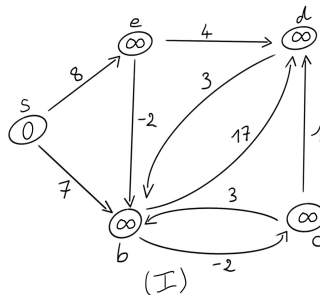


TD-1 : plus court chemin dans un graphe

Exercice 1. Appliquez l'algorithme de Bellman-Ford sur le graphe ci-dessous où s désigne le sommet source. Relaxe les arêtes dans un ordre différent que l'ordre choisi dans le polycopié et faites figurer l'évolution des attributs d et π dans un tableau. Que change l'ordre de relaxation des arêtes ?

Recommencez mais cette fois sur le graphe G' identique au graphe ci-dessous sauf pour le poids de l'arête (c, b) qui devient 1.



Exercice 2. Prouvez que lorsque le graphe est donné sous forme de listes d'adjacence alors la complexité asymptotique de l'algorithme de Bellman-Ford est $O(|V|^2 + |V||E|)$ où V est l'ensemble des sommets du graphe et E l'ensemble de ses arêtes.

Exercice 3. Prouvez le lemme de Minoration 3.2 du polycopié qu'on rappelle ci-dessous :

Lemme (Minoration). Après un appel à la procédure INITIALIZE sur G , et un nombre fini quelconque d'appels à la procédure RELAX sur les arêtes de G , on a $v.d \geq \delta(s, v)$ pour tout sommet $v \in V$. De plus, si $v.d$ atteint $\delta(s, v)$, il ne changera plus.

Exercice 4 (Modélisation). On cherche à trouver une solution $(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$ au système suivant :

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 &\leq 0 \\
 x_1 - x_5 &\leq -1 \\
 x_2 - x_5 &\leq 1 \\
 x_3 - x_1 &\leq 5 \\
 x_4 - x_1 &\leq 4 \\
 x_4 - x_3 &\leq -1 \\
 x_5 - x_3 &\leq -3 \\
 x_5 - x_4 &\leq -3
 \end{aligned}$$

Considérons le graphe G qui comporte six sommets notés v, x_1, x_2, \dots, x_5 . Les arêtes de ce graphe sont définies comme suit : il existe des arêtes de v vers tous les autres sommets, chacune ayant un poids 0. De plus, G contient une arête (x_i, x_j) de poids b si et seulement si la contrainte $x_j - x_i \leq b$ est présente dans le système d'inéquation ci-dessus.

1. Dessinez G et trouvez le poids d'un plus-court-chemin de v à tous les autres sommets.
2. Notons d_1, d_2, \dots, d_5 les poids d'un plus-court-chemin de v à x_1 , de v à x_2 , ..., de v à x_5 trouvés à la question 1. Montrez que (d_1, \dots, d_5) est une solution au système d'inéquation ci-dessus.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ une matrice où chaque ligne comporte exactement un 1, un -1 et des 0 dans les autres cases. Soit $b \in \mathbb{R}^m$ et on s'intéresse au système d'inéquations $Ax \leq b$.

1. En vous inspirant de l'exemple précédent, décrivez un graphe G orienté pondéré associé au système $Ax \leq b$.
2. Prouvez que $Ax \leq b$ admet une solution si et seulement si G ne contient pas de cycle de poids négatif.
3. Donnez un algorithme qui trouve une solution à $Ax \leq b$ s'il en admet, et qui renvoie Faux sinon.

Exercice 5. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et pondéré qui ne contient pas de cycle de poids strictement négatif, et soit $s \in V$ "le sommet source". Pour un sommet $v \in V \setminus \{s\}$, on note m_v le nombre minimum de sommets d'un plus-court-chemin de s à v .

1. Soit $v \in V \setminus \{s\}$ un sommet. Montrez qu'après m_v itérations de l'algorithme de Bellman-Ford, on a $v.d = \delta(s, v)$.
2. Soit $m = \max_{v \in V \setminus \{s\}} m_v$. Modifiez l'algorithme de Bellman-Ford pour qu'il termine en $m + 1$ itérations, et ce sans connaître la valeur de m à l'avance.