Une introduction aux modèles de perception et de raisonnement

Stéfane Paris et Gilles Simon

Courriel : {prenom.nom}@univ-lorraine.fr

Lecture

Préambule mathématiques

Lecture Préambule mathématiques
Partie 1. 1. Terminologie

- **1D** Temporelle (par ex. les sons)
- **2D** Spatiales (par ex. les images)
- **3D** Spatiotemporelles (par ex. les vidéos)

Définition

Le voisinage plus ou moins direct d'une valeur définit ce que l'on appelle son contexte.

Pour les signaux temporels, le contexte d'une valeur à un instant t est définit par les valeurs passées et futures.

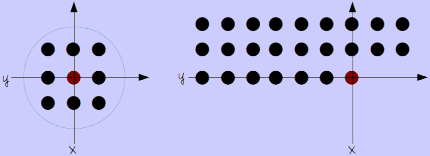
Pour les signaux spatiaux, le contexte d'une valeur (par ex. un pixel d'une image) à une position spatiale (x,y) donnée est défini par les valeurs la jouxtant.
Le voisinage direct de la position (x,y) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (x+1,y-1) & (x+1,y) & (x+1,y+1) \\ (x,y-1) & & (x,y+1) \\ (x-1,y-1) & (x-1,y) & (x-1,y+1) \end{array} \right\}$$

Exemple

Pour un APN [a], le contexte d'une position (x, y) est défini par un disque d'un rayon donné et de centre (x, y).

Alors que pour un scanner à balayage, le contexte est défini par les lignes précédemment scannées et les échantillons déjà lus par la barrette de silicium.



a. Appareil Photographique Numérique.

Définition

Quelque soit le signal et ses dimensions, une valeur à une position donnée n'est que *rarement* sans relation avec les valeurs qui lui sont proches.

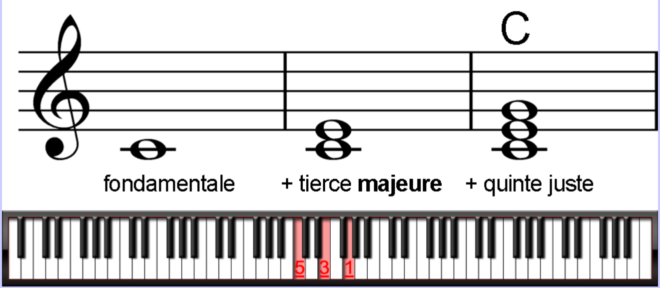
L'intensité de cette relation est mesurée par la corrélation.

Définition

Mais si les valeurs du signal n'ont pas de relation entre elles, on dit qu'elles sont indépendantes et que le signal est un processus sans mémoire.

Exemple

En musique, un accord existe pendant un certain intervalle de temps et est caractérisé par sa fondamentale.



Stéfane Paris et Gilles Simon

Définition

Un signal de période T est caractérisé par :

$$s(t+aT) = s(t), \forall a \in \mathbb{Z}$$

On pose :

$$F = \frac{1}{T} \text{ et } \omega = 2\pi F$$

F est la fréquence fondamentale.
Les multiples $nF(n \in \mathbb{N})$ de F forment un ensemble discret.

Stéfane Paris et Gilles Simon

Définition

Pas de période.

Parfois (cf. Transformée de Fourier) $T \to \infty$
$\Longrightarrow$ F tend vers 0
et les multiples de F sont toutes les fréquences (définition continue)

Définition

Un signal continu possède des variables continues et des valeurs quelconques, c-à-d. entières ou réelles

Plus de détails voir : ANALYSE DE FOURIER ET APPLICATIONS de *C. Gasquet et al.*

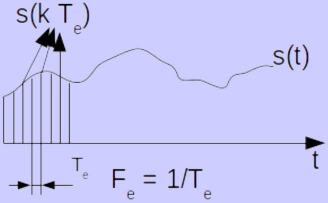
Définition

Un signal discret possède des variables discrètes et des valeurs quelconques.

Exemple

Un son numérisé est constitué d'échantillons de valeurs réelles régulièrement espacés d'une période d'échantillonnage T_e (de fréquence d'échantillonnage F_e).

$$
\begin{aligned}
s[t] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} s(kT_e)\delta(t-kT_e) \\
&= s(t)\otimes\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT_e\right)
\end{aligned}
$$



Exemple

Une image au format RGB est composée de pixels (indicés par des couples d'entiers (x, y)) dont les valeurs sont des triplets d'entiers.

Lecture Préambule mathématiques

Partie 1. 2. Les outils mathématiques

Définition

$v = (a + ib)$ est un nombre complexe de partie réelle $\mathscr{R}(v) = a$ et de partie imaginaire $\mathscr{I}(v) = b$ où i est l'unité imaginaire pure t.q. :

$$i^2 = -1 \Longleftrightarrow i = -\frac{1}{i}$$

Propriétés

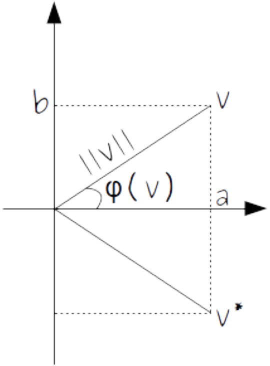
Module de v $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Phase de v $\phi(v) = arctan\left(\frac{a}{b}\right)$

Conjugué de v $v^\star = a - ib$

Propriétés

$(vu)^\star = v^\star u^\star$
Si $(b = 0)$ alors $v^\star = v$



Définition

$g(t) = a(t) + i\,b(t)$ est une fonction complexe dont les parties réelle $\mathscr{R}\{g\}(t) = a(t)$ et imaginaire $\mathscr{I}\{g\}(t) = b(t)$ sont des fonctions réelles.

Définition

Le conjugué $g^\star(t) = a(t) - i\,b(t)$
Propriétés :
$(g(t)h(t))^\star = g^\star(t)h^\star(t)$
Si $(b(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R})$ alors $g^\star(t) = g(t)$

Définition

Le produit scalaire entre deux vecteurs réels $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $v = (v_i)$ s'écrit :

$$< u, v >= \sum_i u_i \cdot v_i =< v, u >$$

Exemple

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les composantes de u sont indépendantes :

$$\begin{array}{lllll} u_x & = & < u, e_0 > & = & u_x * 1 + u_y * 0 + u_z * 0 \\ u_y & = & < u, e_1 > & = & u_x * 0 + u_y * 1 + u_z * 0 \\ u_z & = & < u, e_2 > & = & u_x * 0 + u_y * 0 + u_z * 1 \end{array}$$

Définition

(e_i) est une base orthonormée :

$$< e_0, e_0 >=< e_1, e_1 >=< e_2, e_2 >= 1$$
$$< e_0, e_1 >=< e_0, e_2 >=< e_1, e_2 >= 0$$

Définition

La norme à 1 implique que $< u, e_i >$ ne fournit que la composante de u.

Projection : le produit scalaire $< u, e_i >$ projette u sur l'axe associé à e_i.

Définition

Le produit scalaire entre 2 vecteurs complexes u et v (c-à-d. à composantes complexes) s'écrit :

$$< u, v >= \sum_i u_i \cdot v_i^\star \text{ avec } v_i^\star \text{ le conjugué de } v$$

Définition

Le produit scalaire de 2 fonctions complexes f et g s'écrit :

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g^{\star}(t) \mathrm{d}t$$

Définition

Si f et g sont des fonctions réelles ($g^{\star} = g$) le produit scalaire s'écrit :

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(t) \mathrm{d}t$$

7. Exponentielles complexes

2. Les outils mathématiques

Définition

$e^{i\Theta} = cos(\Theta) + i\sin(\Theta)$ est de période 2π.
Il en suit que :

$$\begin{aligned}
cos(\Theta) &= \frac{1}{2}\left(e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}\right) \\
sin(\Theta) &= \frac{1}{2}\left(e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}\right) \\
e^{-i\Theta} &= \cos(-\Theta) + i\sin(-\Theta) \\
&= \cos(\Theta) - i\sin(\Theta)
\end{aligned}$$

Note

cos *est une fonction paire et* sin *une fonction impaire.*

f est une fonction paire si $f(-t) = f(t)$
f est une fonction impaire si $f(-t) = -f(t)$

Théorème

La base des exponentielles complexes définie sur ω

$$\{e^{in\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

est une base orthonormée :

$$< e^{in_1\omega}, e^{in_2\omega} >= \delta(n_1 - n_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_1 = n_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
& < e^{in_1\omega}, e^{in_2\omega} > \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in_1\omega} e^{-in_2\omega} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n_1-n_2)\omega} \mathrm{d}\omega \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} e^{0} \mathrm{d}\omega & \textbf{si } n_1 = n_2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\omega} \mathrm{d}\omega & \textbf{sinon } n = (n_1 - n_2) \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2\pi} \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{in\omega}}{in}\right]_{-\pi}^{+\pi} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 \\ \dfrac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$