Lecture

Numérisation – Partie I

Numérisation – Partie I

1. 1. Propriétés de la TF et impulsion de Dirac

Linéarité

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \rightleftharpoons \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$$

Changement d'échelle

$$x(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Retard temporel

$$x(t-t_0) \rightleftharpoons X(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

Retard fréquentiel ou déphasage

$$e^{-i\omega_0 t}x(t) \rightleftharpoons X(\omega-\omega_0)$$

avec $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Moyennes

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Conjugaisons et symétries

$$\begin{aligned}
x(t) &\rightleftharpoons X(\omega)\\
x(-t) &\rightleftharpoons X(-\omega)\\
x^\star(t) &\rightleftharpoons X^\star(-\omega)\\
x^\star(-t) &\rightleftharpoons X^\star(\omega)
\end{aligned}$$

Parités

$$\begin{array}{lrcl} \text{[pair]} & x(t) = x(-t) & \rightleftharpoons & X(\omega) = X(-\omega) \\ \text{[impair]} & x(t) = -x(-t) & \rightleftharpoons & X(\omega) = -X(-\omega) \end{array}$$

Dualité

si $x(t) \rightleftharpoons X(\omega)$ **alors** $X(t) \rightleftharpoons x(-\omega)$

Fonction rectangle infiniment fine

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } t \neq 0 \\ +\infty & \textbf{sinon} \end{cases}$$

telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t := 1$$

où

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \mathrm{rect}_{\tau}(t) \right\}$$

Définition

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } t = 0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

Remarque

Cette définition est usuelle mais pas formelle car l'impulsion de Dirac n'est pas une fonction à proprement parler.

Conséquence directe

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) \, \mathrm{d}t = x(t_0)$$

Sa réponse fréquentielle

$$\delta(t) \rightleftharpoons 1 \xleftrightarrow{\text{Dualité}} 1 \rightleftharpoons \delta(f)$$

Sa transformée de Fourier

$$\delta(t) = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot e^{i2\pi ft} \,\mathrm{d}f = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi ft} \,\mathrm{d}f$$

$$\boxed{\delta(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi ft} \,\mathrm{d}t}$$

Retard temporel

$$\delta(t-t_0) \rightleftharpoons e^{-i\omega t_0}$$

Retard fréquentielle avec $x(t)=1$

$$\begin{aligned} TF\left\{e^{i\omega_0 t}\right\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \delta(\omega-\omega_0) \end{aligned}$$

Remarque

On retrouve le fait que les exponentielles complexes forment une base orthonormée.

Définition

Un peigne de Dirac est une séquence d'impulsions de Dirac équidistantes d'une période $T_e = \dfrac{1}{F_e} = \dfrac{2\pi}{\omega_e}$:

$$\Delta_{T_e}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$$

Sa série de Fourier

$$\Delta_{T_e}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega_e t}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
c_n &= F_e \int_{-T_e/2}^{+T_e/2} \Delta_{T_e}(t) e^{-in\omega_e t}\,\mathrm{d}t \\
&= F_e \int_{-T_e/2}^{+T_e/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)\right) e^{-in\omega_e t}\,\mathrm{d}t \\
&= F_e \int_{-T_e/2}^{+T_e/2} \delta(t) e^{-in\omega_e t}\,\mathrm{d}t \\
&= F_e
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\Delta_{T_e}(t) = F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\omega_e t}}$$

Sa transformée de Fourier

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_{T_e}}(\omega) &= \mathscr{T}\mathscr{F}\left\{\Delta_{T_e}(t)\right\}(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Delta_{T_e}(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\omega_e t} \right) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega - n\omega_e)t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_e)
\end{aligned}$$

Définition

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta_{T_e}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) \\ \downharpoonleft\upharpoonleft \\ \widehat{\Delta_{T_e}}(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_e)\end{gathered}}$$