Une introduction aux modèles de perception et de raisonnement

Stéfane Paris et Gilles Simon

Courriel : {prenom.nom}@univ-lorraine.fr

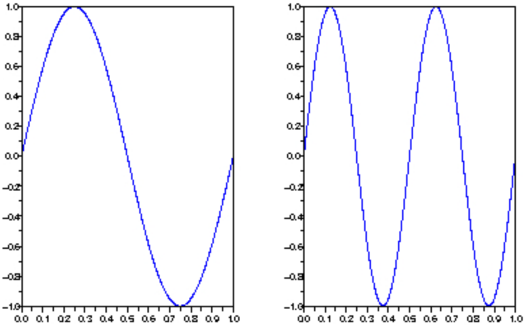
Lecture

Transformées

Lecture Transformées

Partie 1. 1. Les transformées

- Le signal de gauche est de la forme $\sin(2\pi t)$. Il est de période et de fréquence égales à 1 : $T = 1$s et $F = 1Hz$.
- Le signal de droite est de la forme $\sin(2\pi 2t)$. Il est de période $T = \frac{1}{2}$s et de fréquence $F = 2Hz$.



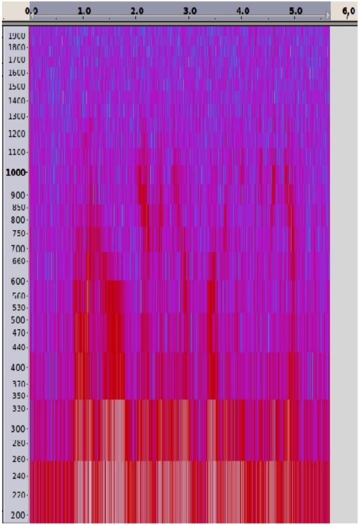
- La période fondamentale, T, mesurée en secondes (unité s), définit la durée du signal avant que celui-ci ne se répéte.
- Son inverse, la fréquence fondamentale, $F = \frac{1}{T}$, mesurée en Hertz (unité Hz), donne alors le nombre de périodes apparaissant dans le signal durant une seconde.

Un *signal sonore* est à la fois défini

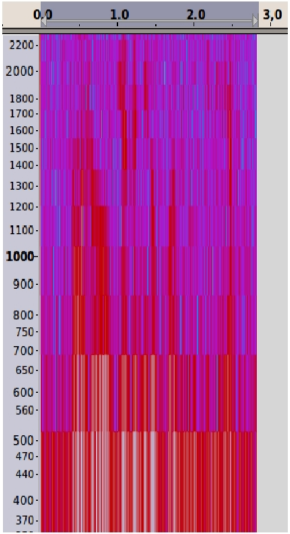
- Suivant le temps : il commence à un moment donné et se termine quelques temps plus tard
- Suivant les fréquences : il est composé de sons grâves et de sons aigües ; càd, de basses fréquences et de hautes fréquences.

1. Temps, espace et fréquences

1. Les transformées



22 kHz



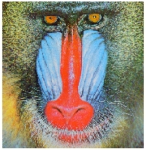
44 kHz

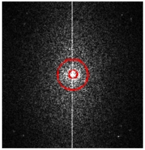
De même une *image* peut être observée :

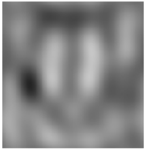
- Soit dans l'espace 2d usuel ;
- Soit dans le domaine fréquentiel :
  - les basses fréquences informent sur la *structure globale* de l'image ;
  - les hautes fréquences apportent les *informations locales* de détails.

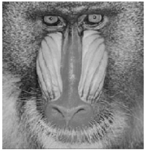
1. Temps, espace et fréquences

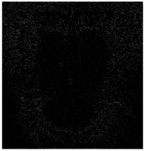
1. Les transformées











Les transformées fréquentielles usuelles sont :

- Les séries de Fourier ;
- La transformée de Fourier ;
- La transformée en cosinus discrète ;

Définition

Soit un signal $s(t)$ monodimensionnel périodique :

$$T = \frac{1}{F}$$

Sa série de Fourier est :

$$s(t) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(nF)\cos(2\pi nFt) + b(nF)\sin(2\pi nFt)\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} a(nF) &= \tfrac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(2\pi nFt)\mathrm{d}t \\ b(nF) &= \tfrac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(2\pi nFt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Propriétés

La composante continue ou principale $a(0)$, informe sur la valeur moyenne du signal :

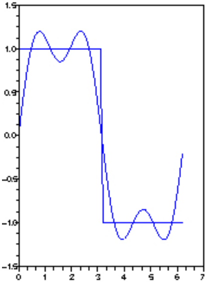
$$a(0) = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t = 2\overline{s(t)}$$

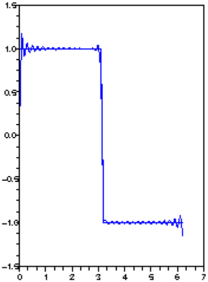
Les autres coefficients sont les harmoniques.

Exemple

Un signal carré $(T = 2\pi; F = \frac{1}{2\pi})$:

$$s(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant t < \pi \\ -1 \text{ si } \pi \leqslant t < 2\pi \end{cases}$$





$$S_3(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3}\right)$$

$$S_{31}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{30}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}$$

Effet de Gibbs !

Définition

La représentation bilatérale complexe d'un signal, $s(t)$, met en évidence la correspondance unique entre $s(t)$ et $S(nF)$:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nF) e^{i2\pi nFt} \\
S(nF) &= \frac{1}{T}\int_0^T s(t) e^{-i2\pi nFt} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Cette réciprocité est notée :

$$s(t) \rightleftharpoons S(f)$$

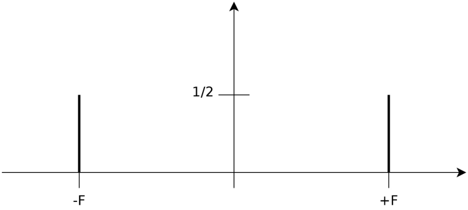
Propriété

Le spectre $S(f)$ est à valeurs complexes, de partie réelle, $a(f)$, et de partie imaginaire, $b(f)$.

Exemple

La série de Fourier du signal $\cos(2\pi Ft)$ est décrite par le seul coefficient non nul $a_1 = 1$.

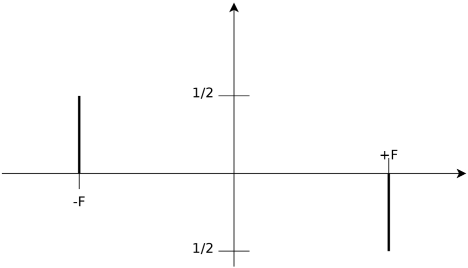
Ainsi, toutes les valeurs $S(nF)$ valent 0 sauf $S(-F) = S(F) = \frac{1}{2}$.



Exemple

La série de Fourier du signal $\sin(2\pi Ft)$ est décrite par le seul coefficient non nul $b_1 = 1$.

Ainsi, toutes les valeurs $S(nF)$ valent 0 sauf $S(-F) = -S(F) = \frac{i}{2}$;



- Quid des fonctions apériodiques ?
- Pas de séries de Fourier...
- Mais une transformée de Fourier !

Définition

La transformée de Fourier (FT) et son inverse s'écrivent :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(f) e^{i2\pi ft} \mathrm{d}f \rightleftharpoons \hat{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} \mathrm{d}t$$

Propriétés

Les parties réelle et imaginaire du spectre valent :

$$\begin{aligned}\hat{S}_R(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(2\pi f t)\mathrm{d}t \\ \hat{S}_I(f) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\sin(2\pi f t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

L'amplitude et la phase :

$$\begin{aligned}\left|\hat{S}(f)\right| &= \sqrt{\hat{S}_R(f)^2 + \hat{S}_I(f)^2} \\ \varphi(f) &= \arctan\left(\frac{\hat{S}_I(f)}{\hat{S}_R(f)}\right)\end{aligned}$$

Définition

En posant $\omega = 2\pi f$ $\left(\mathrm{d}f = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\right)$ la FT et son inverse s'écrivent :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \rightleftharpoons \hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

Remarques

Puisque, les signaux que nous étudions sont numériques, discrets, on introduit la transformée de Fourier discrète.

Un signal $s[t]$ est la version discrète d'un signal $s(t)$ suivant des relevés espacés d'un temps constant T_e.

La fréquence d'échantillonnage vaut : $F_e = \frac{1}{T_e}$.

On obtient donc N relevés, $s(kT_e)$ et :

$$s[t] = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

$$\text{avec } \delta(t) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } t = 0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

Définition

La transformée de Fourier discrète (DFT) s'écrit :

$$s[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{S}[n] e^{i2\pi n \frac{k}{N}} \rightleftharpoons \hat{S}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

Propriété

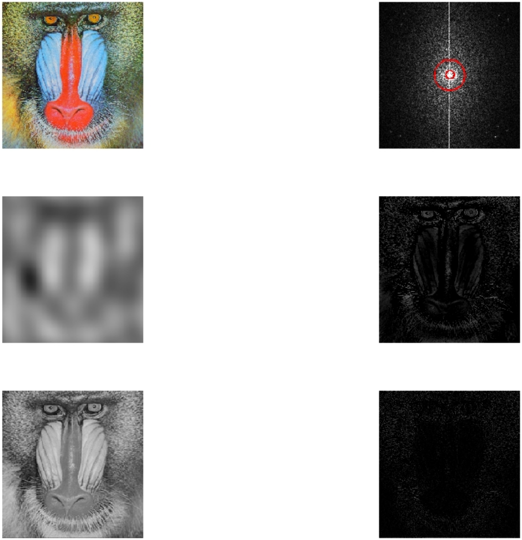
Pour les signaux 2d :

$$\begin{aligned}\hat{S}[n,m] &= \frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} s[k,j]e^{-i2\pi\left(n\frac{k}{N}+m\frac{j}{M}\right)} \\ s[k,j] &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\hat{S}[n,m]e^{i2\pi\left(n\frac{k}{N}+m\frac{j}{M}\right)}\end{aligned}$$

avec N et M les nombres d'échantillons suivant l'axe x et l'axe y respectivement.

4. Transformée de Fourier discrète

1. Les transformées



Définition

La transformée en cosinus discrète s'écrit :

$$s[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n)\hat{S}[n]\cos\frac{(2k+1)n\pi}{2N}$$

$$\rightleftharpoons$$

$$\hat{S}[n] = \alpha(n)\sum_{k=0}^{N-1} s[k]\cos\frac{(2k+1)n\pi}{2N}$$

avec :

$$\alpha(0) = \sqrt{\frac{1}{N}}$$

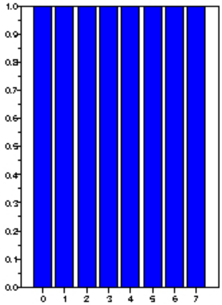
$$\alpha(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \text{ pour } 1 \leqslant n < N$$

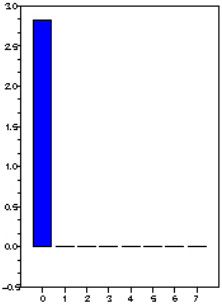
Exemple

Le graphe de gauche montre un signal carré :

$$s[k] = 1(0 \leqslant k < 8)$$

celui de droite sa DCT 1D



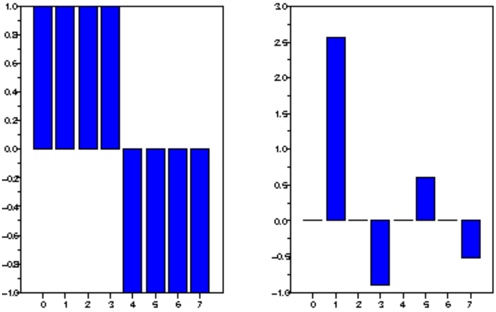


Exemple

Le graphe de gauche montre un signal marche :

$$s[k] = \begin{cases} 1(0 \leqslant k \leq 3) \\ -1(4 \leqslant k \leq 7) \end{cases}$$

celui de droite sa DCT 1D



Propriété

Pour les signaux 2d :

$$\hat{S}[n,m] = \gamma \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} s[k,j] \cos \frac{(2k+1)n\pi}{2N} \cos \frac{(2j+1)m\pi}{2M}$$

$$\rightleftharpoons$$

$$s[k,j] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \gamma \hat{S}[n,m] \cos \frac{(2k+1)n\pi}{2N} \cos \frac{(2j+1)m\pi}{2M}$$

avec :

$$\gamma = \frac{2\alpha(n)\alpha(m)}{\sqrt{NM}}$$
$$\alpha(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\alpha(n) = 1 \text{ pour } n \neq 0$$

Exemple

Les 10 et 100 plus basses fréquences du mandrille