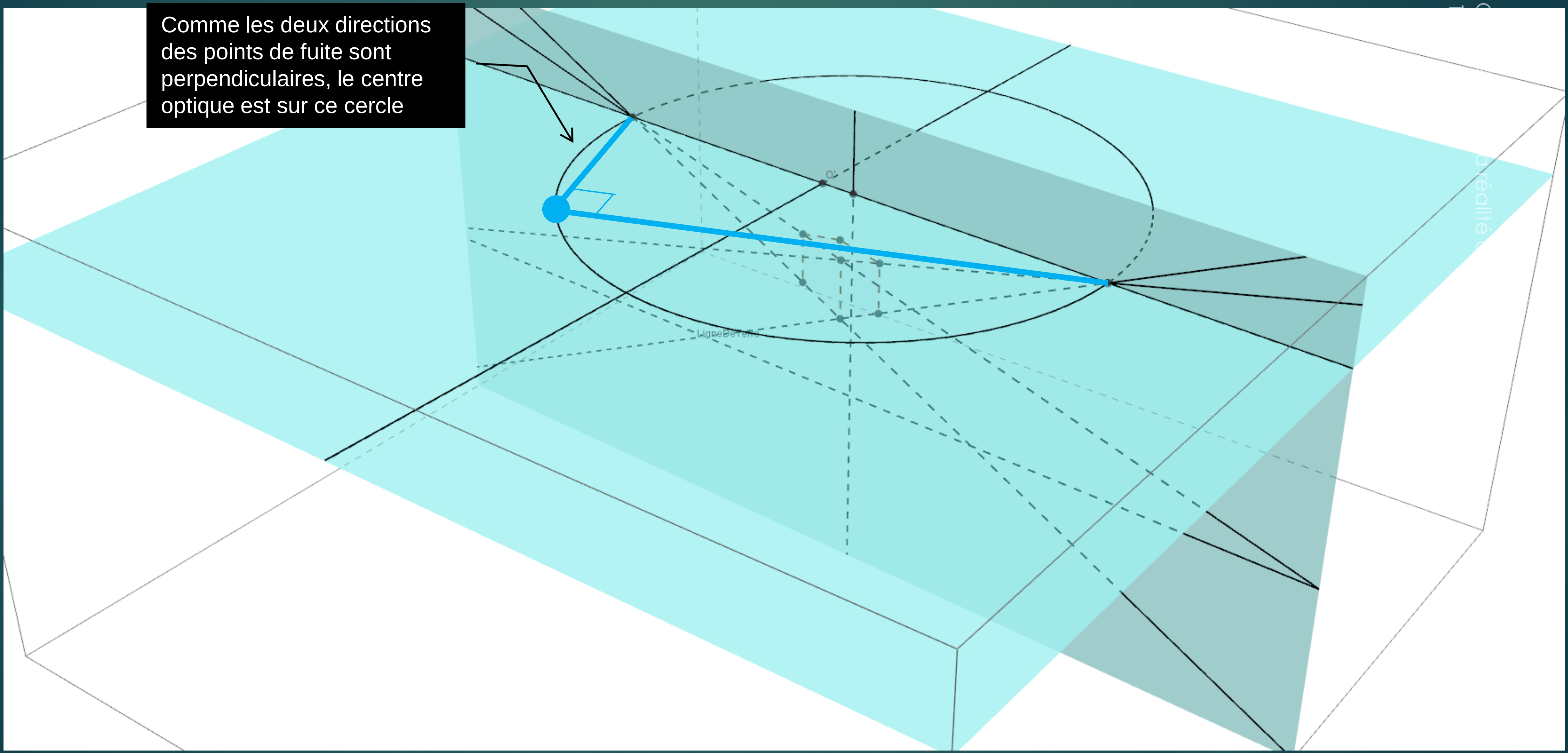
Calcul du point de vue à partir de deux points de fuite horizontaux



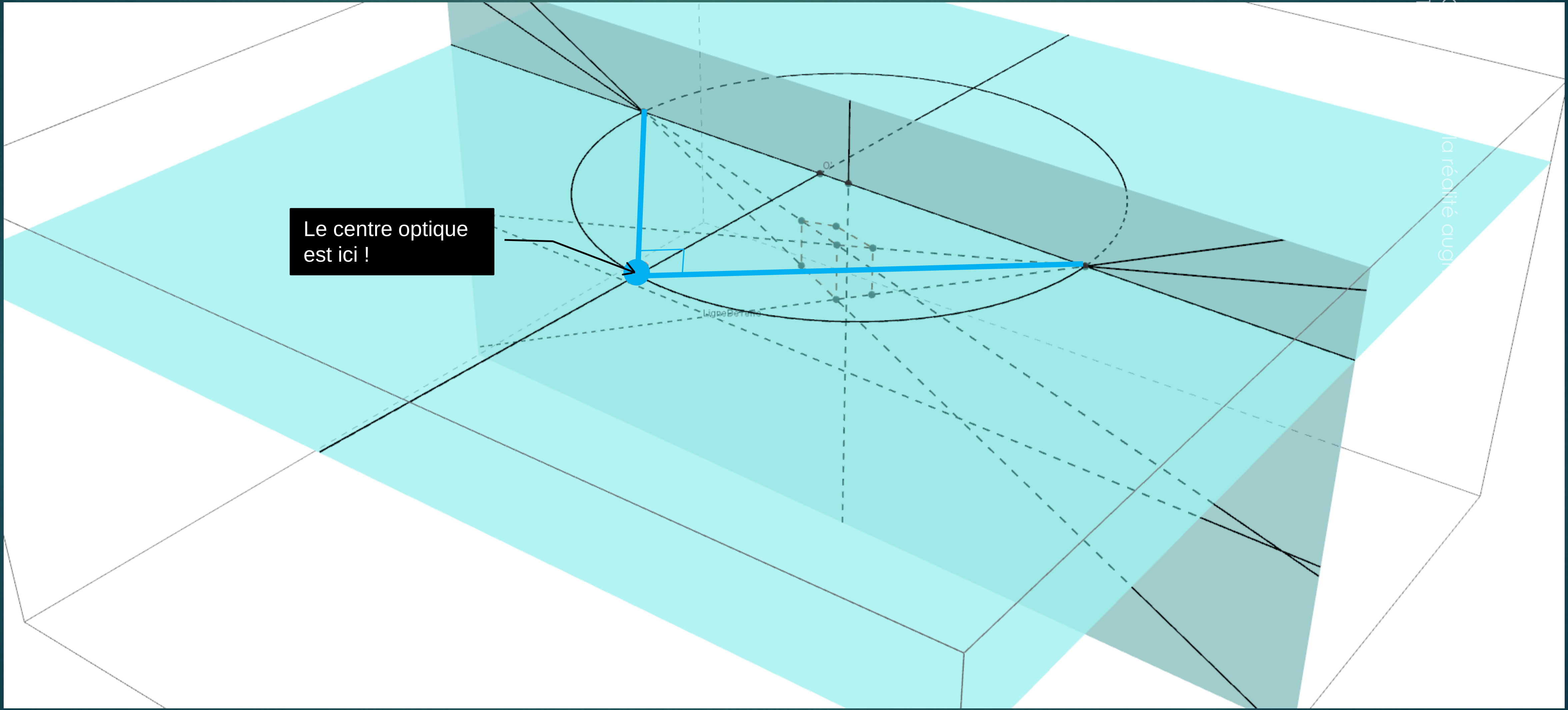
Calcul du point de vue à partir de deux points de fuite horizontaux



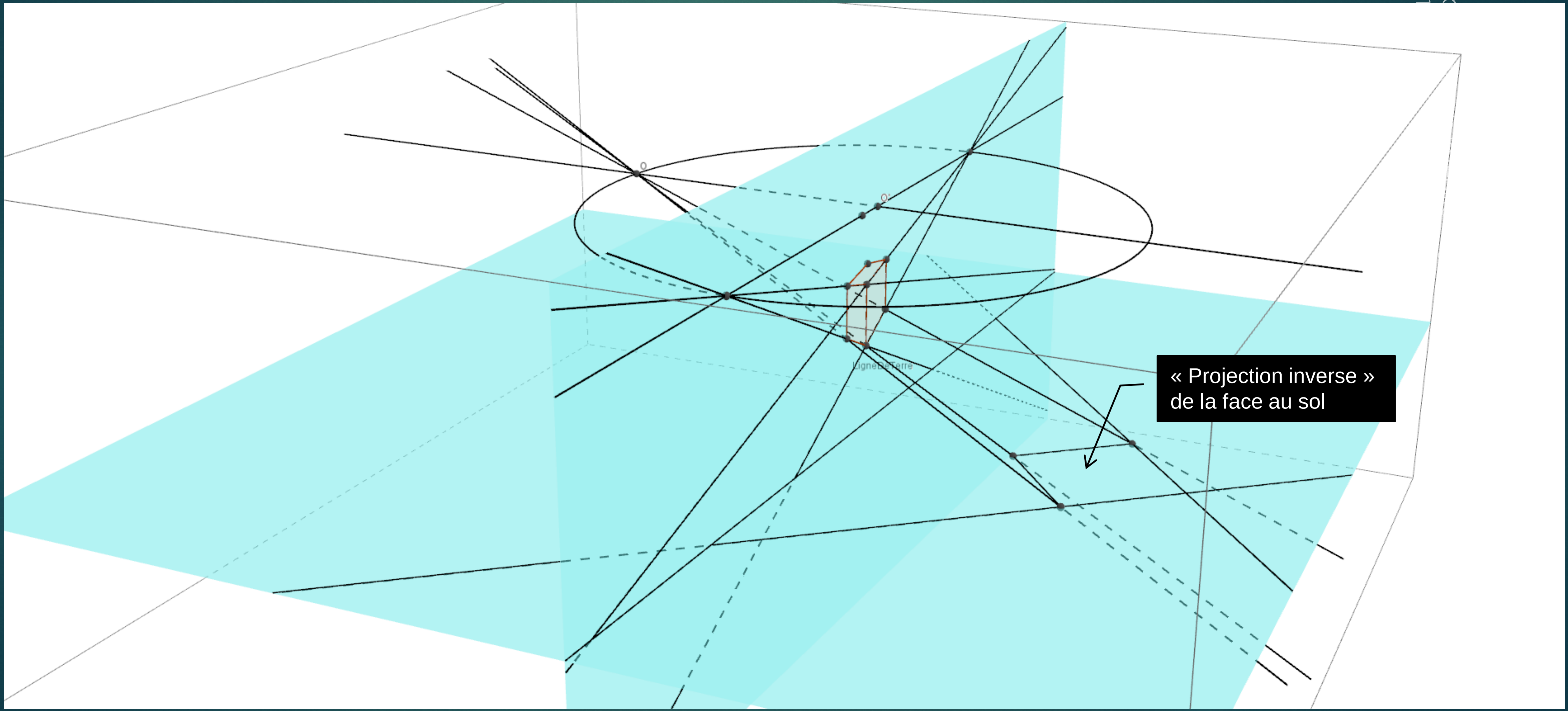
Calcul du point de vue à partir de deux points de fuite horizontaux



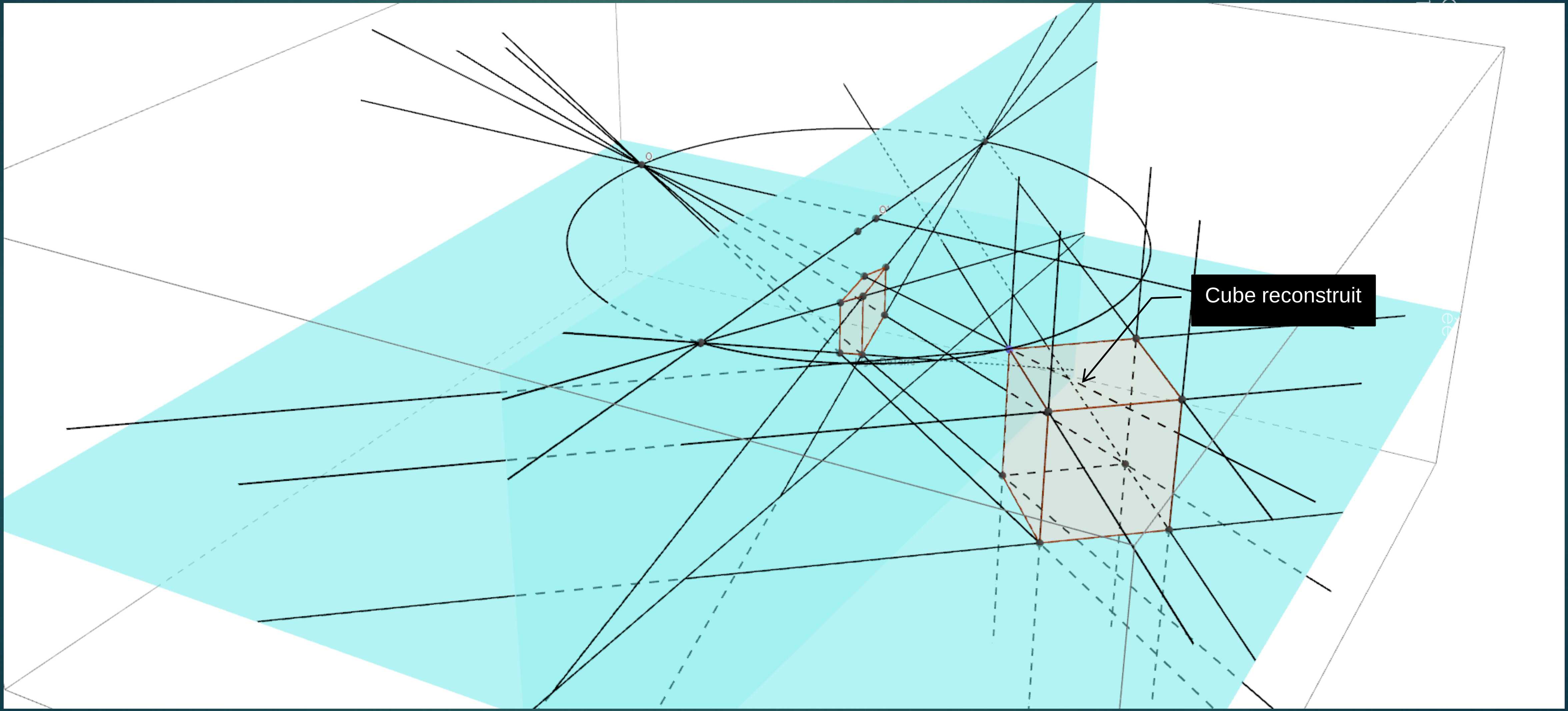
Calcul du point de vue à partir de deux points de fuite horizontaux



Calcul du point de vue à partir de deux points de fuite horizontaux



Calcul du point de vue à partir de deux points de fuite horizontaux



Application : photomatch (Sketchup)

Application : photomatch (Sketchup)

Application : photomatch (Sketchup)

Application : photomatch (Sketchup)

Les calculs

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{w}}{\left(\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}\right)^{1/2}\left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{w}\right)^{1/2}}$$

avec $\boldsymbol{\omega} = \left(\mathbf{K}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ l'image de la conique absolue

$\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{w} = 0$, ce qui permet d'obtenir $\mathbf{K}$

Puis :

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{v} / \left\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{v}\right\|$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{w} / \left\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{w}\right\|$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\mathbf{V} & \mathbf{W} & \mathbf{V}\times\mathbf{W}\end{pmatrix}$$