

Antiquité (géométrie)



La perspective centrale

La perspective centrale



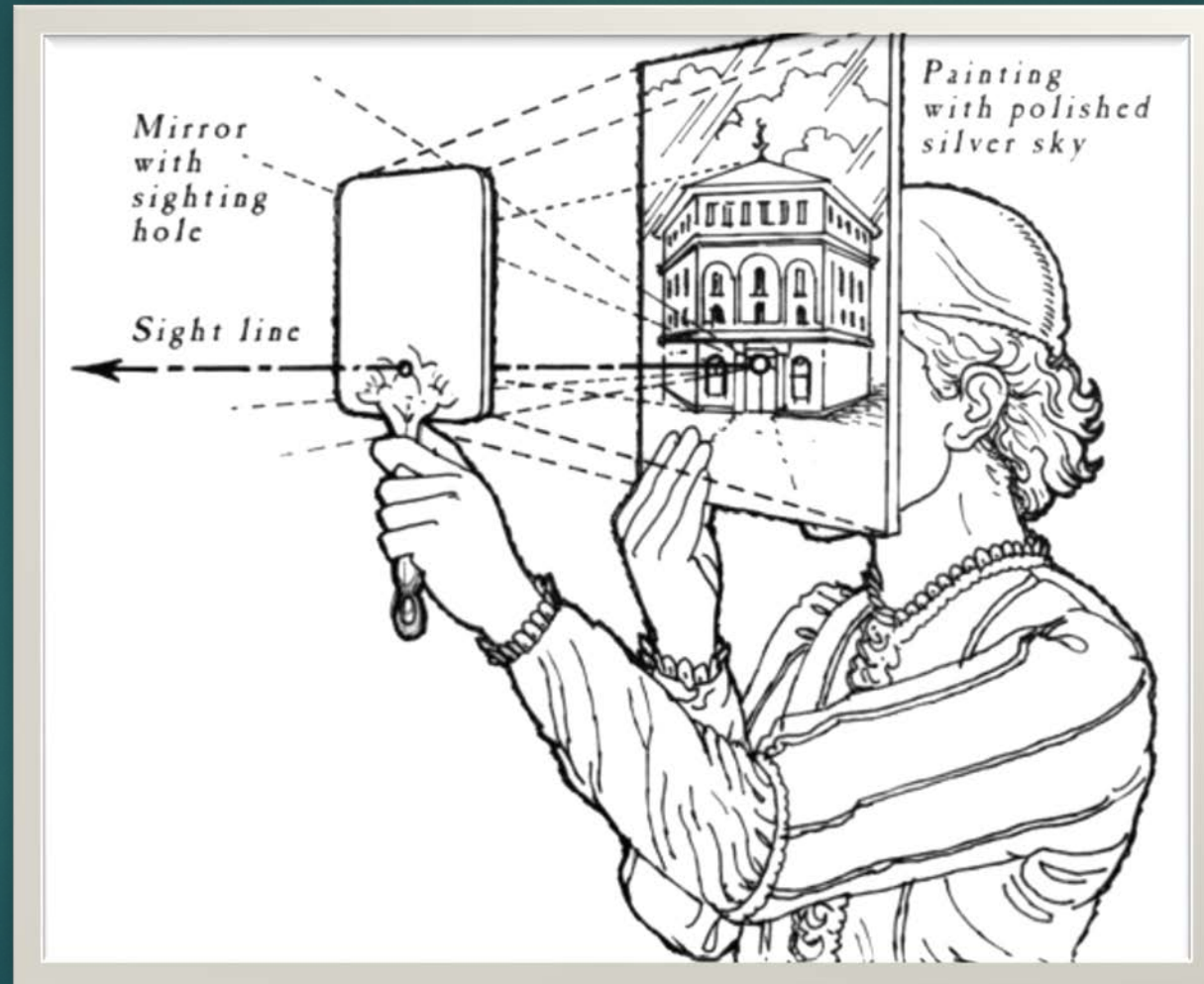
Ambrogio Lorenzetti, Les effets du bon gouvernement, 1340

La perspective centrale

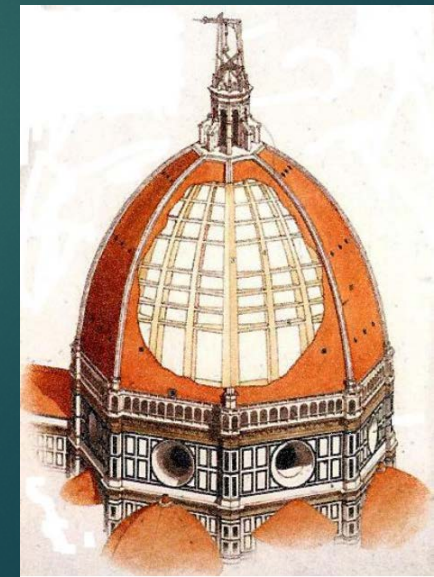
« Quand donc la lumière du jour entoure le flux issu des yeux, alors le feu intérieur qui s'échappe, le semblable allant vers le semblable, après s'être combiné avec la lumière du jour se constitue en un seul corps ayant les mêmes propriétés tout le long de la droite issue des yeux, quel que soit l'endroit où le feu qui jaillit de l'intérieur entre en contact avec le feu qui provient des objets extérieurs »

Platon, *Timée*, vers -360

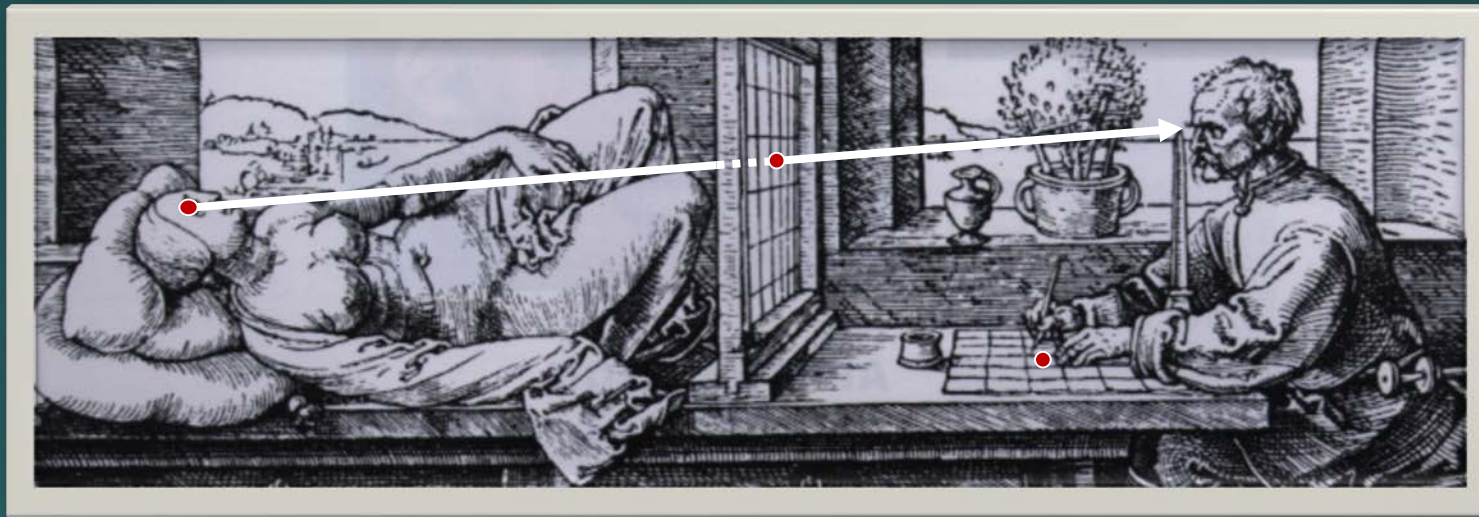
La perspective centrale



La tavoletta de Brunelleschi, vers 1420

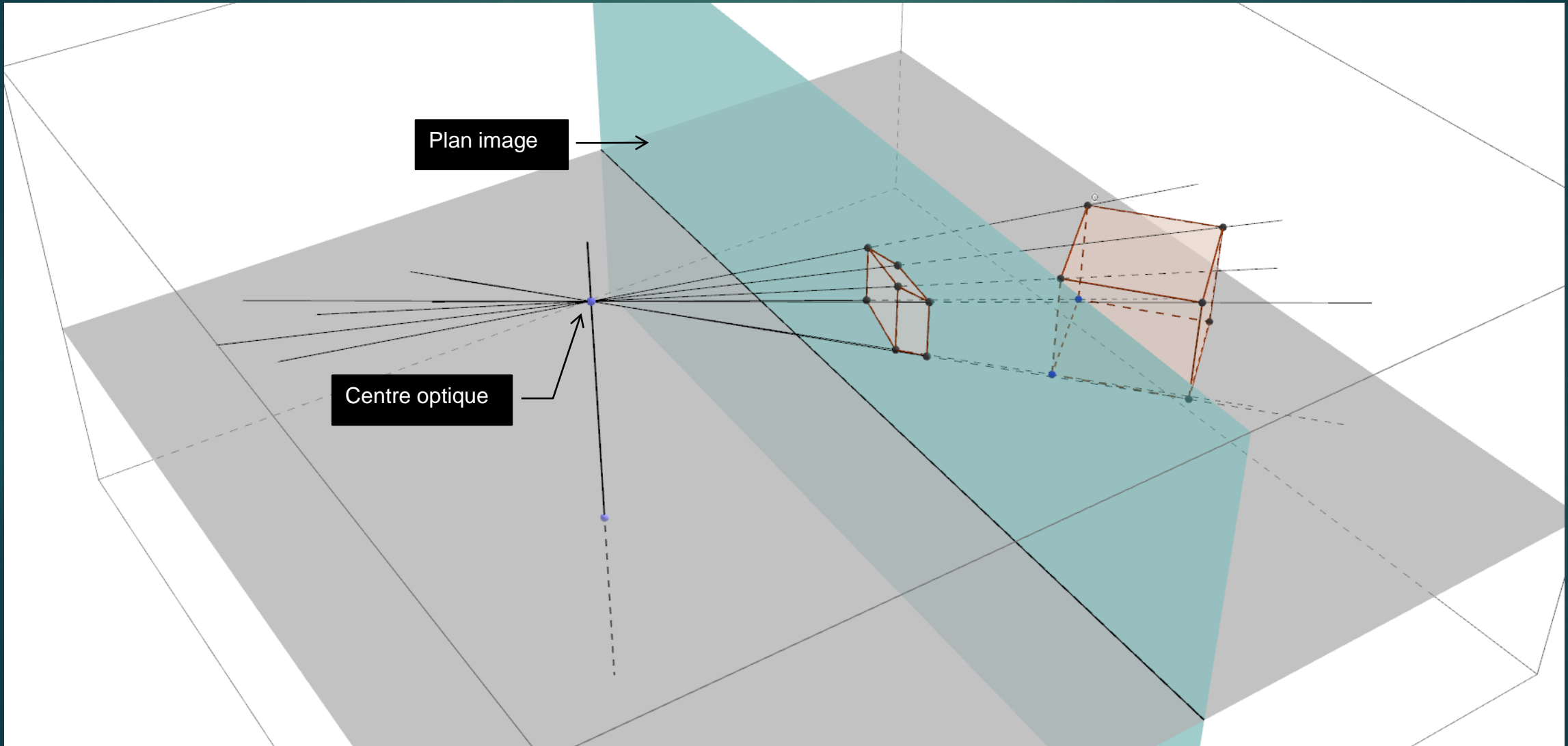


La perspective centrale



Albrecht Durer, Instructions pour mesurer (Le dessinateur de la femme couchée), 1527

La perspective centrale



Matrice de projection

Naissance de la géométrie algébrique

L A
G E O M E T R I E.
LIVRE PREMIER.

*Des problemes qu'on peut construire sans
y employer que des cercles & des
lignes droites.*

Tous les Problemes de Geometrie se
peuvent facilement reduire a tels termes,
qu'il n'est besoin par après que de connoi-
stre la longueur de quelques lignes droites,
pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que
de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la
Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extra-
ction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece
de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geo-
metrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les pre-
parer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou
en offer, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité
pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui
peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant
encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit
à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est
le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne
quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

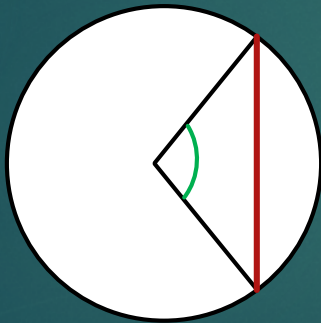
Commẽt
le calcul
d'Arith-
metique se
rapporte
aux ope-
rations de
Geome-
trie.

Origine de la trigonométrie

10

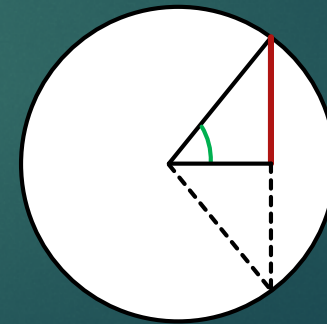
- ▶ Du grec "*trigone*" (triangle) et "*metron*" (mesure)

Hipparque de Nicée (-190 ;
-120) : premières tables
trigonométriques

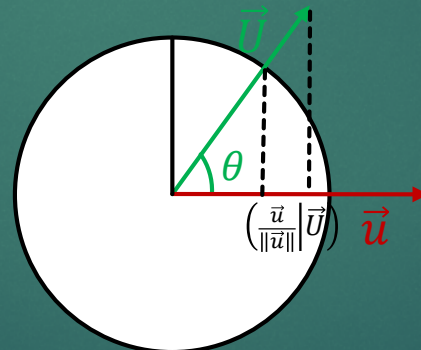
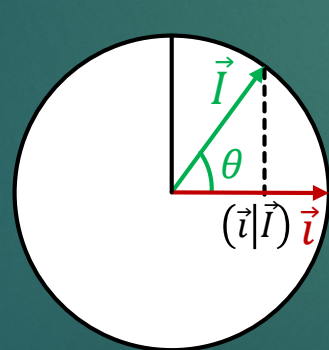
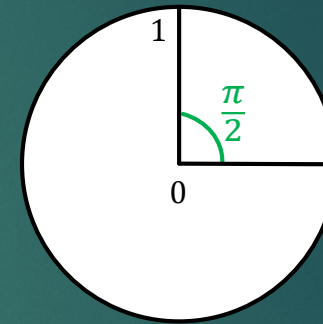
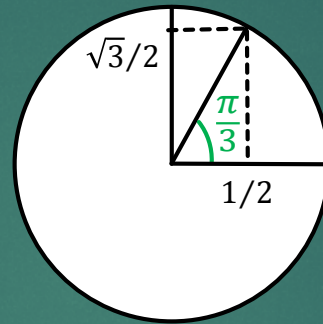
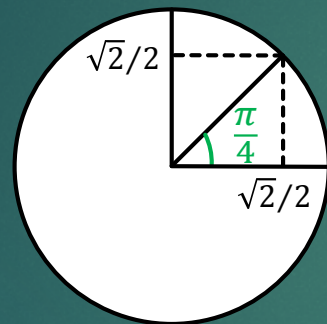
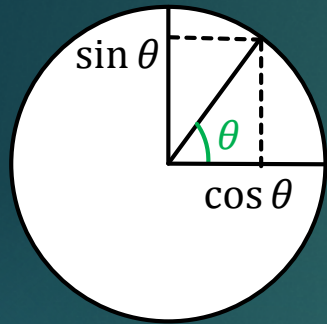


La règle de Ptolémée
(90 ; 168)

Aryabhata l'Ancien (476 ; 550)
utilise la demi corde :
premières tables de sinus



Rappels sur la trigonométrie et le produit scalaire

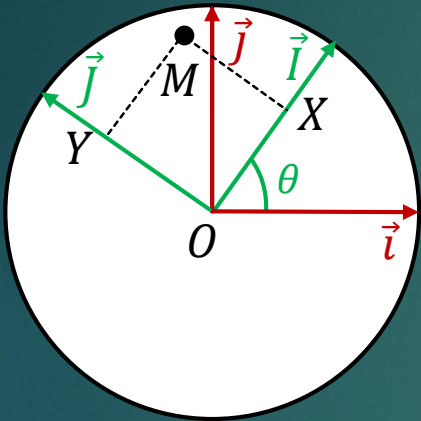


$$(\vec{i} | \vec{I}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) = \cos \theta$$

$$\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \middle| \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} \right) = \cos \theta$$

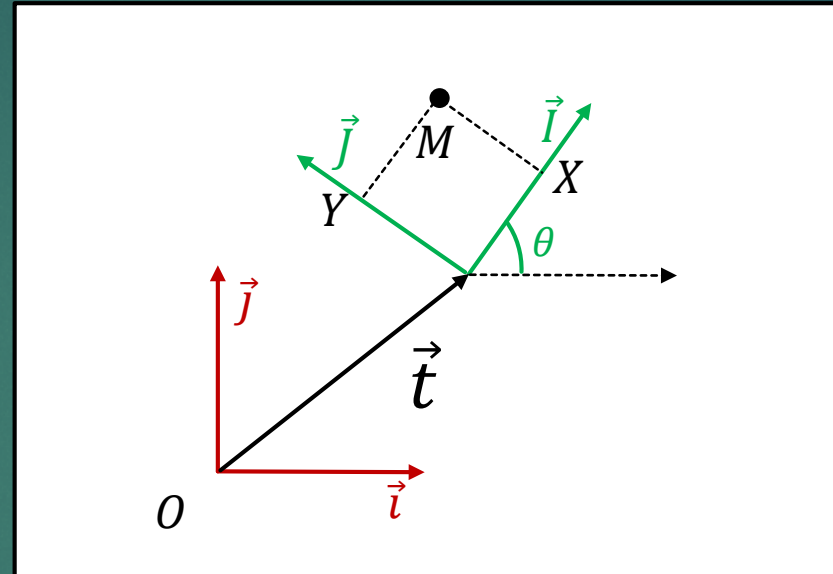
$$\Rightarrow (\vec{u} | \vec{U}) = \|\vec{u}\| \|\vec{U}\| \cos \theta$$

Rappels sur les changements de repère



Si (X, Y) sont les coordonnées du point M dans le repère (\vec{I}, \vec{J}) , que valent ses coordonnées dans le repère (\vec{i}, \vec{j}) ?

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= X\vec{I} + Y\vec{J} \\ &= X \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\end{aligned}$$



Même question si le repère (\vec{I}, \vec{J}) est, de plus, translaté d'un vecteur \vec{t}

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \vec{t} + X\vec{I} + Y\vec{J} \\ &= \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{R}_\theta \quad \mathbf{T}) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

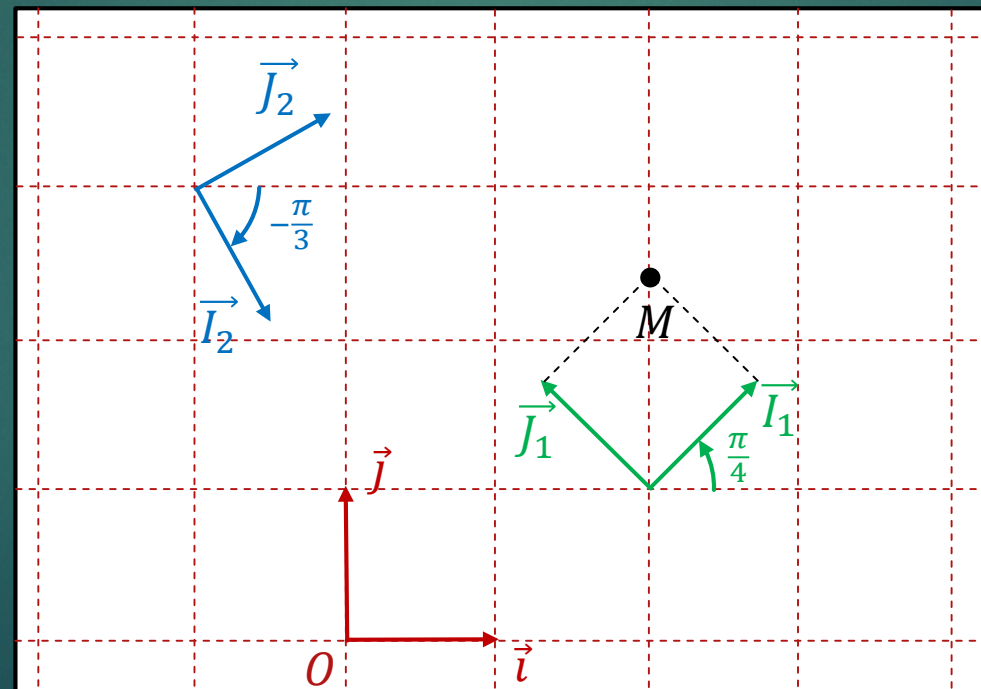
Transformation inverse :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OM} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= (\mathbf{R}_\theta^{-1} \quad -\mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{T}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

« Coordonnées homogènes »

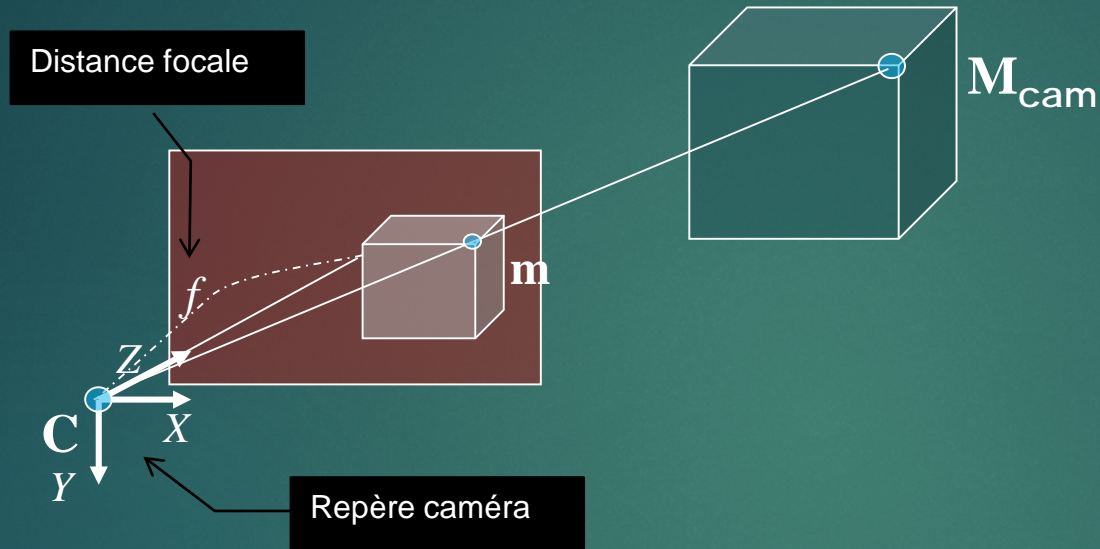
Rappels sur les changements de repère

- ▶ Exemple : Quelle sont les coordonnées du point M dans le repère (\vec{I}_2, \vec{J}_2) ?



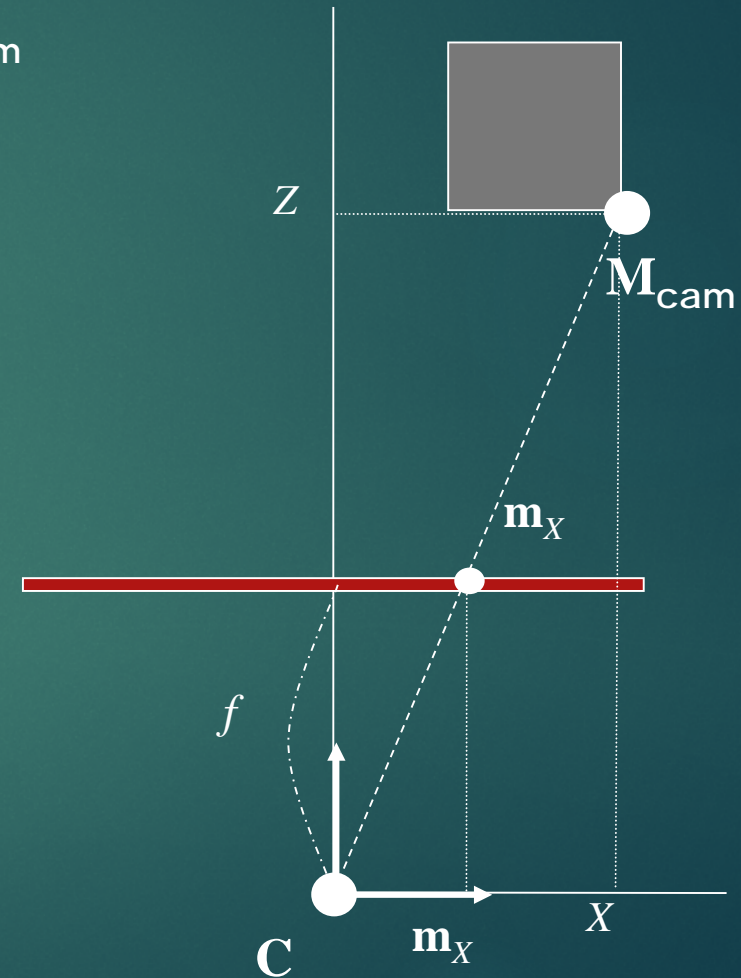
Projection dans le plan image

14



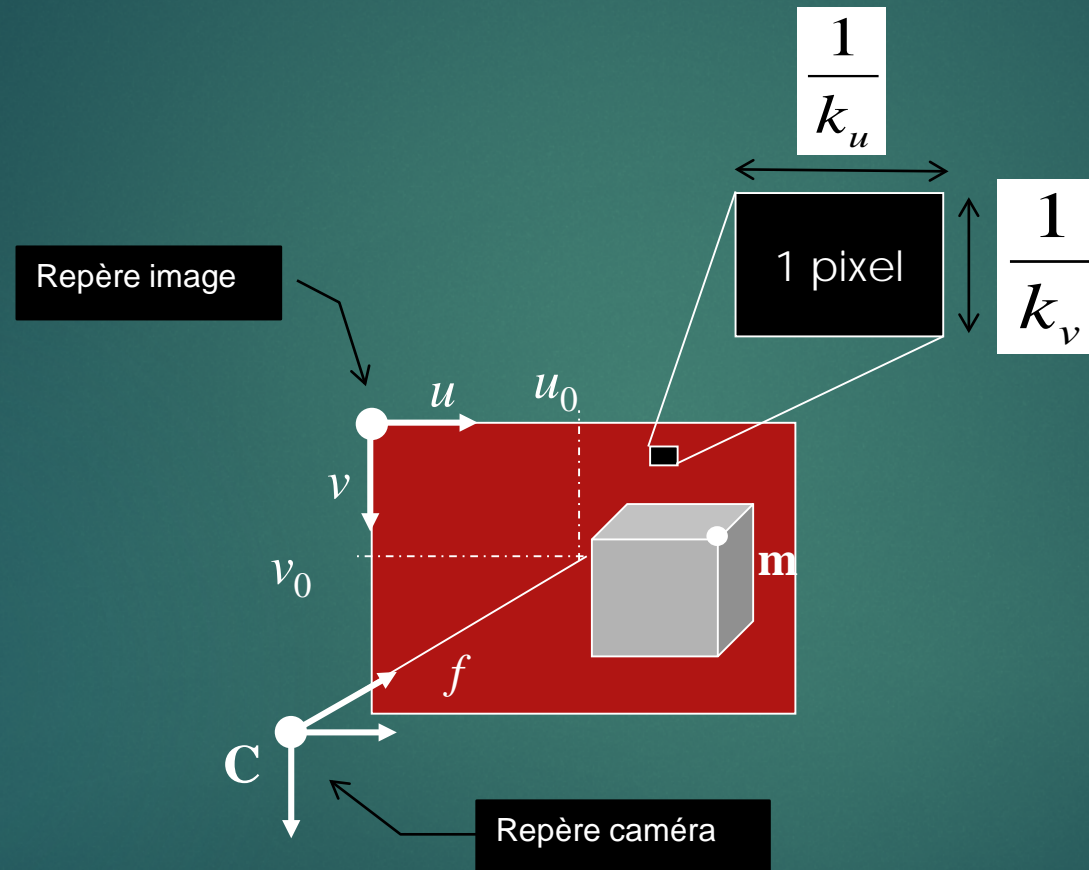
Calcul des coordonnées de m dans le plan image à partir des coordonnées de M_{cam} , exprimées dans le repère caméra (Thalès) :

$$\frac{m_x}{f} = \frac{X}{Z} \rightarrow m_x = f \frac{X}{Z}$$



Passage aux coordonnées pixels

15



$$\mathbf{m}_u = u_0 + k_u \mathbf{m}_X, \quad \mathbf{m}_v = v_0 + k_v \mathbf{m}_Y$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}_X &= f \frac{X}{Z}, & \mathbf{m}_Y &= f \frac{Y}{Z} \\ \mathbf{m}_u &= u_0 + k_u \mathbf{m}_X, & \mathbf{m}_v &= v_0 + k_v \mathbf{m}_Y \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{m}_u = u_0 + k_u f \frac{X}{Z} \\ \mathbf{m}_v = v_0 + k_v f \frac{Y}{Z} \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$\boxed{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ définit } \mathbf{m} \text{ en coordonnées homogènes} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{m}_u = \frac{u}{w} = u_0 + k_u f \frac{X}{Z} \\ \mathbf{m}_v = \frac{v}{w} = v_0 + k_v f \frac{Y}{Z} \end{cases}$$

La matrice de calibration interne

17

La matrice
$$\begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est appelée "matrice de calibration interne" ou "matrice de calibration intrinsèque" ou "matrice de calibration" ou "matrice des paramètres intrinsèques"

Elle est généralement notée \mathbf{K} et paramétrée par quatre valeurs α_u , α_v , u_0 , v_0 :

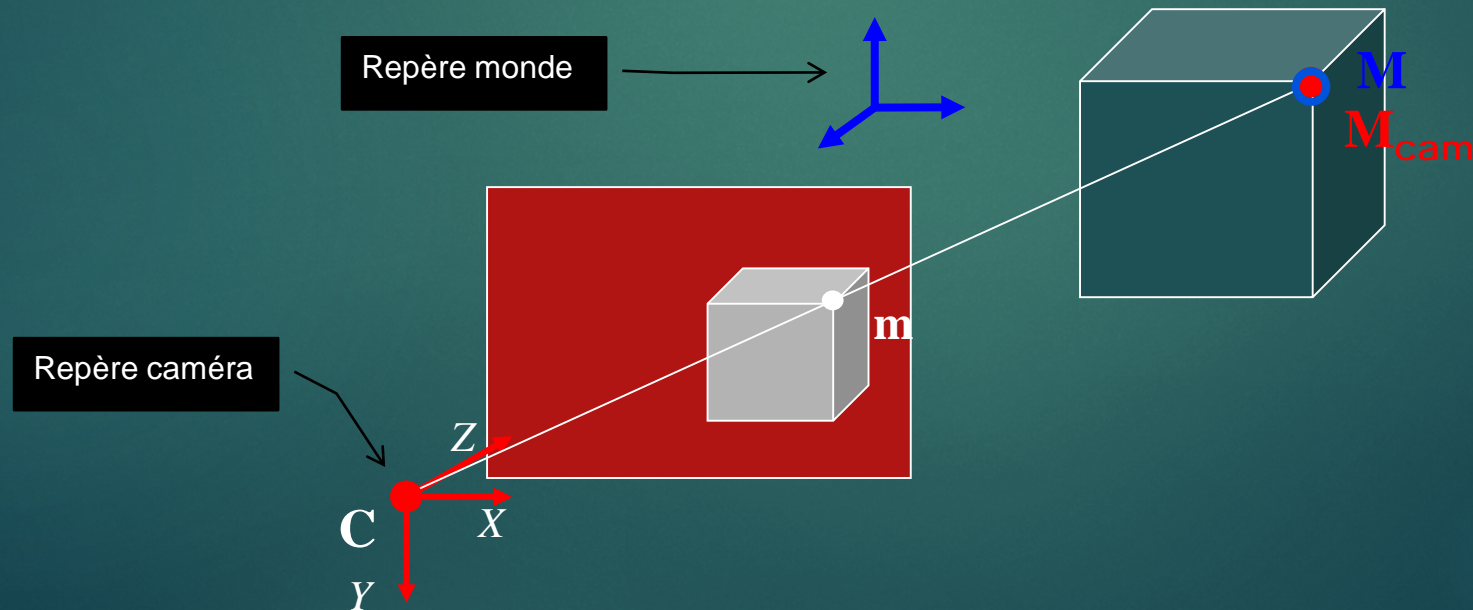
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le nombre de paramètres peut être réduit sous certaines hypothèses :

- (u_0, v_0) est parfois pris au centre de l'image
- $\alpha_u = \alpha_v$ suppose que les pixels sont carrés

Passage du repère monde au repère caméra

- ▶ La projection dans le plan image considère des coordonnées 3D *exprimées dans le repère caméra*
- ▶ Les coordonnées des points de la scène sont exprimées dans un repère arbitraire, appelé « repère monde »



Passage du repère monde au repère caméra

Il s'agit d'un changement de repère correspondant à une **transformation rigide** de \mathcal{R}^3 (rotation + translation) :

$$\mathbf{M}_{\text{cam}} = \mathbf{R}\mathbf{M} + \mathbf{T}$$

où :

\mathbf{R} est une matrice de rotation de taille 3x3 et

\mathbf{T} est un vecteur de taille 3

$$\mathbf{M}_{\text{cam}} = \mathbf{R}\mathbf{M} + \mathbf{T} \rightarrow \begin{pmatrix} X_{\text{cam}} \\ Y_{\text{cam}} \\ Z_{\text{cam}} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{T} \rightarrow \begin{pmatrix} X_{\text{cam}} \\ Y_{\text{cam}} \\ Z_{\text{cam}} \end{pmatrix} = (\mathbf{R} | \mathbf{T}) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{M}_{\text{cam}} = (\mathbf{R} | \mathbf{T}) \tilde{\mathbf{M}}$$

$\tilde{\mathbf{M}}$ (représente le point M en coordonnées homogènes)

$(\mathbf{R} | \mathbf{T})$ est une matrice 3x4

La matrice de calibration externe

La matrice

$$(\mathbf{R} | \mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}$$

est appelée "matrice de calibration externe" ou "matrice de calibration extrinsèque" ou "matrice des paramètres extrinsèques"

Elle peut être paramétrée par 6 valeurs : 3 pour la rotation (angles d'Euler, ...), 3 pour la translation

La matrice de projection

En composant la projection et le changement de repère on obtient :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

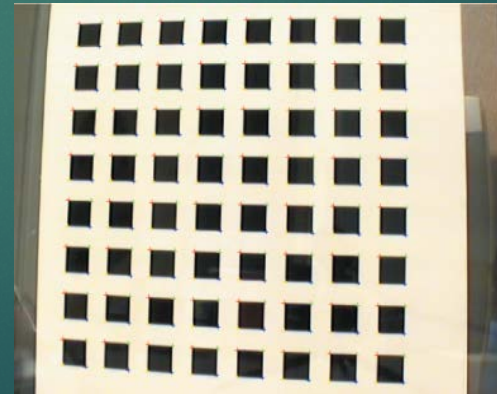
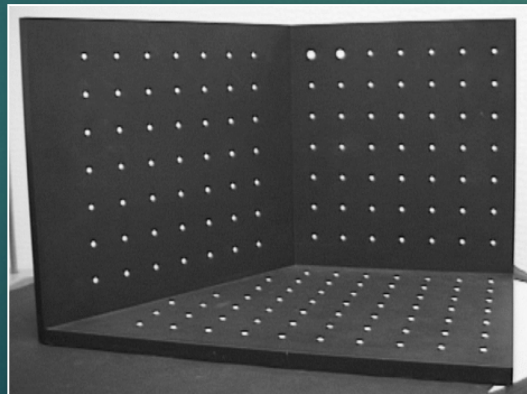
$\mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{R} | \mathbf{T})$ est appelée **matrice de projection**

Calibration de caméra

Calibration de la caméra

23

- ▶ La matrice de projection $P = K(R | T)$ comporte une partie intrinsèque (K) et une partie extrinsèque (R et T)
- ▶ Les paramètres intrinsèques de la caméra restent généralement fixes pour un dispositif de RA donné
- ▶ Ils sont calculés préalablement à l'utilisation du système de RA, au cours d'une phase dite de **calibration de la caméra**
- ▶ Utilisation d'une mire de calibration ou d'un damier imprimé



L'algorithme de calibration DLT

24

Chaque correspondance donne lieu à deux équations :

$$\tilde{\mathbf{m}}_i = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{M}}_i$$

$$\begin{cases} u_i = \frac{P_{11}X_i + P_{12}Y_i + P_{13}Z_i + P_{14}}{P_{31}X_i + P_{32}Y_i + P_{33}Z_i + P_{34}} \\ v_i = \frac{P_{21}X_i + P_{22}Y_i + P_{23}Z_i + P_{24}}{P_{31}X_i + P_{32}Y_i + P_{33}Z_i + P_{34}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{11}X_i + P_{12}Y_i + P_{13}Z_i + P_{14} - P_{31}X_i u_i - P_{32}Y_i u_i - P_{33}Z_i u_i - P_{34} u_i = 0 \\ P_{21}X_i + P_{22}Y_i + P_{23}Z_i + P_{24} - P_{31}X_i v_i - P_{32}Y_i v_i - P_{33}Z_i v_i - P_{34} v_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_i u_i & -Y_i u_i & -Z_i u_i & -u_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & Z_i & 1 & -X_i v_i & -Y_i v_i & -Z_i v_i & -v_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \\ \dots \\ P_{34} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

- ▶ 11 coefficients à estimer
- ▶ Chaque correspondance 3D-2D donne 2 equations
→ **6 correspondances** doivent être connues
- ▶ En pratique, un plus grand nombre de correspondances sont utilisées

L'algorithme de calibration DLT

25

► Extraction de la matrice \mathbf{K}

On considère la matrice \mathbf{P}_3 constituée des 3 premières colonnes de \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_3 \mid \mathbf{c}_4)$$
$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{K}\mathbf{R}$$

On calcule

$$\mathbf{P}_3\mathbf{P}_3^T = (\mathbf{K}\mathbf{R})(\mathbf{K}\mathbf{R})^T = \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{K}^T = \mathbf{K}\mathbf{K}^T$$

\mathbf{K} étant une matrice triangulaire (supérieure), elle peut être calculée en utilisant la méthode de factorization de Cholesky

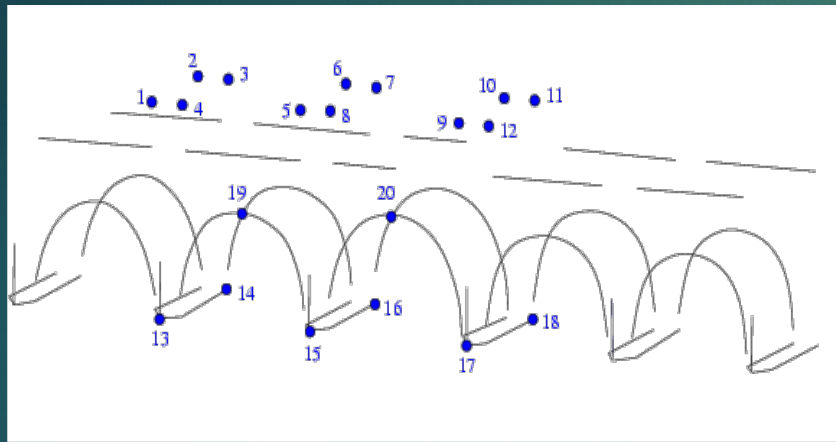
La matrice $\omega = (\mathbf{K}\mathbf{K}^T)^{-1}$ est appelée **image de la conique absolue**

Problème PnP

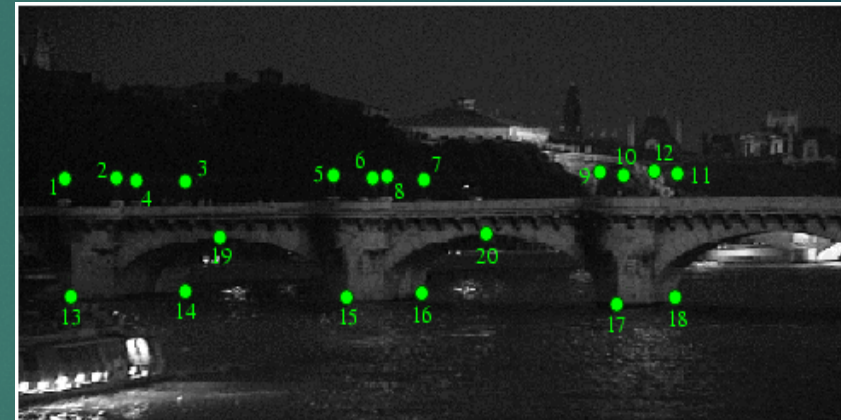
Le problème PnP

27

- ▶ PnP (Perspective-n-Points) : estimation de l'orientation \mathbf{R} et de la position \mathbf{T} du repère monde par rapport au repère caméra, à partir de n correspondances de points 3D/2D



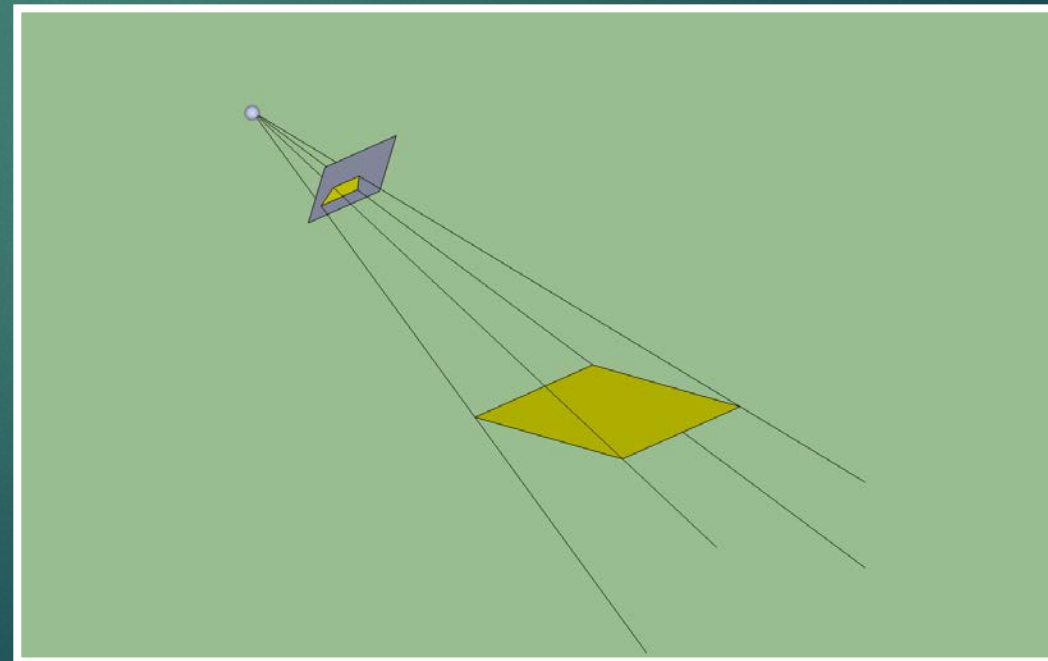
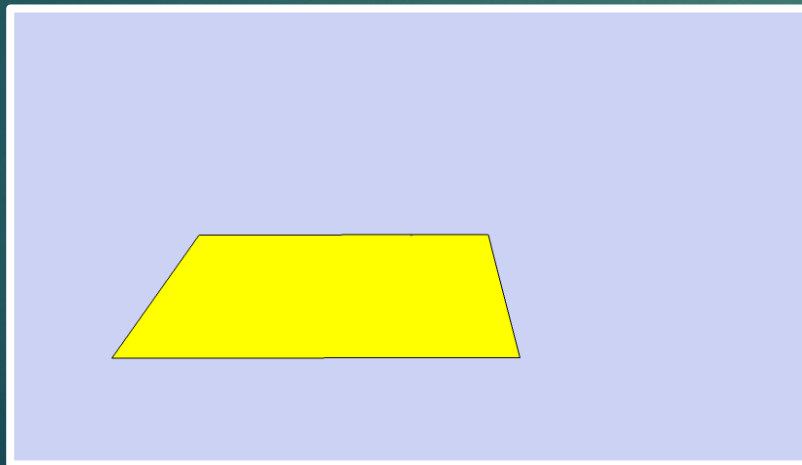
↔
Correspondances
3D/2D



Le problème PnP

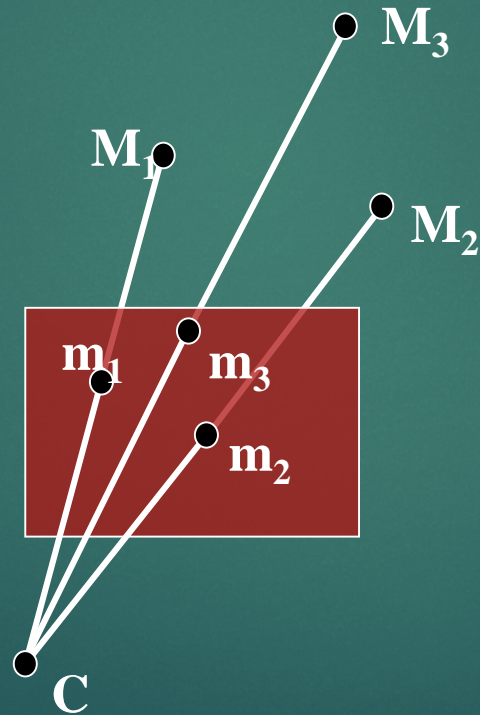
28

- ▶ Les points du modèle correspondant aux points de l'image doivent se trouver sur les "rayons inverses" de l'image
- ▶ Un seul point de vue (orientation + position) est possible lorsque **4 correspondances** de points sont connues



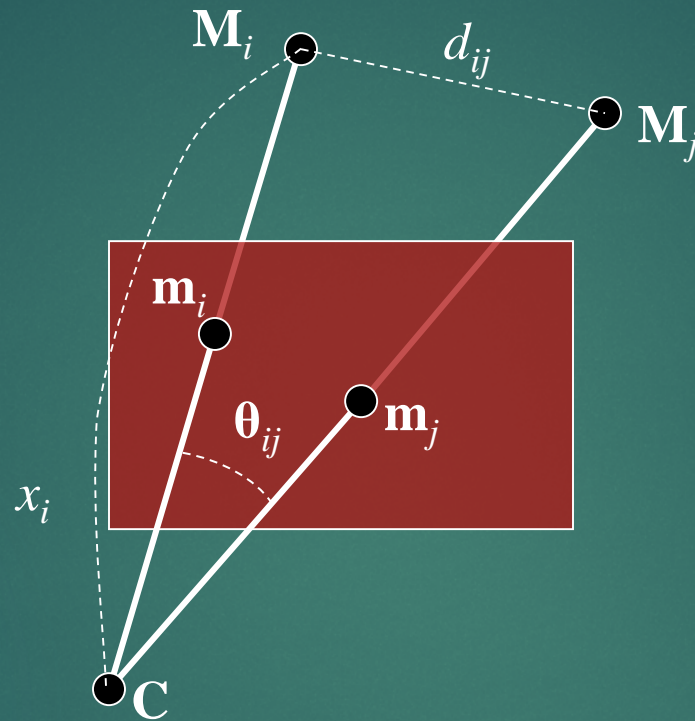
La méthode P3P

- ▶ P3P : suffisant en théorie mais 4 solutions → ajout de contrainte nécessaire



La méthode P3P

30



Chaque paire de correspondances $M_i \leftrightarrow m_i$ et $M_j \leftrightarrow m_j$ donne une contrainte sur les distances (inconnues) $x_i = ||M_i - C||$ et $x_j = ||M_j - C||$:

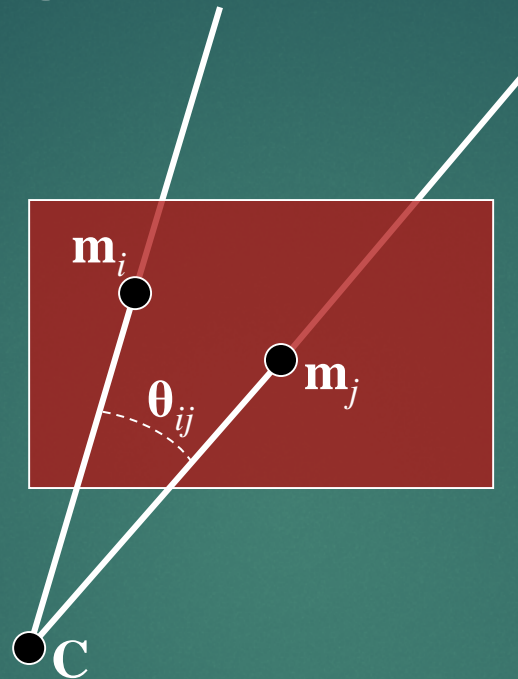
$$d_{ij}^2 = x_i^2 + x_j^2 - 2 x_i x_j \cos \theta_{ij}$$

$d_{ij} = ||M_i - M_j||$ est la distance (connue) entre M_i et M_j

θ_{ij} est l'angle (connu) entre (CM_i) et (CM_j)

La méthode P3P

31



$\cos\theta_{ij}$ depend uniquement des positions 2D (connues) \mathbf{m}_i et \mathbf{m}_j .

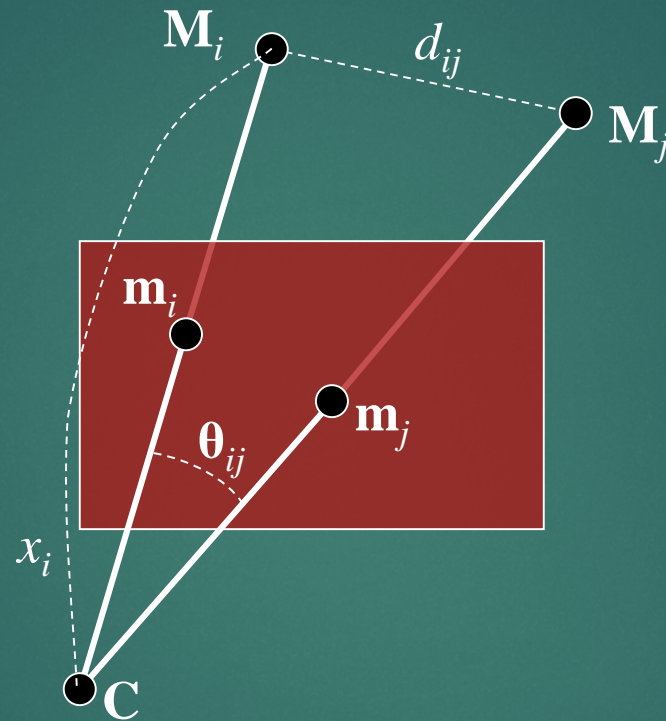
$$\cos\theta_{ij} = \frac{(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j})^T (\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i})}{\|\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j}\| \|\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i}\|} = \frac{(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j})^T (\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i})}{\sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j})^T (\overrightarrow{\mathbf{Cm}_j})} \sqrt{(\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i})^T (\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i})}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{Cm}_i} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{m}_i$$

$$\cos\theta_{ij} = \frac{\mathbf{m}_j^T \omega \mathbf{m}_i}{(\mathbf{m}_j^T \omega \mathbf{m}_j)^{1/2} (\mathbf{m}_i^T \omega \mathbf{m}_i)^{1/2}} \text{ avec } \omega = (\mathbf{K}\mathbf{K}^T)^{-1} \text{ l'image de la conique absolue}$$

La méthode P3P

32



Algorithme :

1. Résoudre les distances x_i
2. Calculer les positions M_i^C des points M_i dans le repère camera
3. Calculer \mathbf{R} et \mathbf{T} comme la transformation rigide entre les M_i et les M_i^C

Méthodes PnP

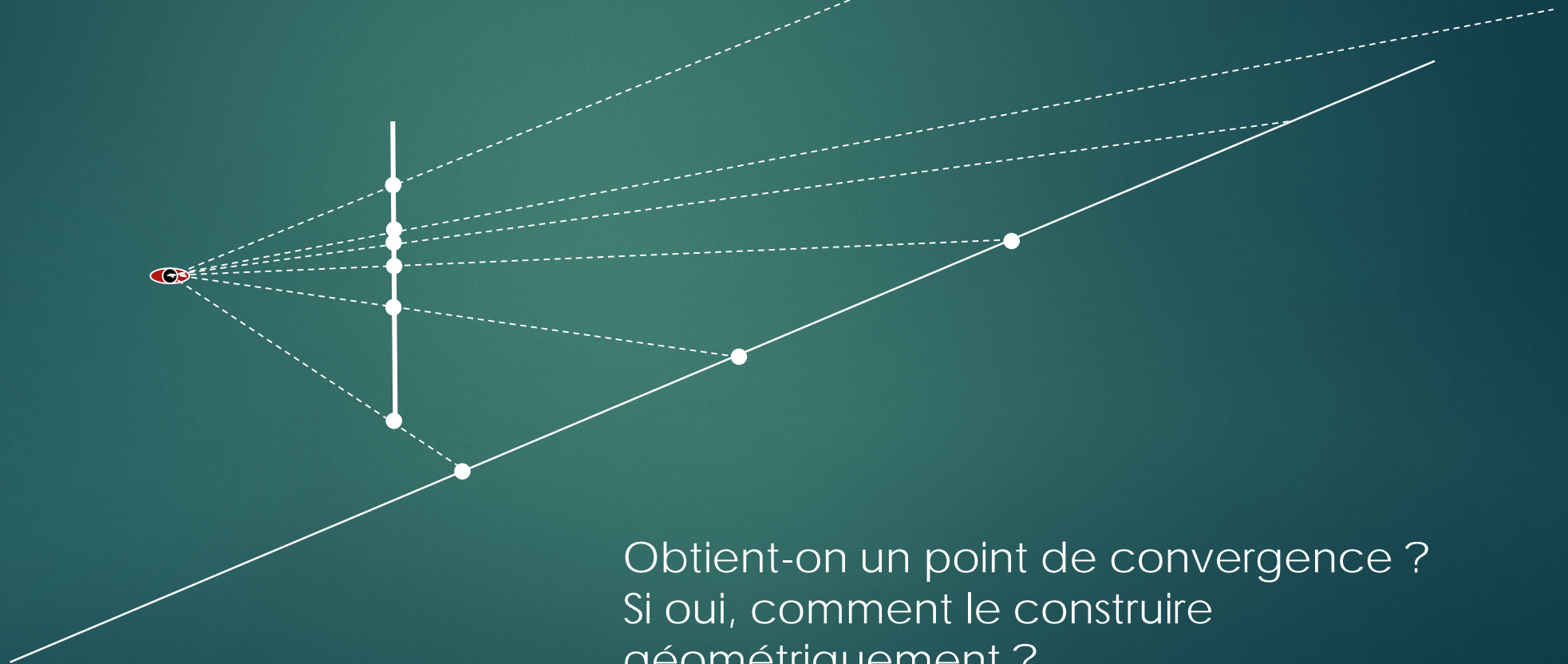
- ▶ RANSAC P3P ou autres méthodes directes
- ▶ Affinement utilisant une optimisation non linéaire (Gauss-Newton, Levenberg Marquardt, ...) tenant compte de tous les appariements disponibles :

$$\min_{\mathbf{R}, \mathbf{T}} \sum_i \|\mathbf{K}[\mathbf{R} \mid \mathbf{T}]\mathbf{M}_i - \mathbf{m}_i\|^2$$

Points de fuite d'une image

Projection de droites parallèles

35

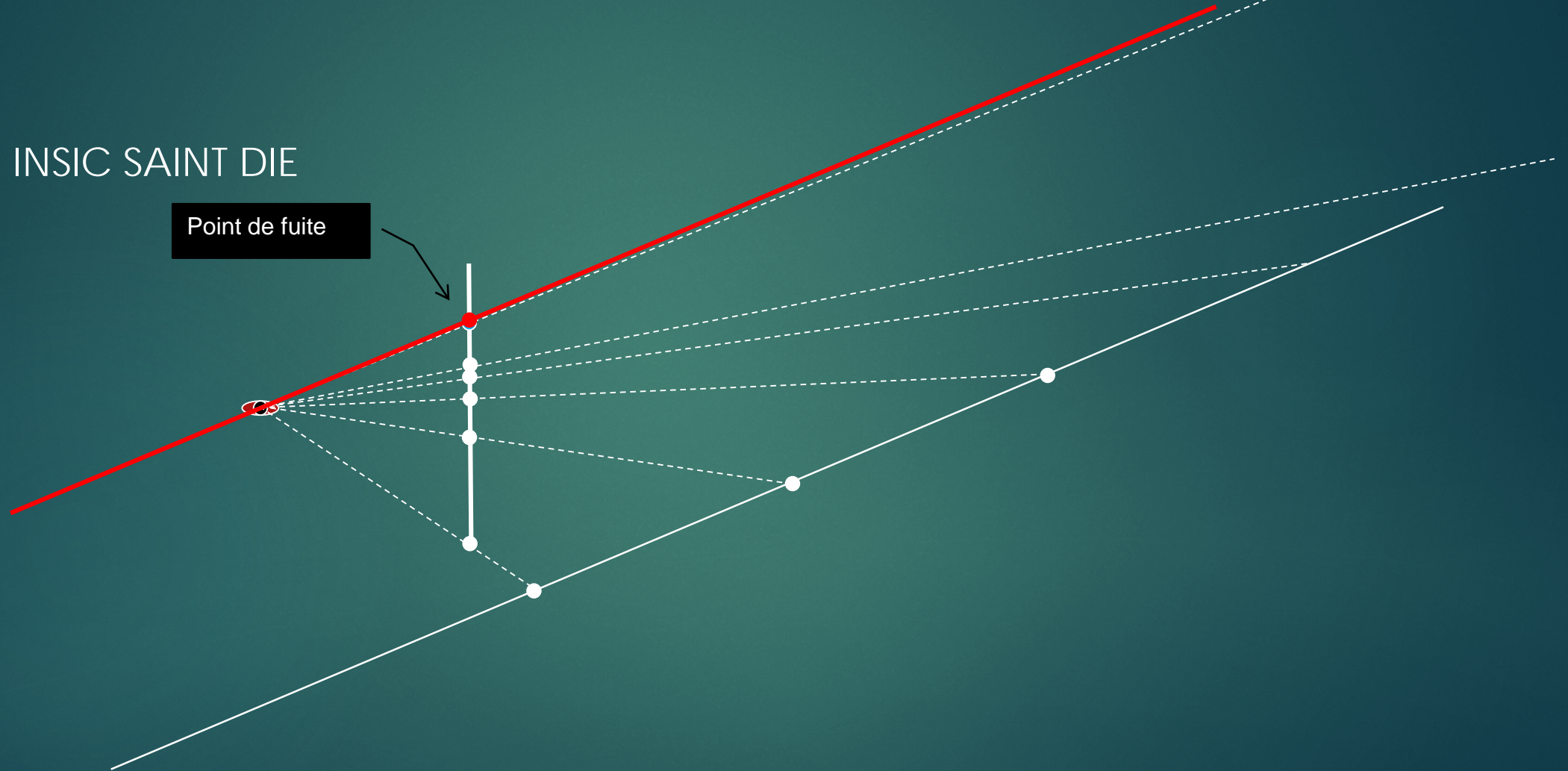


Obtient-on un point de convergence ?
Si oui, comment le construire
géométriquement ?

Projection de droites parallèles

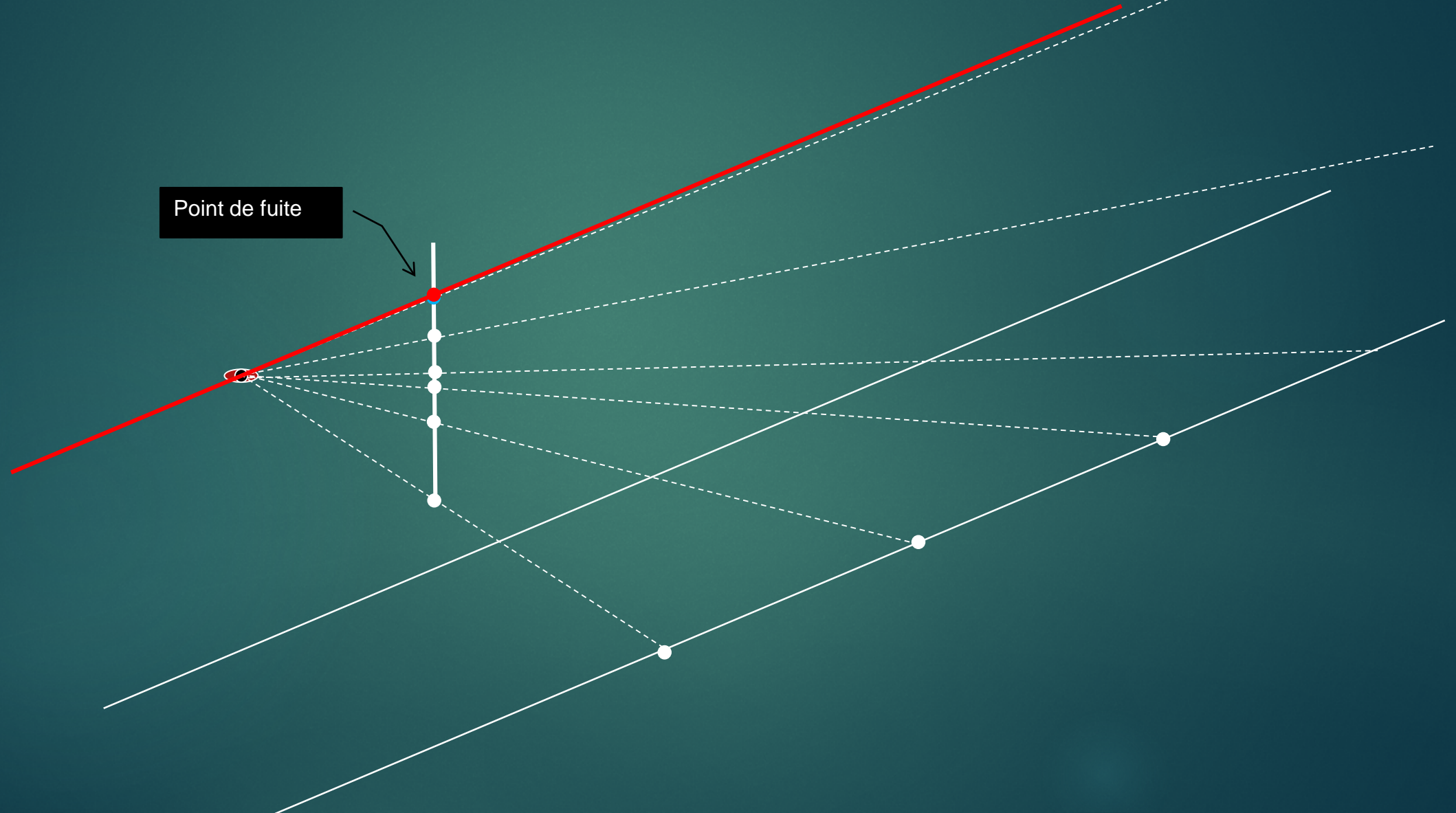
36

► INSIC SAINT DIE



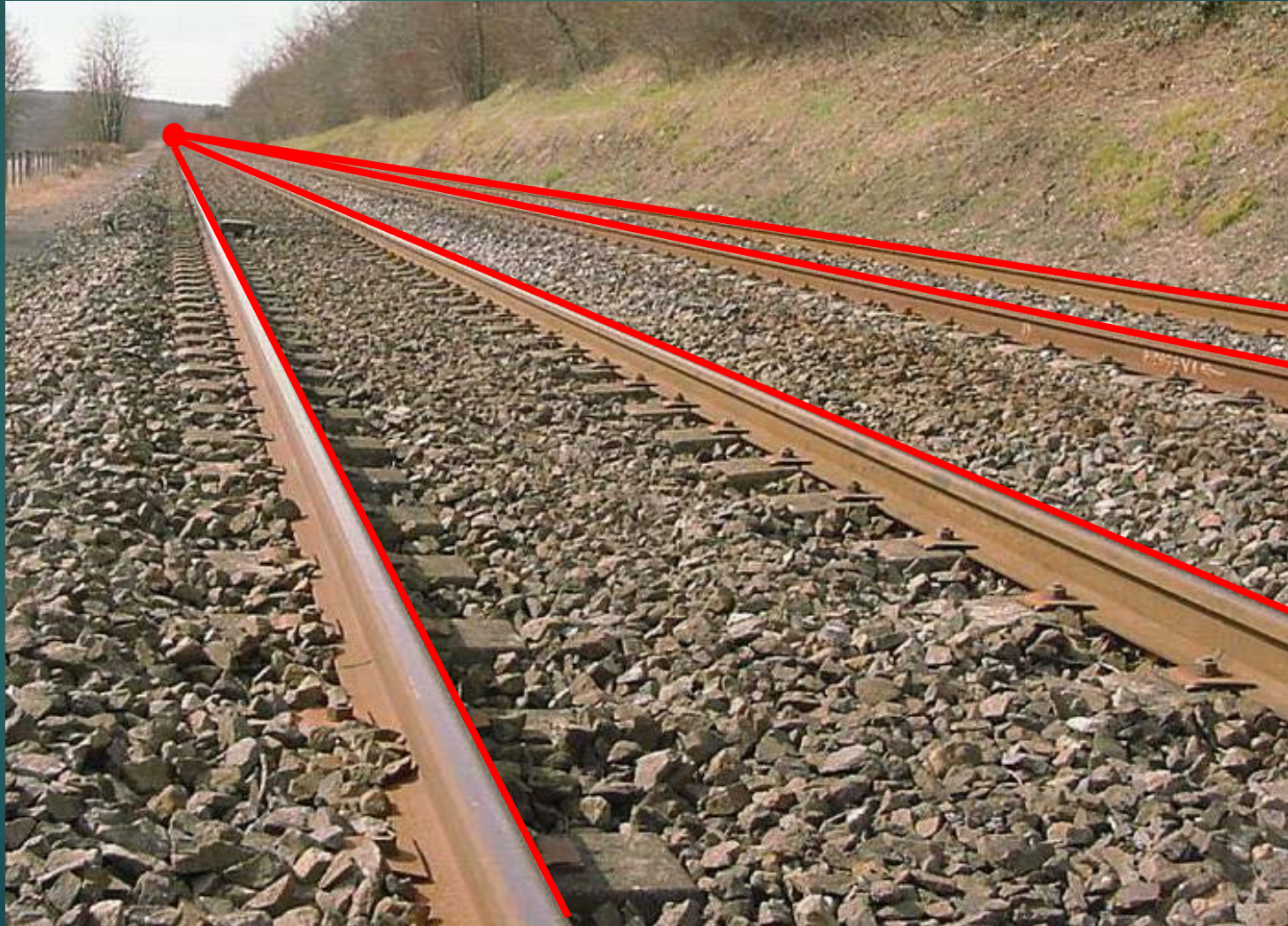
Projection de droites parallèles

37

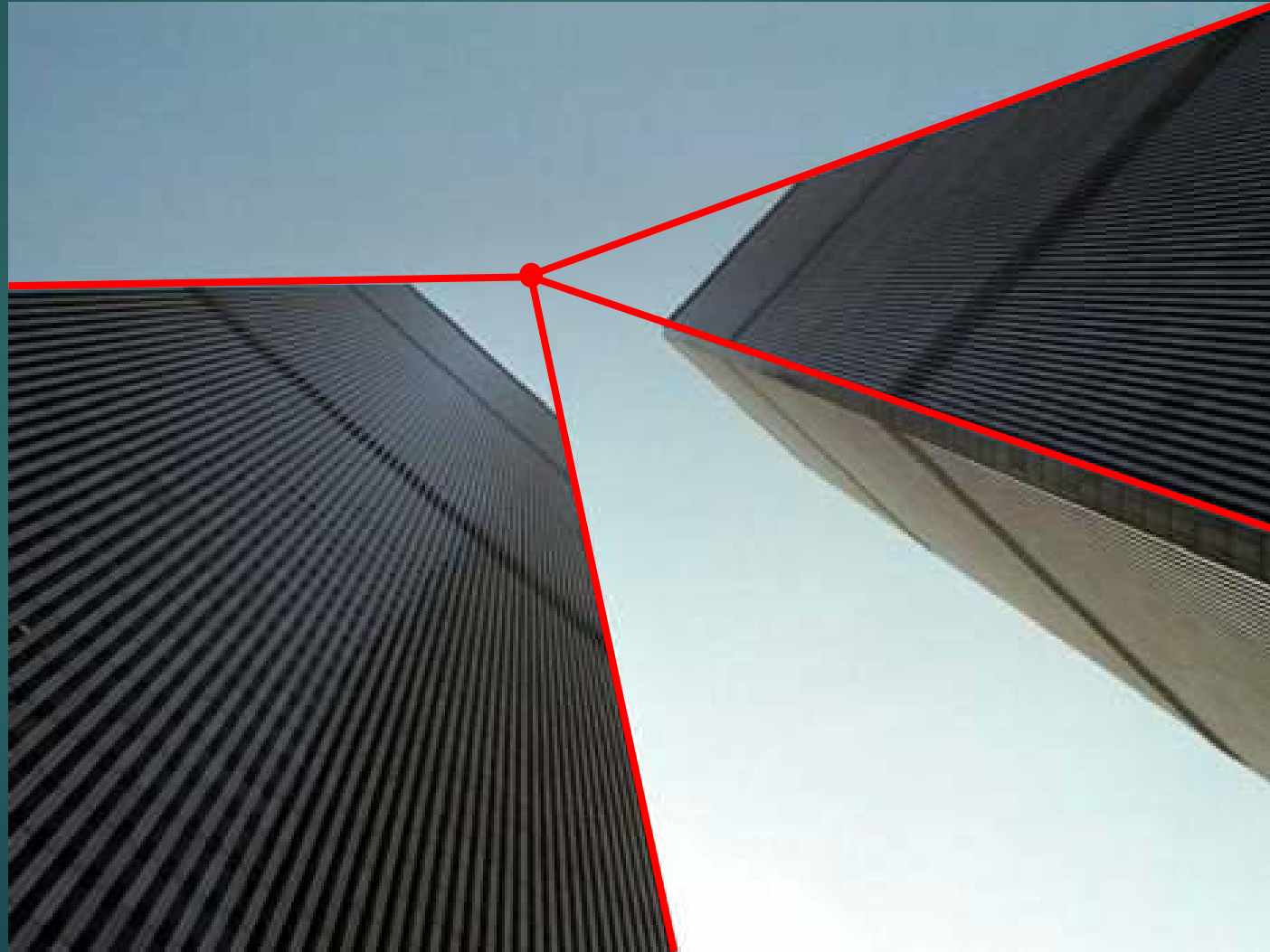


Exemple 1

38



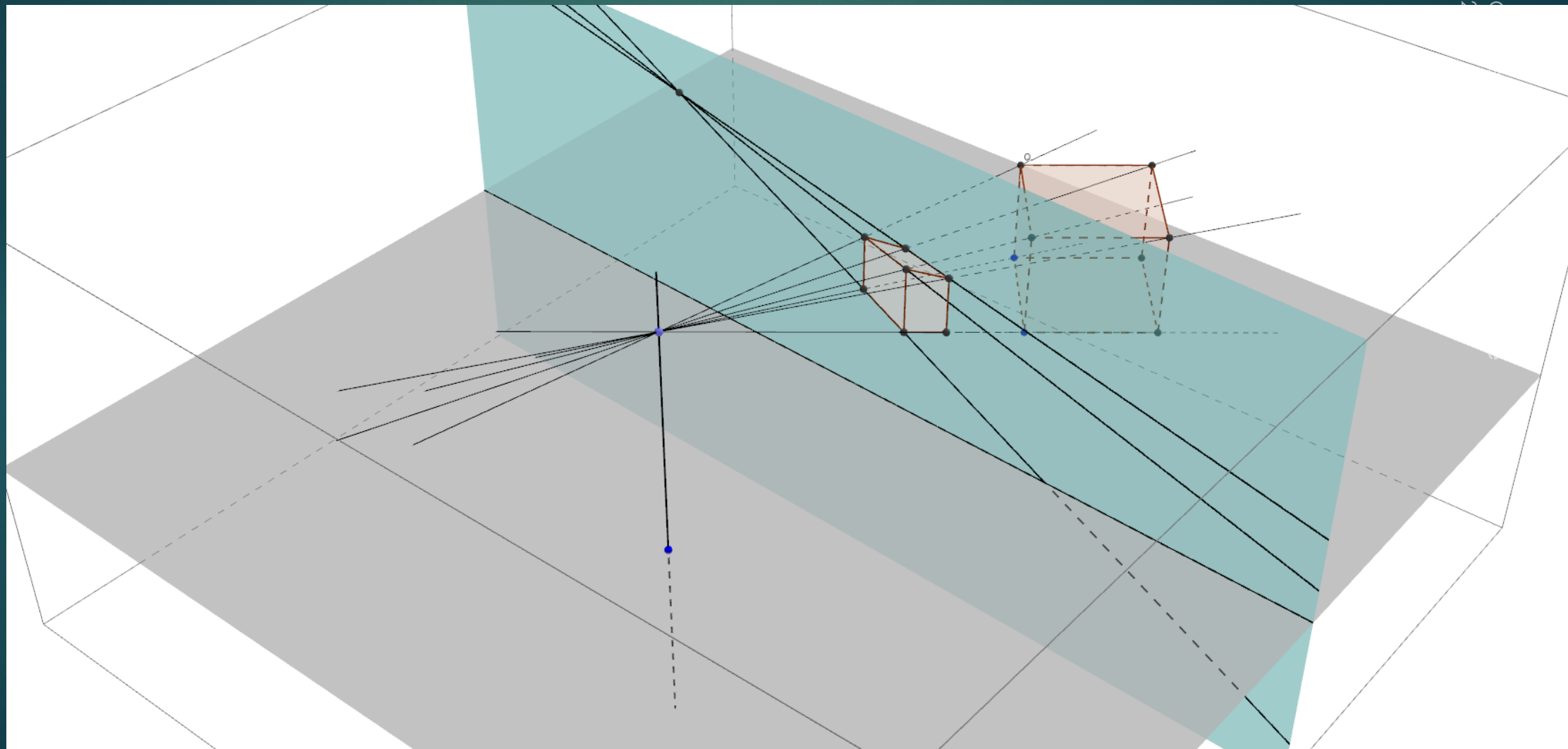
Exemple 2



Des points de fuite au point de vue

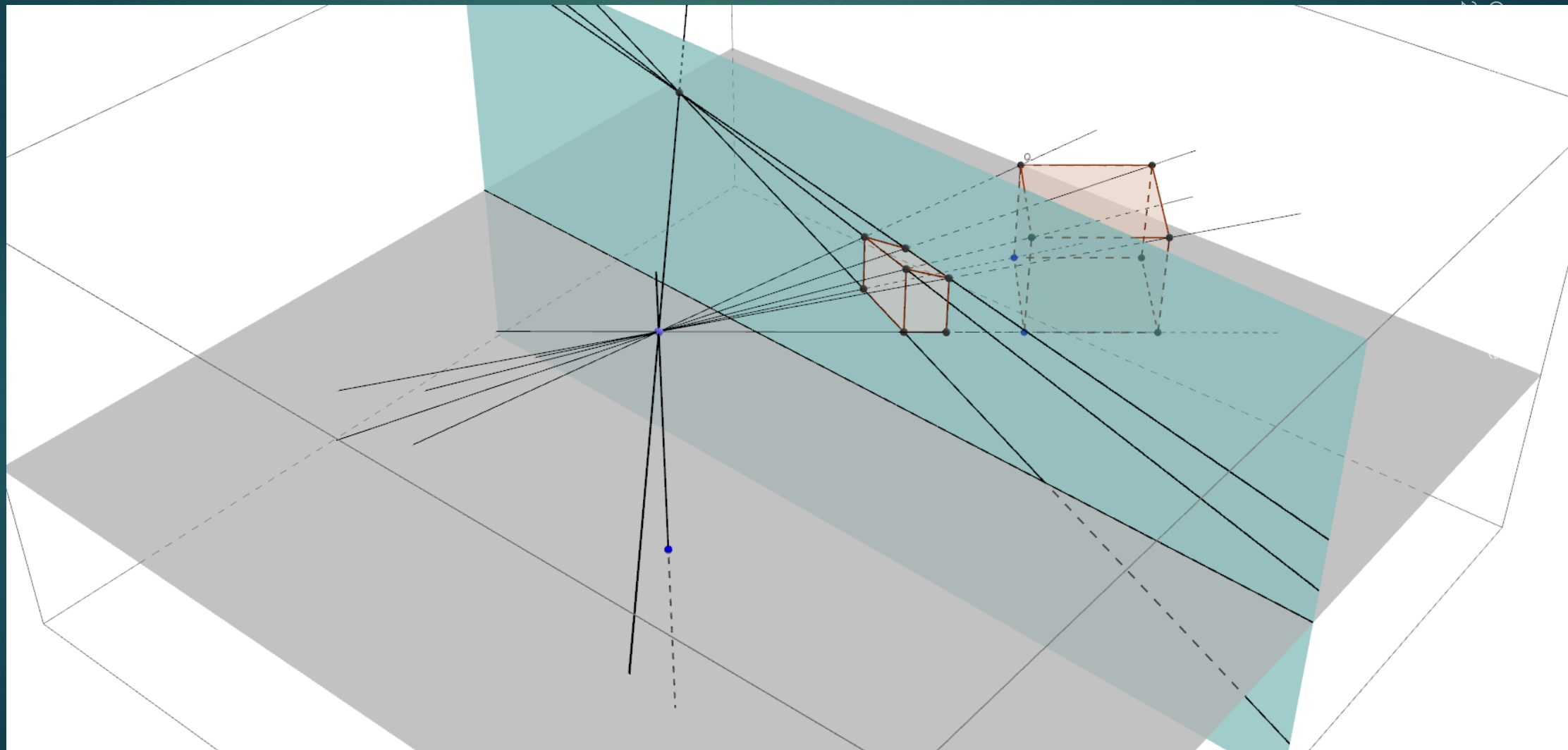
Propriété des points de fuite

41



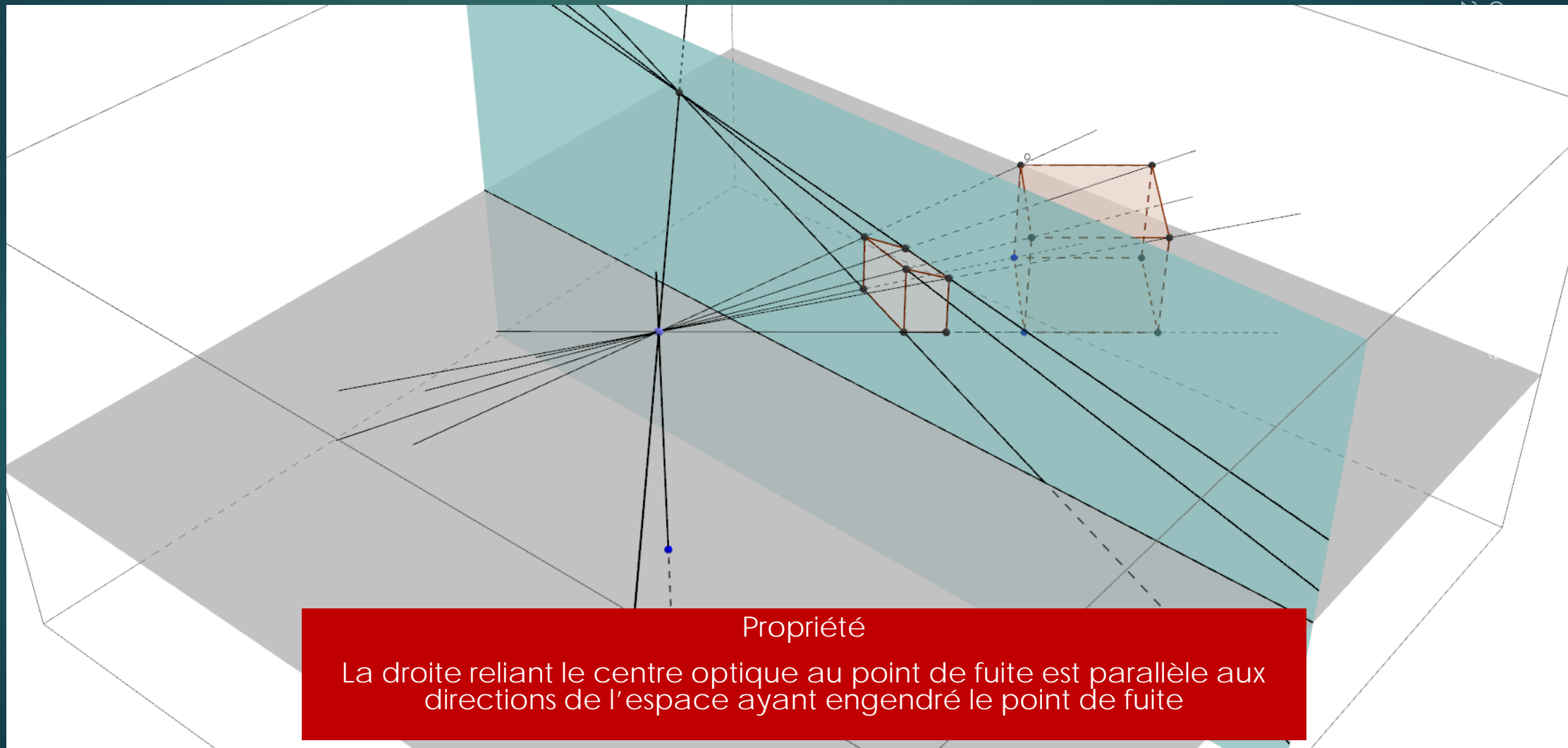
Propriété des points de fuite

42



Propriété des points de fuite

43

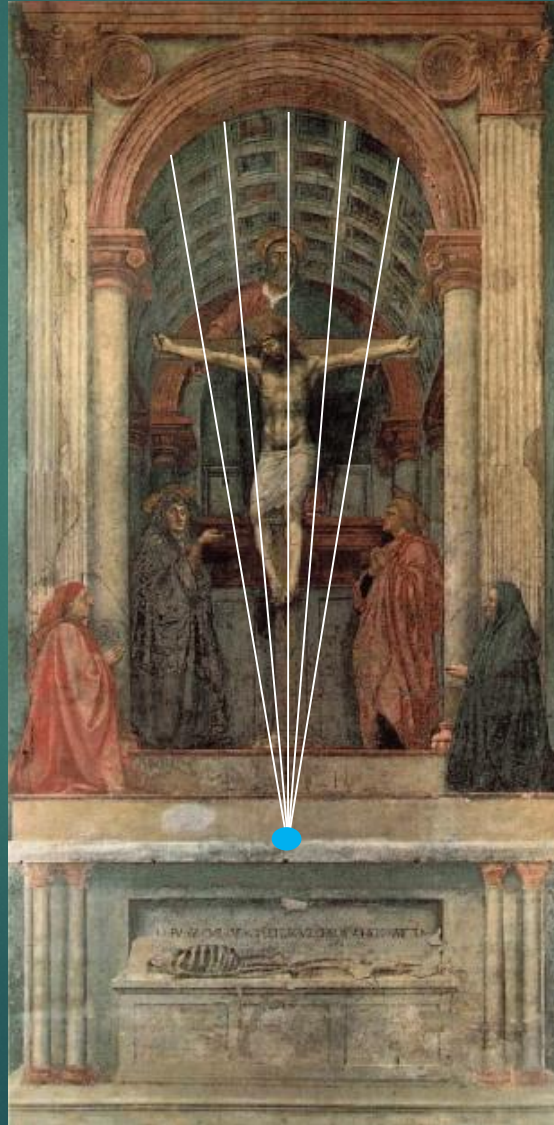


Propriété

La droite reliant le centre optique au point de fuite est parallèle aux directions de l'espace ayant engendré le point de fuite

Propriété des points de fuite

46



Masaccio, La Trinité, 1427

Propriété des points de fuite

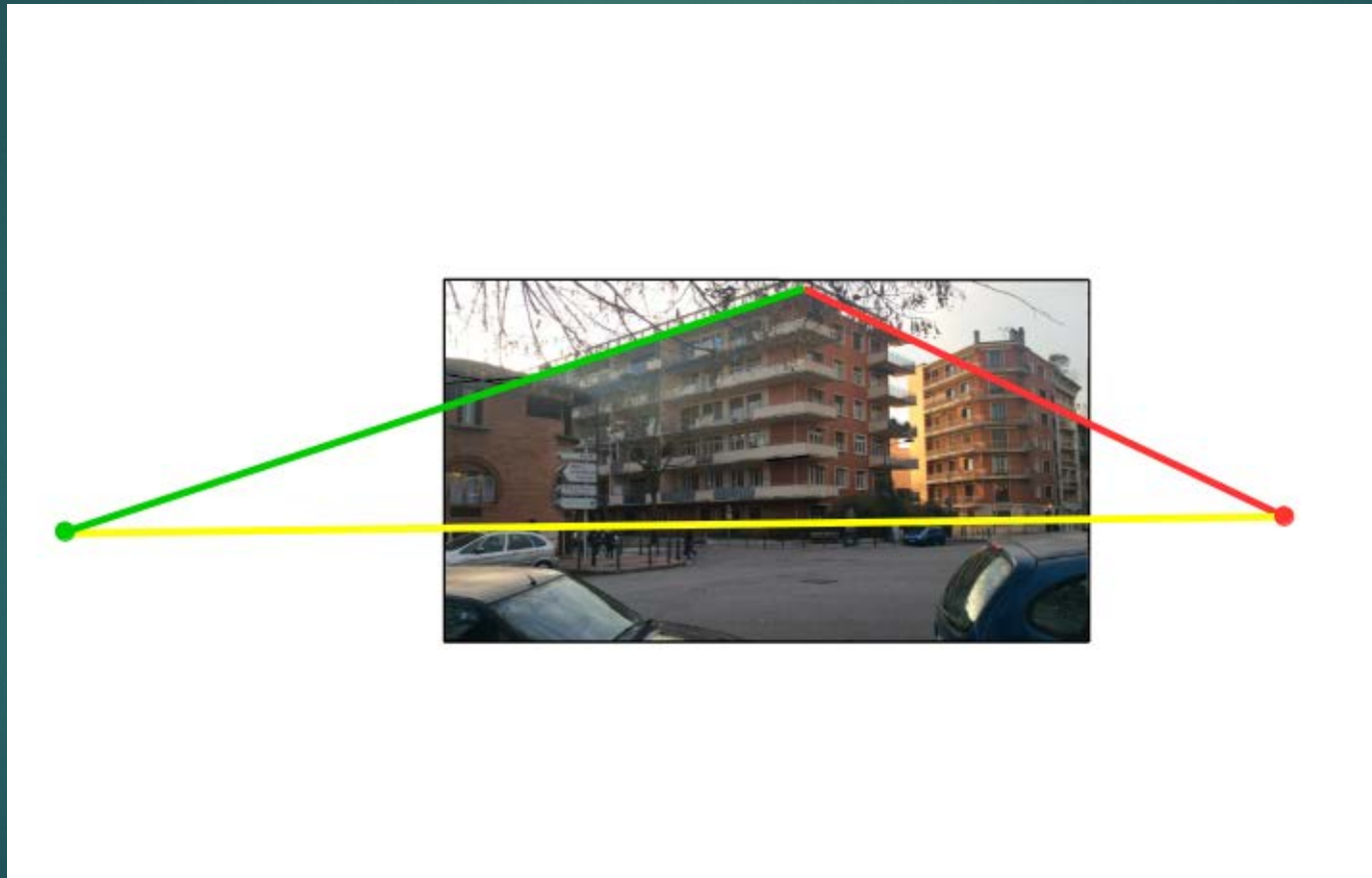
47



Est-ce un hasard ?
Que peut-on en déduire ?

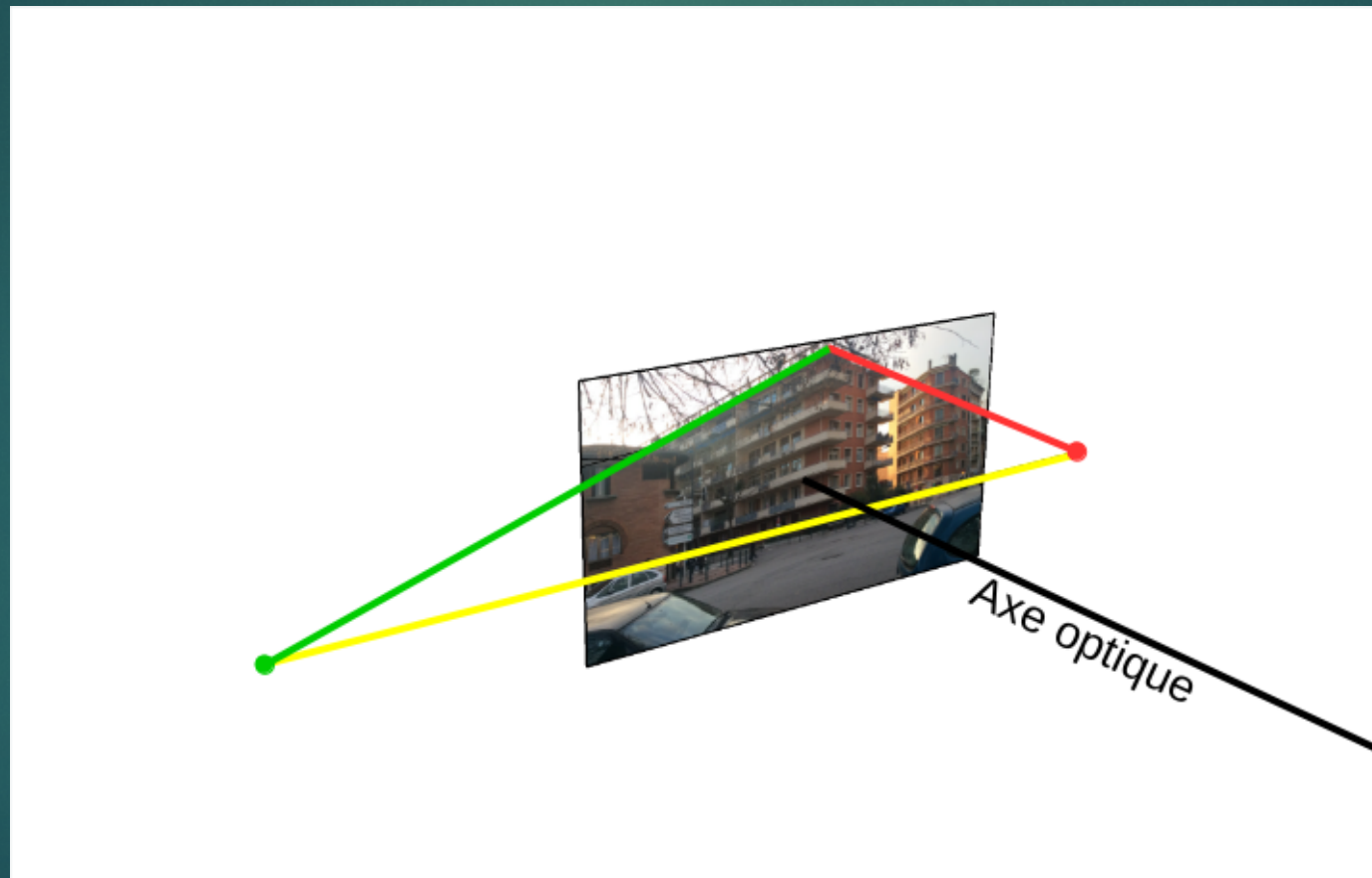
Des points de fuite au point de vue

48



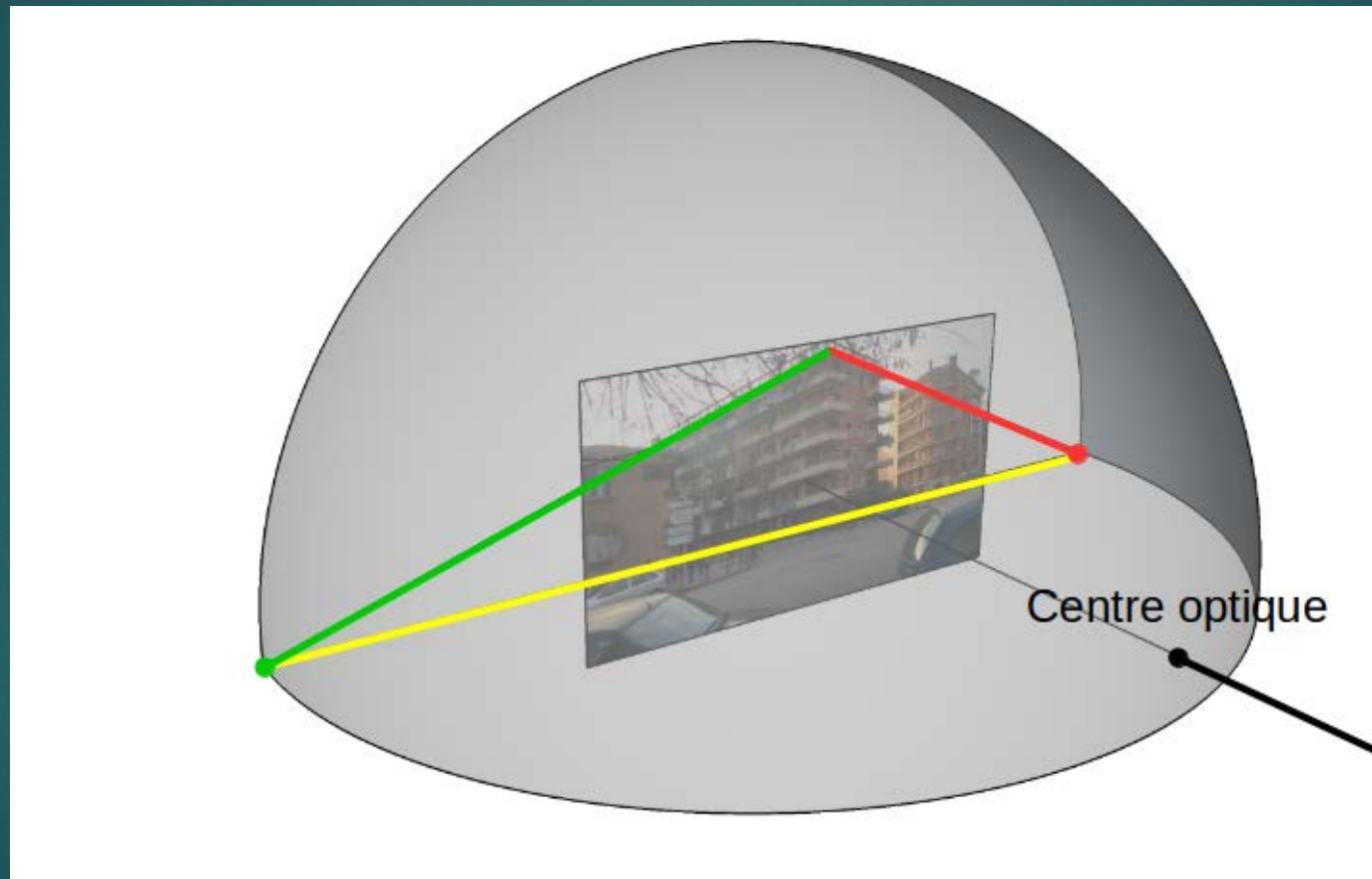
Des points de fuite au point de vue

49



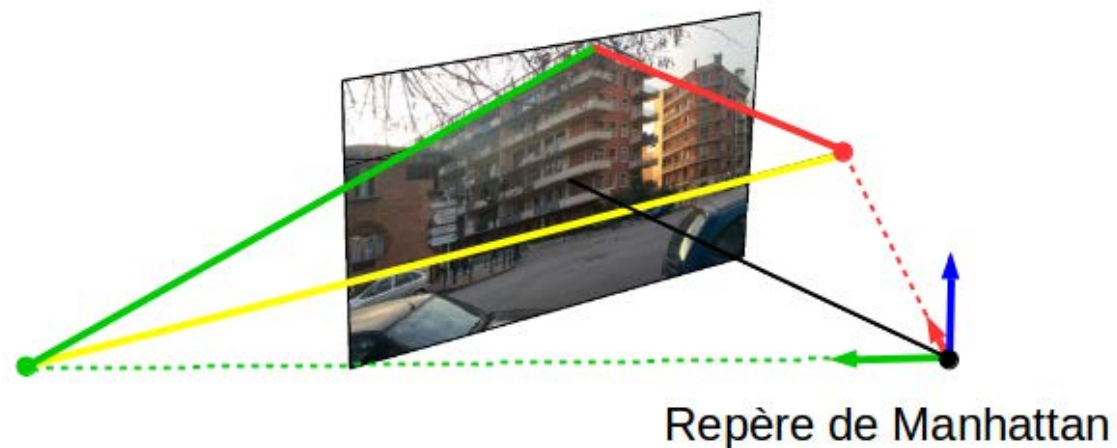
Des points de fuite au point de vue

50



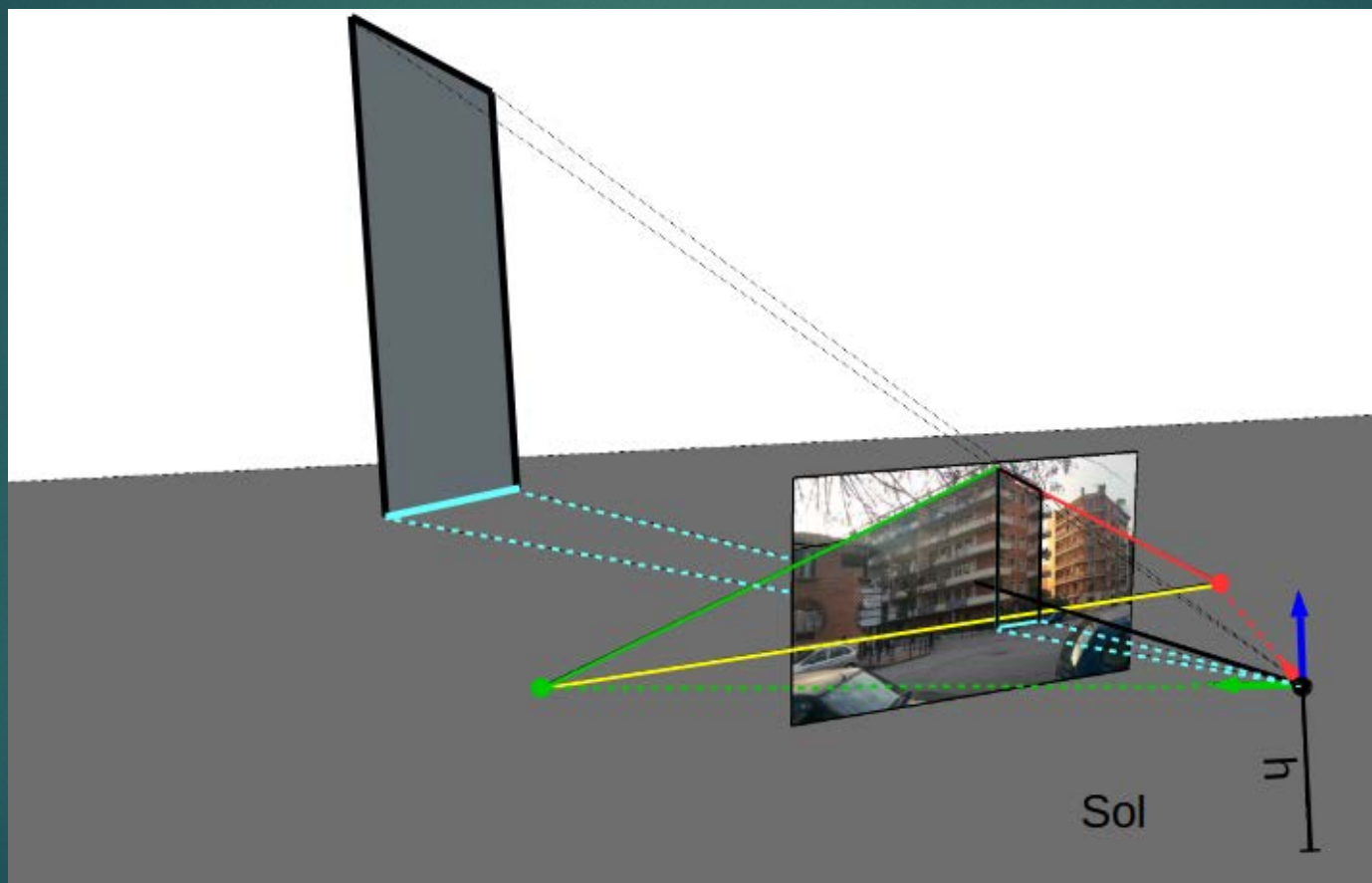
Des points de fuite au point de vue

51



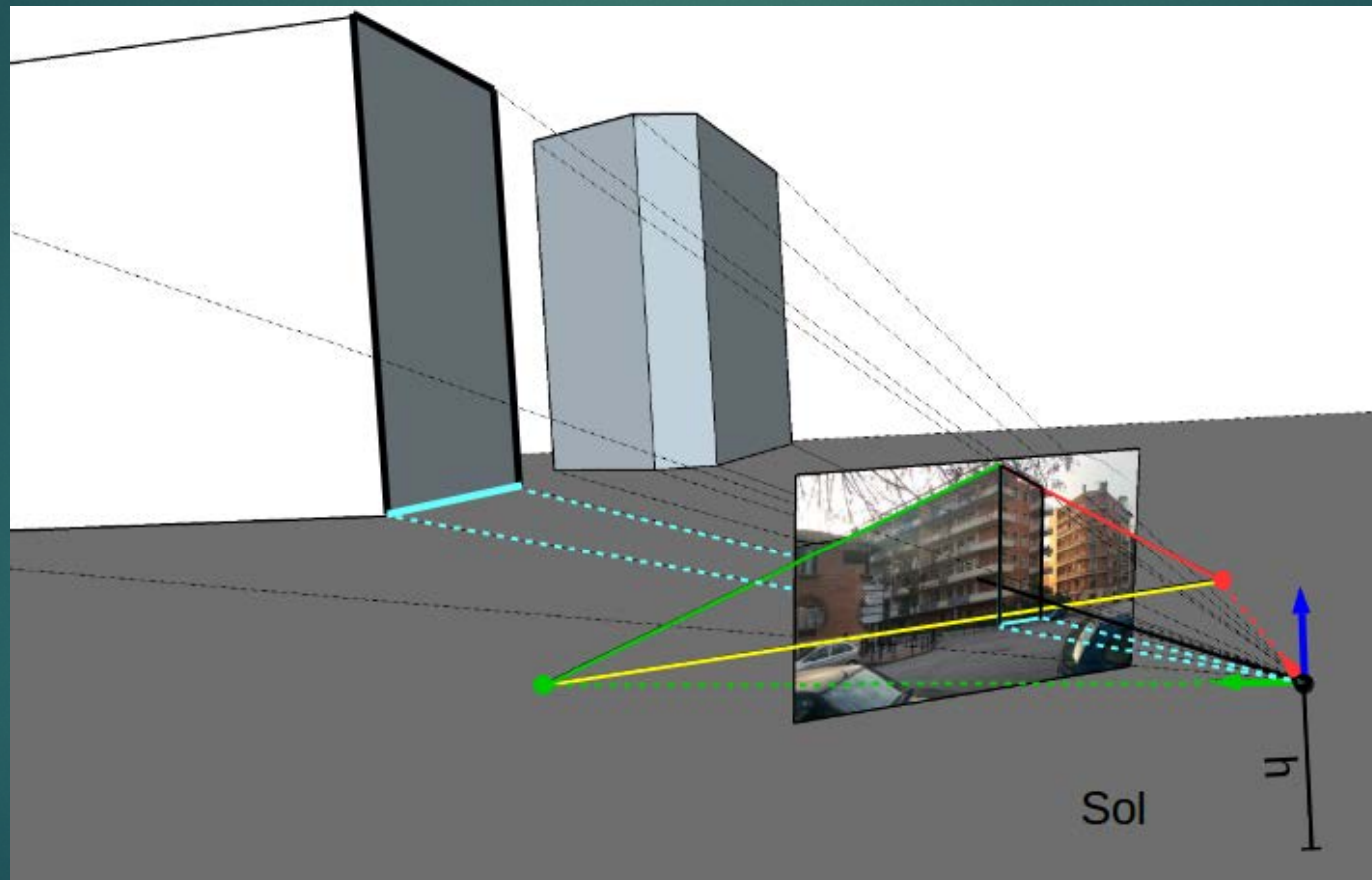
Des points de fuite au point de vue

52



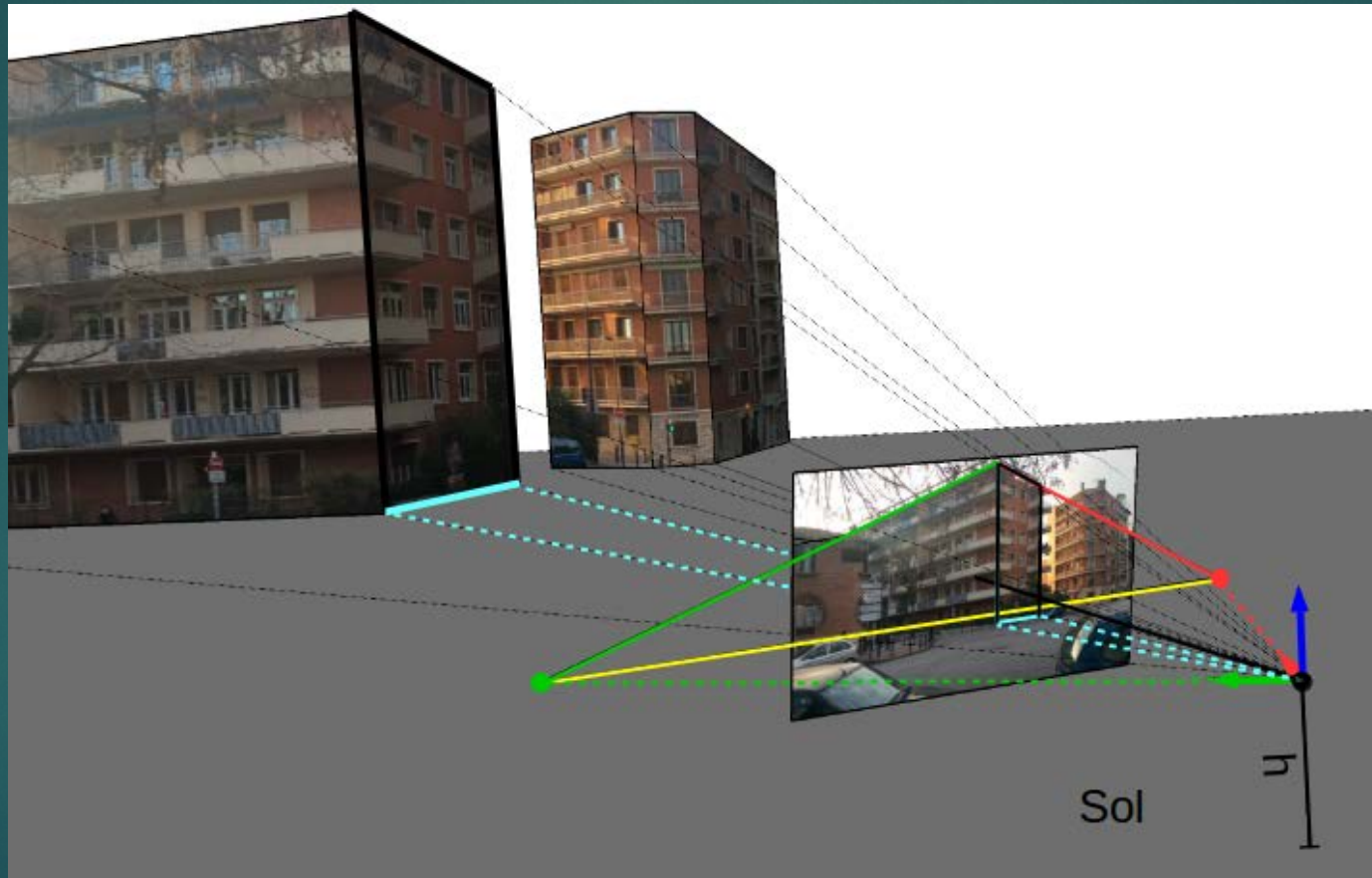
Des points de fuite au point de vue

53



Des points de fuite au point de vue

54



Exemple : photomatch (Sketchup)

55



Exemple : photomatch (Sketchup)

56



Exemple : photomatch (Sketchup)

57



Exemple : photomatch (Sketchup)

58

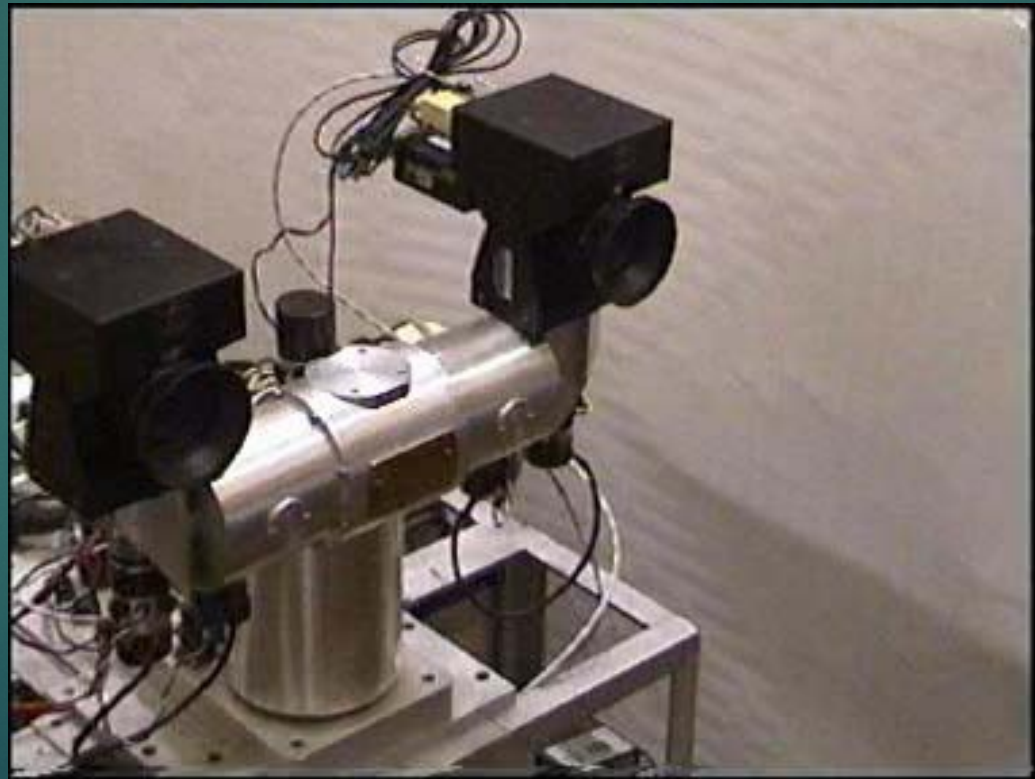


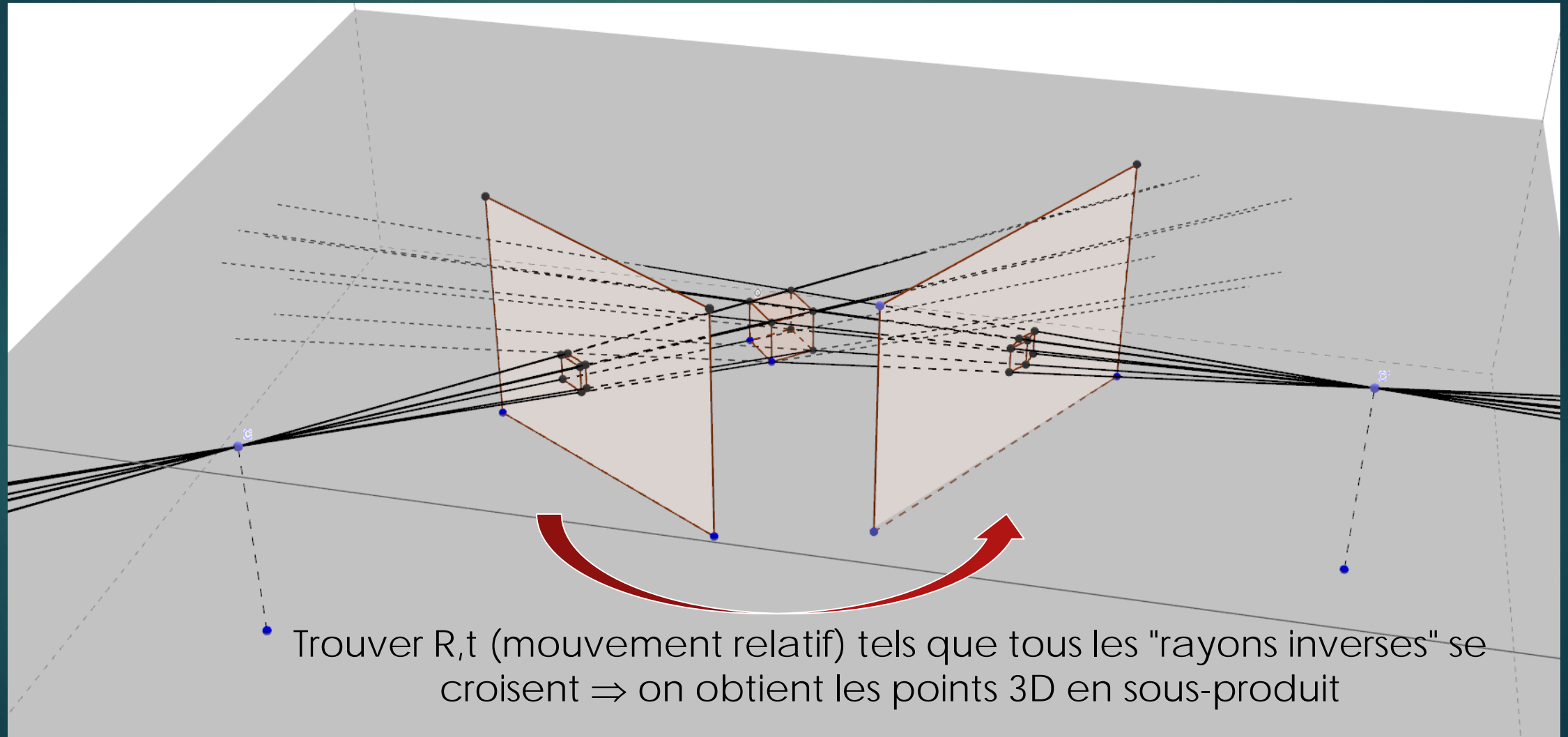
Stéréovision

Stéréovision

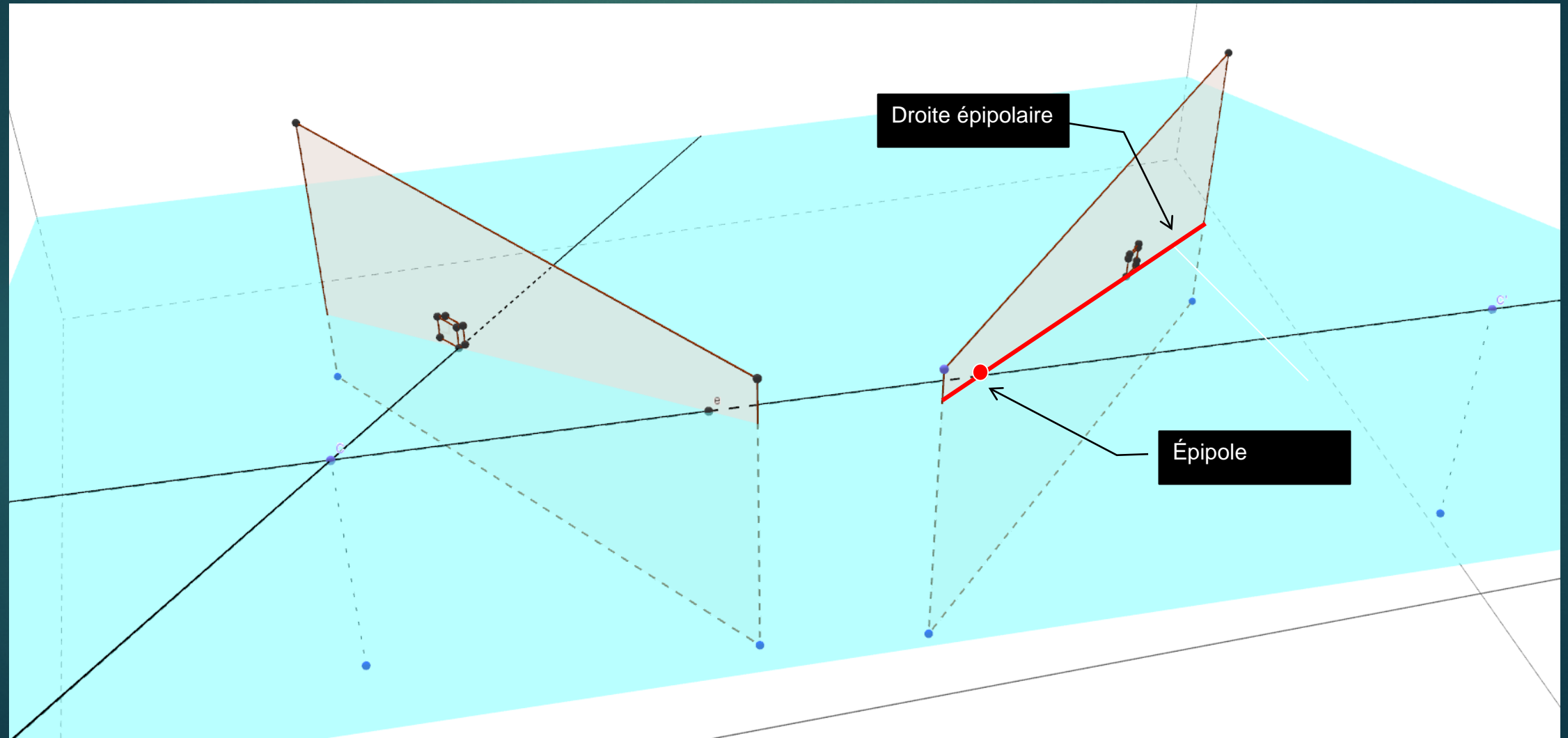
60

- ▶ Deux caméras calibrées observent la scène en même temps





La contrainte épipolaire



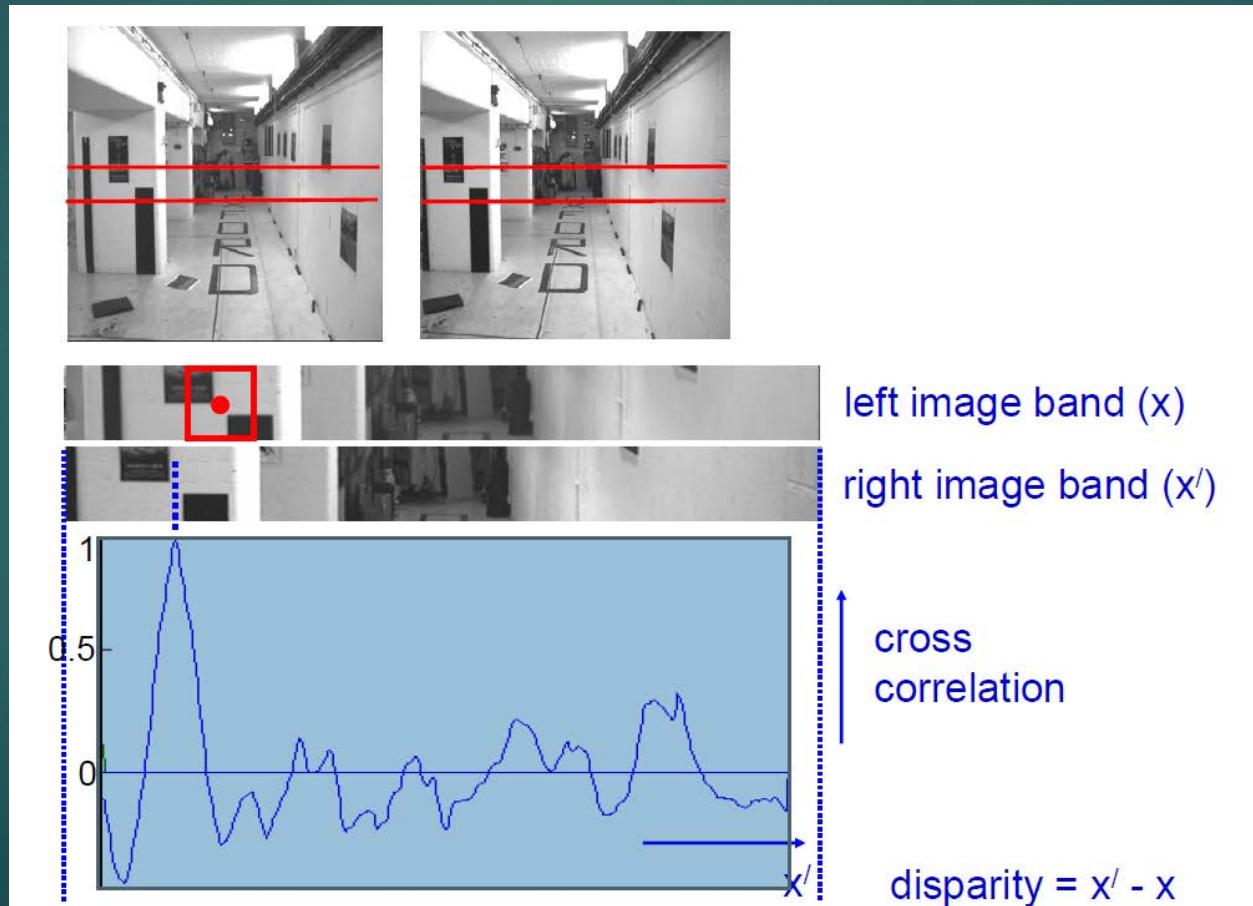
La contrainte épipolaire



Courtesy Oxford, Visual Geometry Group

La contrainte épipolaire

- Utile pour l'appariement de points (exemple sur deux images rectifiées)



Exemple de reconstruction dense

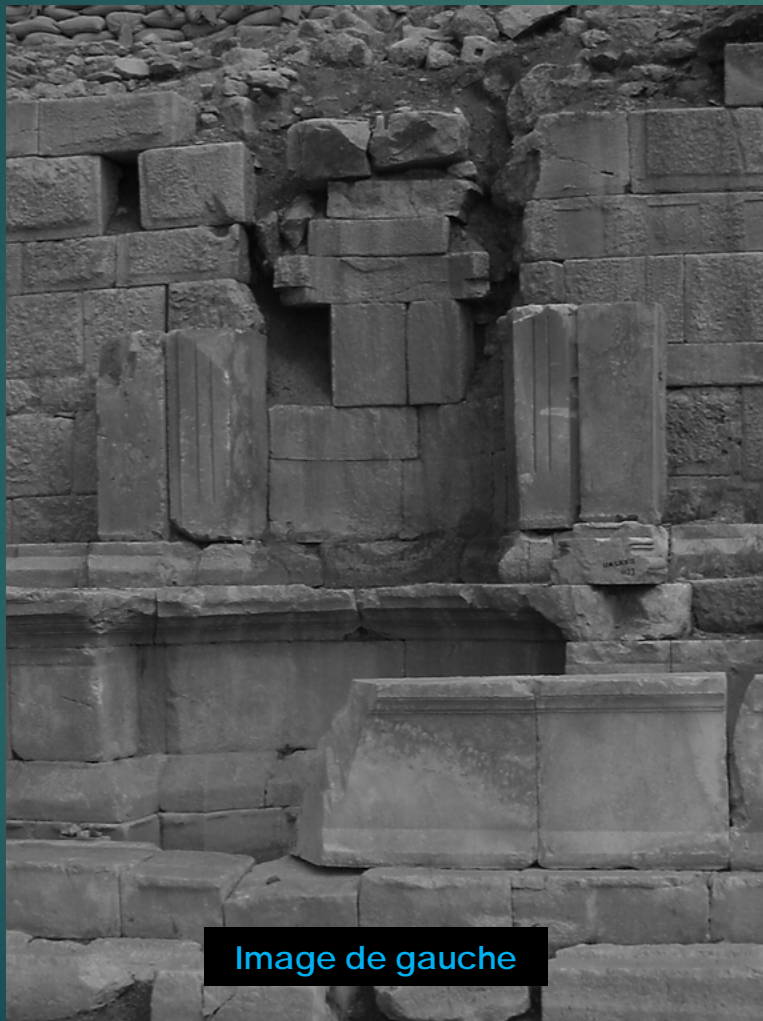


Image de gauche

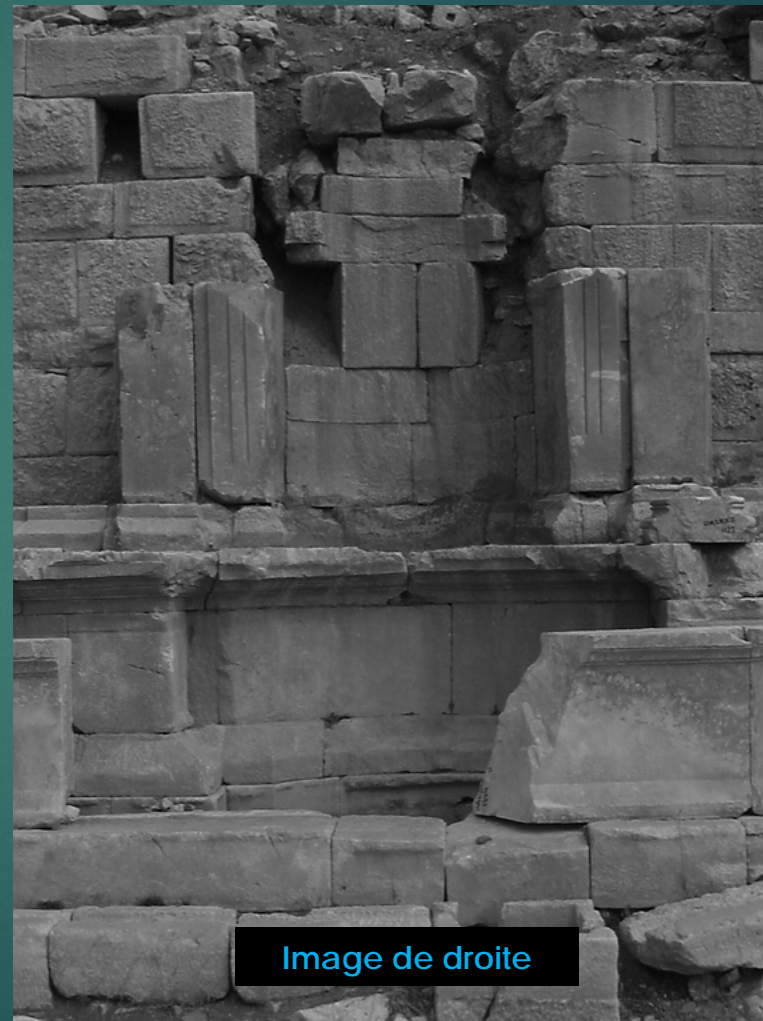


Image de droite

Exemple de reconstruction dense



Carte de
profondeur



Vue du nuage de
points reconstruits
triangulé et texturé