

Structure combinatoire des transformations rigides sur \mathbb{Z}^2

Théorie et application à l'analyse topologique des images numériques

Phuc NGO

Université Paris-Est

Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge



UNIVERSITÉ
— PARIS-EST

UNIVERSITÉ
DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE

Collaboration avec Yukiko KENMOCHI, Nicolas PASSAT et Hugues TALBOT
06 juin 2013

Partie 1 :
Étude combinatoire des transformations rigides sur \mathbb{Z}^2

Partie 2 :
Analyse topologique des images numériques

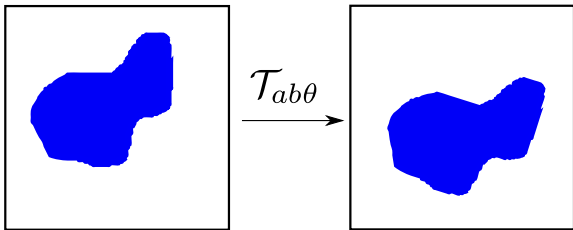
Transformation rigide

Définition

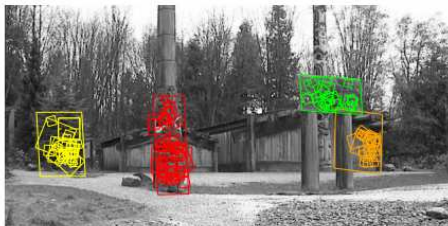
Une transformation rigide est une fonction $\mathcal{T}_{ab\theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cos \theta - q \sin \theta + a \\ p \sin \theta + q \cos \theta + b \end{pmatrix}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $(p, q), (p', q') \in \mathbb{R}^2$.

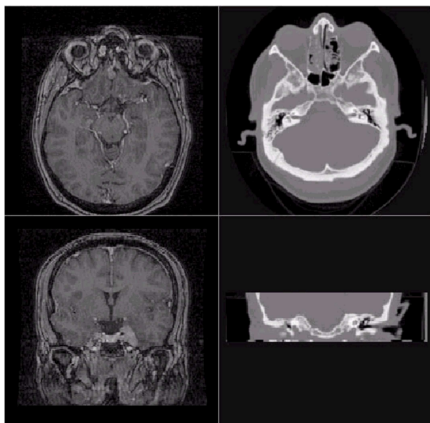


Exemples de transformations rigides sur \mathbb{Z}^2 : filtrage par motifs



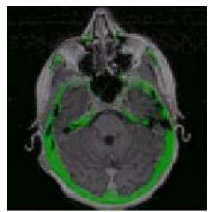
(Lowe 04)

Exemples de transformations rigides sur \mathbb{Z}^2 : recalage d'images



MRI

CT



Colored overlay

(Maintz 98)

Exemples de transformations rigides sur \mathbb{Z}^2 : analyse de documents

Note linguistique :

Une membrane asymétrique est anisotrope. Les deux termes sont généralement confondus.

Note linguistique:

Une membrane asymétrique est anisotrope. Les deux termes sont généralement confondus.

Problématiques

- Ces transformations peuvent-elles être gérées dans un cadre purement discret ?

Contributions

Problématiques

- Ces transformations peuvent-elles être gérées dans un cadre purement discret ?
- Combien d'images transformées existe-t-il ?

Contributions

Problématiques

- Ces transformations peuvent-elles être gérées dans un cadre purement discret ?
- Combien d'images transformées existe-t-il ?
- Comment les générer ?

Contributions

Problématiques

- Ces transformations peuvent-elles être gérées dans un cadre purement discret ?
- Combien d'images transformées existe-t-il ?
- Comment les générer ?

Contributions

- Nous proposons une version discrète des transformations rigides pour les images numériques 2D de taille $N \times N$.

Problématiques

- Ces transformations peuvent-elles être gérées dans un cadre purement discret ?
- Combien d'images transformées existe-t-il ?
- Comment les générer ?

Contributions

- Nous proposons une version discrète des transformations rigides pour les images numériques 2D de taille $N \times N$.
- Nous définissons un graphe représentant la structure combinatoire de ces transformations rigides discrètes.
- Nous démontrons que la complexité de ce graphe est $O(N^9)$.

Problématiques

- Ces transformations peuvent-elles être gérées dans un cadre purement discret ?
- Combien d'images transformées existe-t-il ?
- Comment les générer ?

Contributions

- Nous proposons une version discrète des transformations rigides pour les images numériques 2D de taille $N \times N$.
- Nous définissons un graphe représentant la structure combinatoire de ces transformations rigides discrètes.
- Nous démontrons que la complexité de ce graphe est $O(N^9)$.
- Nous fournissons un algorithme en temps linéaire pour le construire.

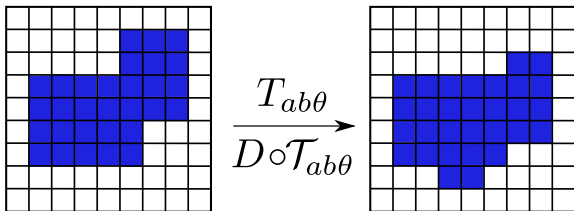
Transformation rigide digitalisée

Définition

Une **transformation rigide digitalisée** est une fonction $T_{ab\theta} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [p \cos \theta - q \sin \theta + a] \\ [p \sin \theta + q \cos \theta + b] \end{pmatrix}$$

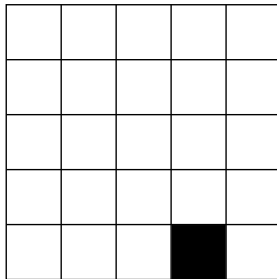
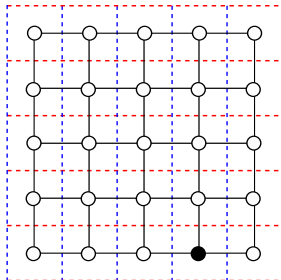
où $a, b \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z}^2$.



Transformation rigide discrète (DRT)

Définition

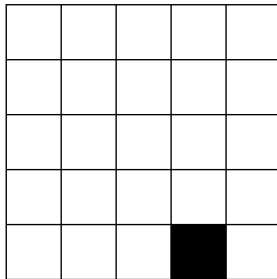
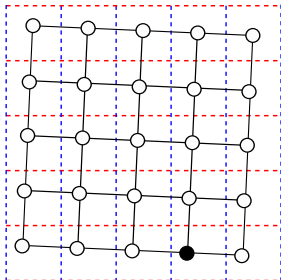
Une **transformation rigide discrète** est un ensemble de transformations continues équivalentes par application d'un opérateur de discrétisation.



Transformation rigide discrète (DRT)

Définition

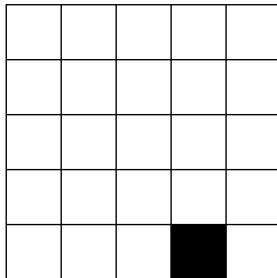
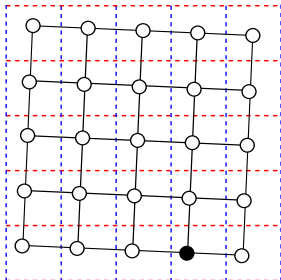
Une **transformation rigide discrète** est un ensemble de transformations continues équivalentes par application d'un opérateur de discrétisation.



Transformation rigide discrète (DRT)

Définition

Une **transformation rigide discrète** est un ensemble de transformations continues équivalentes par application d'un opérateur de discrétisation.

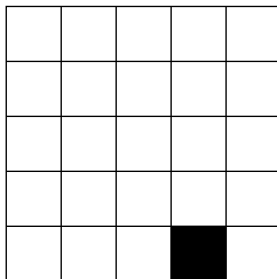
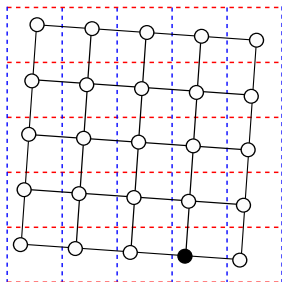


L'espace des paramètres est partitionné en des ensembles disjoints de DRTs.

Transformation critique

Définition

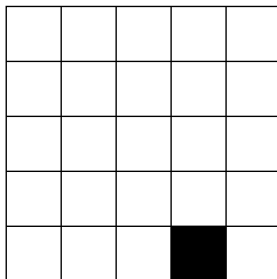
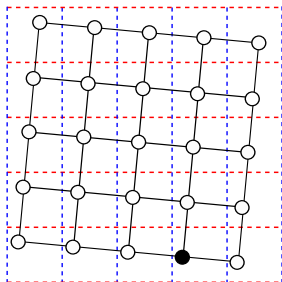
Une transformation rigide est **critique** si elle projette au moins un point entier sur la demi-grille **verticale** ou **horizontale**.



Transformation critique

Définition

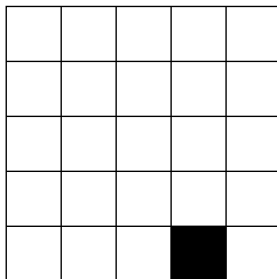
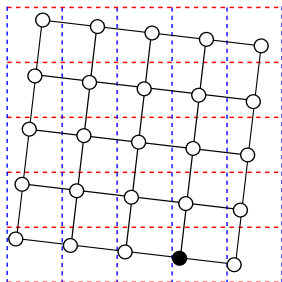
Une transformation rigide est **critique** si elle projette au moins un point entier sur la demi-grille **verticale** ou **horizontale**.



Transformation critique

Définition

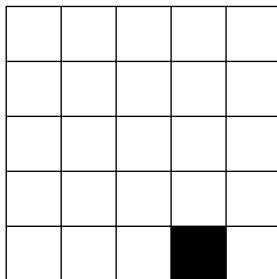
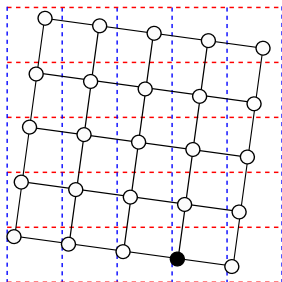
Une transformation rigide est **critique** si elle projette au moins un point entier sur la demi-grille **verticale** ou **horizontale**.



Transformation critique

Définition

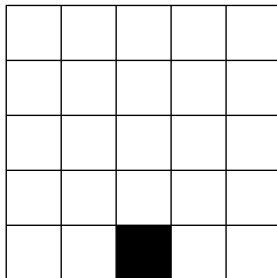
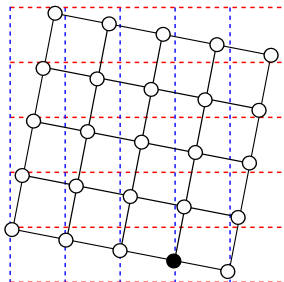
Une transformation rigide est **critique** si elle projette au moins un point entier sur la demi-grille **verticale** ou **horizontale**.



Transformation critique

Définition

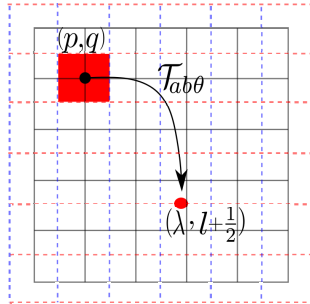
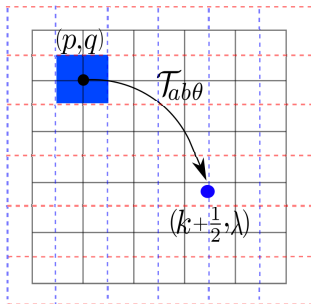
Une transformation rigide est **critique** si elle projette au moins un point entier sur la demi-grille **verticale** ou **horizontale**.



Transformation critique

Définition

Une transformation rigide est **critique** si elle projette au moins un point entier sur la demi-grille **verticale** ou **horizontale**.



Surfaces de basculement

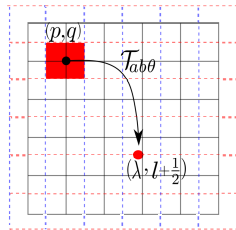
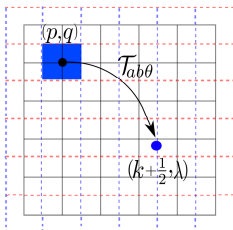
Définition

Les surfaces de basculement sont des surfaces associées à des transformations critiques dans l'espace des paramètres (a, b, θ) .

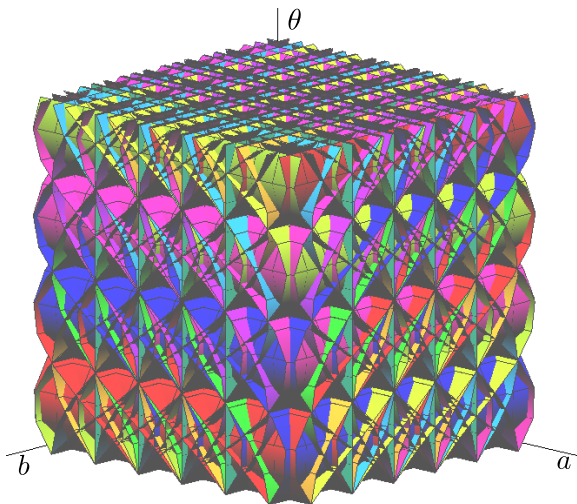
$$\left| \begin{array}{l} \Phi_{pqk} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (b, \theta) \longmapsto a = k + \frac{1}{2} + q \sin \theta - p \cos \theta \quad (\text{vertical}) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \Psi_{pql} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, \theta) \longmapsto b = l + \frac{1}{2} - p \sin \theta - q \cos \theta \quad (\text{horizontal}) \end{array} \right.$$

où $p, q, k, l \in \mathbb{Z}$.



Exemple des surfaces de basculement



Les surfaces de basculement Φ_{pqk} et Ψ_{pql} pour $p, q \in [0, 4]$ et $k, l \in [0, 5]$.

Courbes de basculement

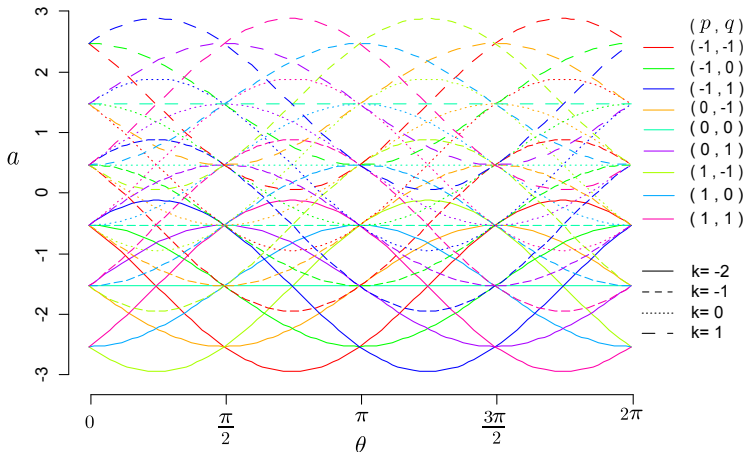
Définition

Les courbes de basculement sont définies comme les projections orthogonales de Φ_{pqk} (resp. Ψ_{pql}) sur le plan (a, θ) (resp. (b, θ)).

$$\left| \begin{array}{l} \Phi_{pqk} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta \longmapsto a = k + \frac{1}{2} + q \sin \theta - p \cos \theta \end{array} \right.$$
$$\left| \begin{array}{l} \Psi_{pql} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta \longmapsto b = l + \frac{1}{2} - p \sin \theta - q \cos \theta \end{array} \right.$$

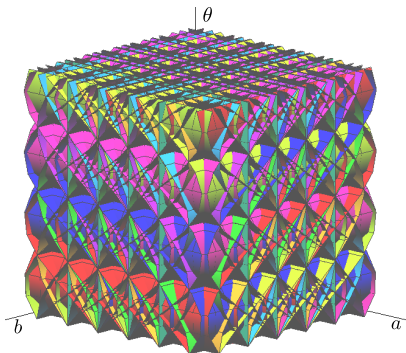
où $p, q, k, l \in \mathbb{Z}$.

Exemple des courbes de basculement

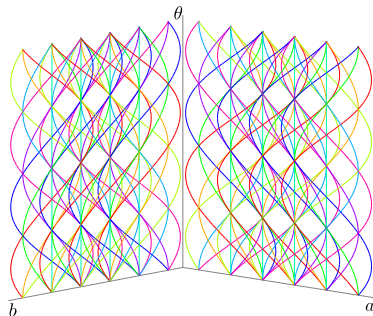


Les courbes de basculement ϕ_{pqk} pour $p, q \in [0, 4]$ et $k \in [0, 5]$.

Exemple des surfaces/courbes de basculement



(a) Surfaces de basculement



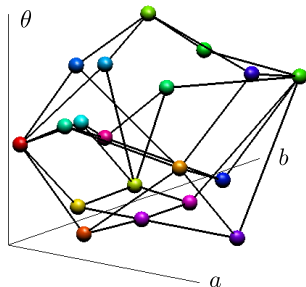
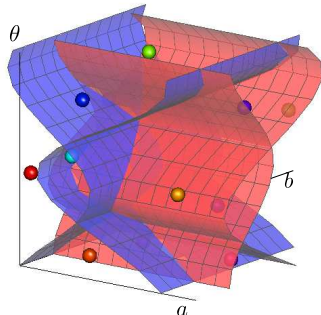
(b) Courbes de basculement

Graphe des transformations rigides discrètes

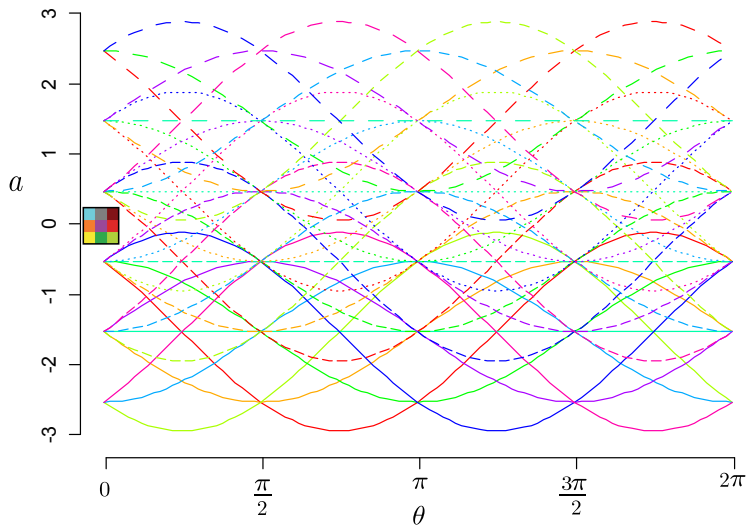
Définition

Un **graphe des transformations rigides discrètes** (DRT graphe) est un graphe $G = (V, E)$ tel que

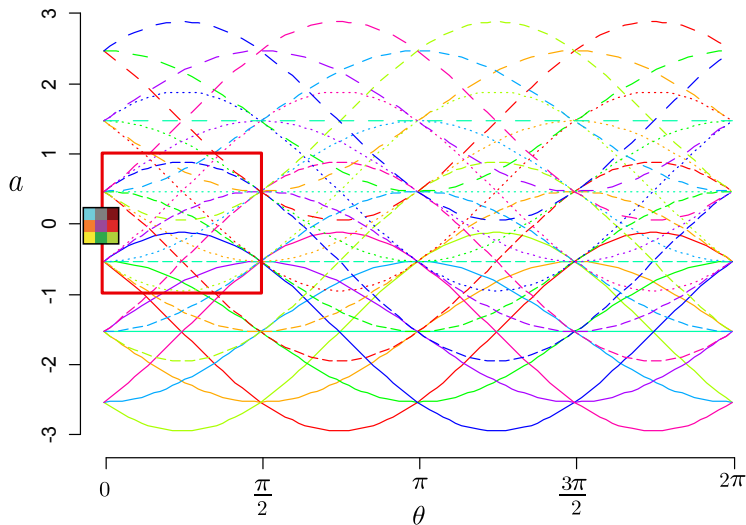
- chaque sommet de V correspond à un DRT,
- chaque arête de E relie deux sommets partageant une surface de basculement.



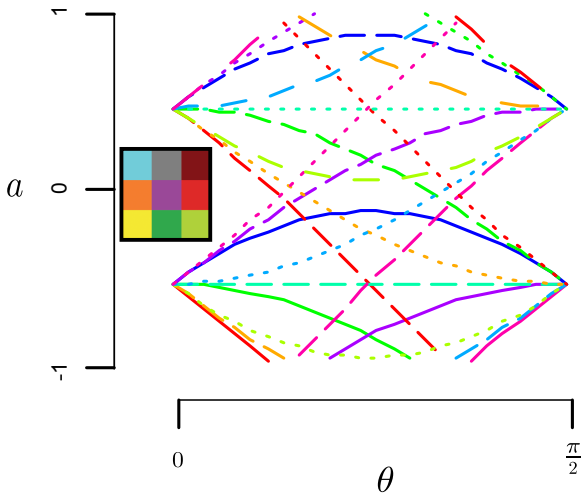
Exemple de DRT graphe en 2D



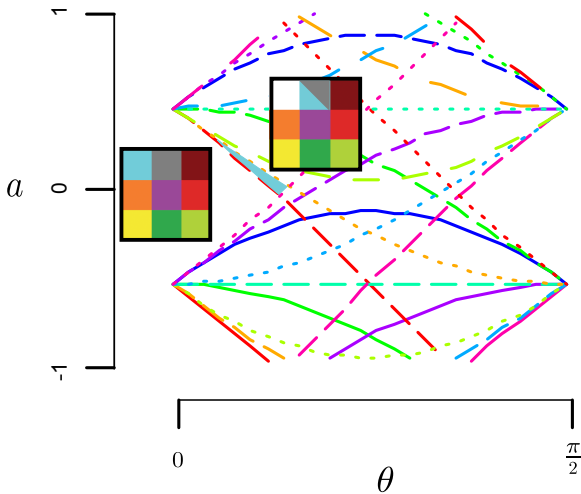
Exemple de DRT graphe en 2D



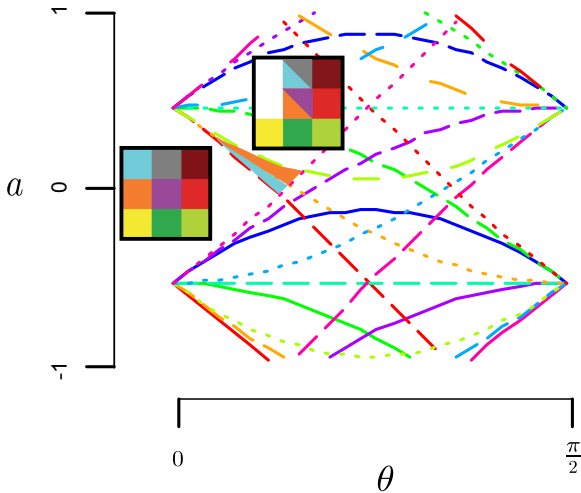
Exemple de DRT graphe en 2D



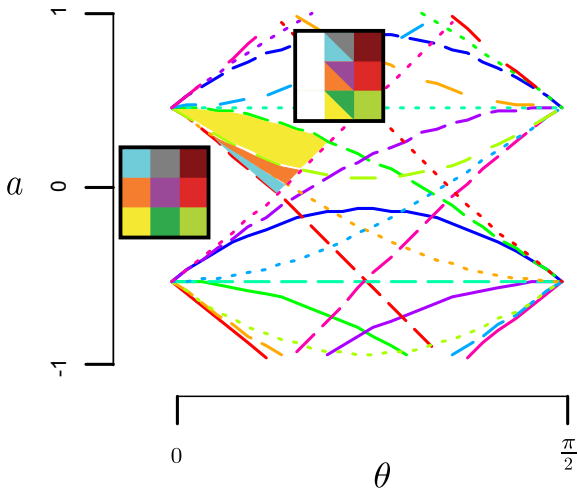
Exemple de DRT graphe en 2D



Exemple de DRT graphe en 2D



Exemple de DRT graphe en 2D



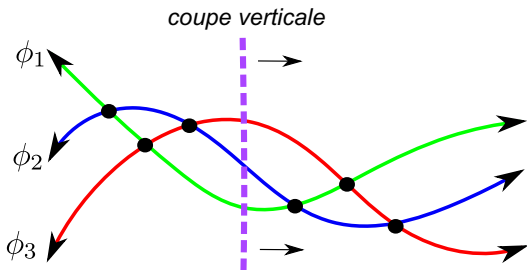
Construction d'un graphe avec des courbes de basculement

Problème

- **Entrée** : Un ensemble de courbes de basculement C .
- **Sortie** : Le 2D DRT graphe G_C de C .
- **Approche** : Méthode de balayage (sweeping method).

Méthode de balayage

La méthode de balayage utilise une coupe verticale pour parcourir l'espace des paramètres le long de C afin de construire G_C .



Construction incrémentale d'un 2D DRT graphe

Proposition

Soit C l'ensemble des courbes de basculement et G_C le 2D DRT graphe de C . Nous avons

$$G_C = \bigcup_{i=0}^m \delta G_{C_i}$$

où δG_{C_i} est le graphe partiel à la i -ème étape, et m est le nombre total d'intersections.

Illustration de l'algorithme de construction

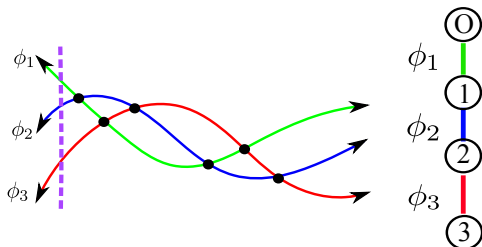


Illustration de l'algorithme de construction

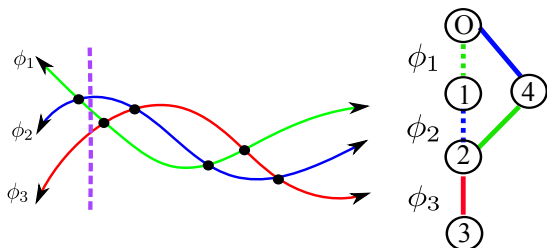


Illustration de l'algorithme de construction

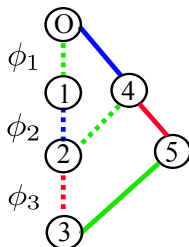
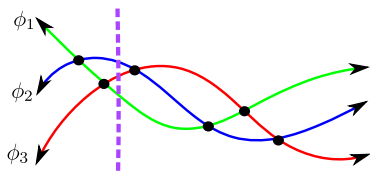


Illustration de l'algorithme de construction

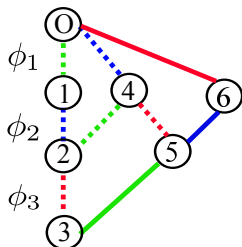
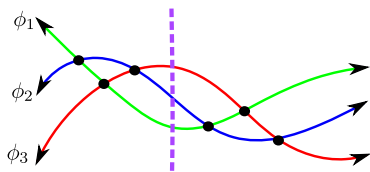


Illustration de l'algorithme de construction

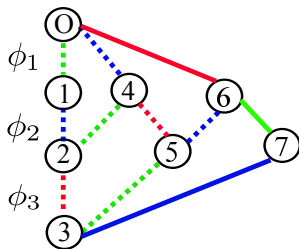
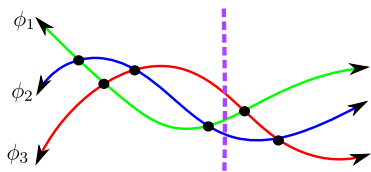


Illustration de l'algorithme de construction

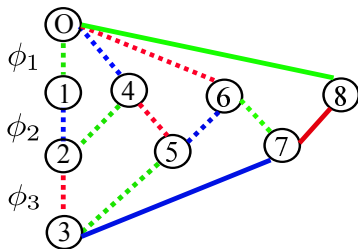
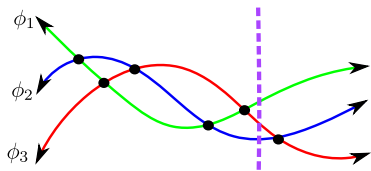


Illustration de l'algorithme de construction

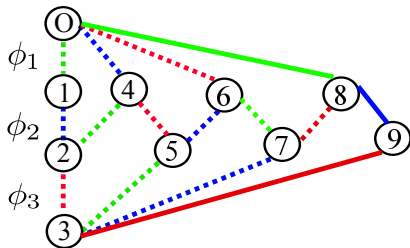
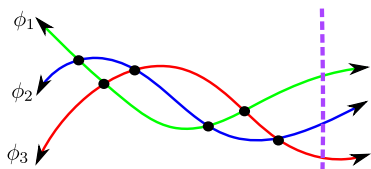
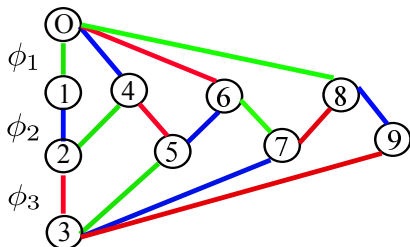
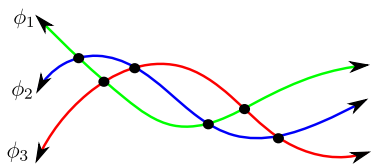
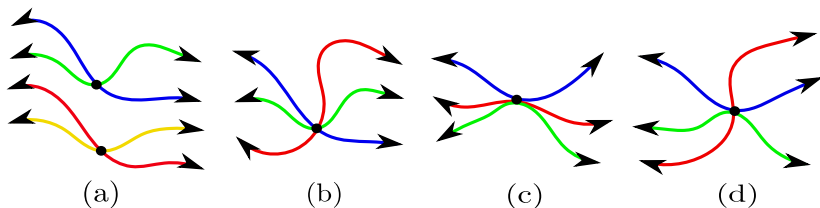


Illustration de l'algorithme de construction



Cas dégénérés



Remarque : l'intersection de deux courbes de basculement peut être exprimée par un quadratique irrationnel.

Comparaison exacte

Nous pouvons comparer les intersections par un calcul exact en utilisant les fractions continues.

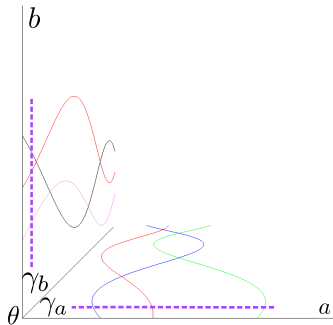
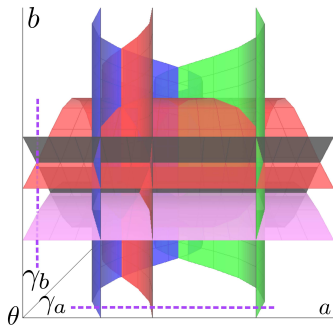
Construction d'un DRT graphe

Problème

- **Entrée** : Un ensemble de surfaces de basculement S .
- **Sortie** : Le DRT graphe G de S .
- **Approche** : Méthode de balayage (sweeping method).

Construction d'un DRT graphe

La méthode de balayage utilise deux coupes γ_a et γ_b pour parcourir l'espace des paramètres le long des courbes dans les plans (a, θ) et (b, θ) afin de construire G .



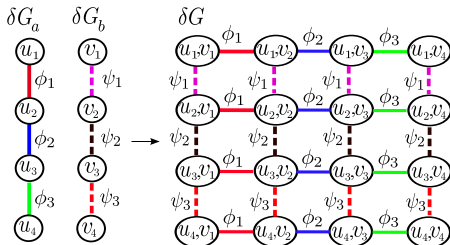
Construction de DRT Graphe

Proposition

Soit δG_a et δG_b les graphes partiels des coupes γ_a et γ_b respectivement. Nous avons

$$\delta G = \delta G_a \times \delta G_b$$

où δG est le graphe partiel du DRT graphe G .



Construction incrémentale d'un DRT graphe

Proposition

Soit S l'ensemble des surfaces de basculement et G le DRT graphe de S . Nous avons

$$G = \bigcup_{i=0}^m \delta G_i$$

où δG_i est le graphe partiel à la i -ème étape et m est le nombre total d'intersections.

Complexité

Étant donnée une image de taille $N \times N$

Propriétés des courbes de basculement

- Il y a $N^2(N + 1)$ courbes de basculement.
- Deux courbes de basculement s'intersectent au plus en deux points.

Complexité du 2D DRT graphe (sommets)

$$\begin{array}{l} O(N^3) \\ \text{Graphe initial} \end{array} + \begin{array}{l} O(N^6) \\ \text{Nombre d'intersections} \end{array} = O(N^6)$$

Complexité

Étant donnée une image de taille $N \times N$

Propriétés des surfaces de basculement

- Il y a $N^2(N + 1)$ surfaces de basculement.
- Deux courbes de basculement s'intersectent au plus deux fois.

Complexité du DRT graphe (sommets)

$$\begin{array}{ccccc} O(N^3) \times O(N^3) & + & O(N^6) \times O(N^3) & = & O(N^9) \\ \textit{Graphe initial} & & \textit{Nombre d'intersections} & & \end{array}$$

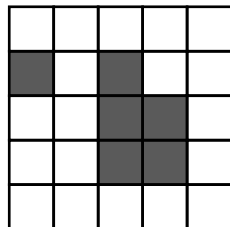
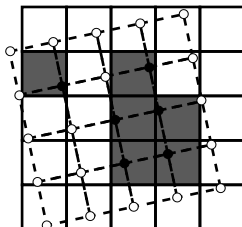
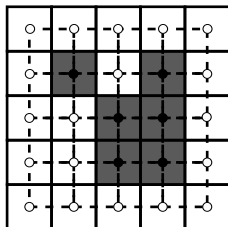
Propriétés du DRT graphe

- Les transformations rigides sur les sous-ensembles de \mathbb{Z}^2 de taille $N \times N$ ont été étudiées dans un cadre **totalemment discret**.
- Le **DRT graphe** G modélise toutes les transformations rigides pour une image donnée I .
- La complexité du DRT graphe est $O(N^9)$.
- En utilisant G , nous pouvons progressivement générer **toutes les images transformées** de I .
- Nous disposons d'un **algorithme en temps linéaire** par rapport à la taille du graphe.

Partie 1 :
Étude combinatoire des transformations rigides sur \mathbb{Z}^2

Partie 2 :
Analyse topologique des images numériques

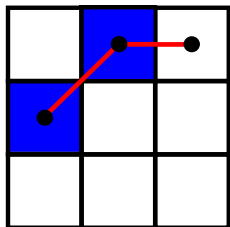
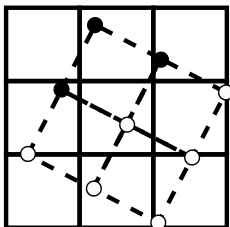
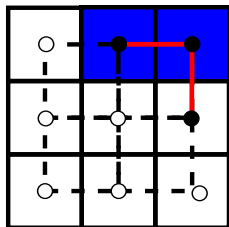
Problématiques



Altérations topologiques

La topologie n'est pas nécessairement préservée lors du processus de digitalisation de \mathbb{R}^2 à \mathbb{Z}^2 .

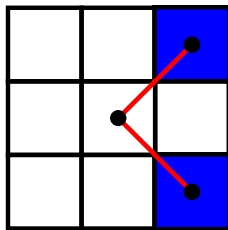
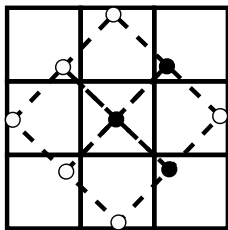
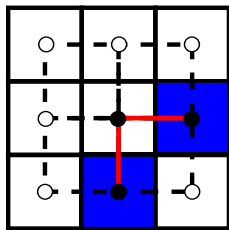
Altérations géométriques : distances et angles



Distance	
Avant	Après
1	$\sqrt{2}$

Angle	
Avant	Après
90°	135°

Altérations géométriques : distances et angles

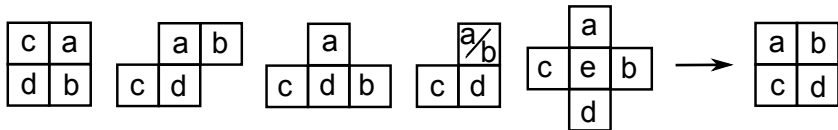


Distance	
Avant	Après
1	$\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	2

Angle	
Avant	Après
90°	135°
90°	90°

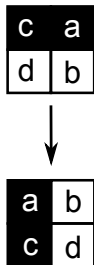
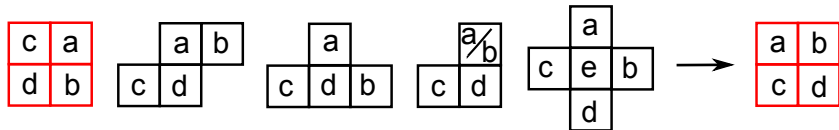
Altérations topologiques

Les configurations (hors symétries) permettent de générer un échantillon de 2×2 par transformations rigides digitalisées.



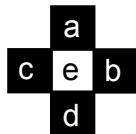
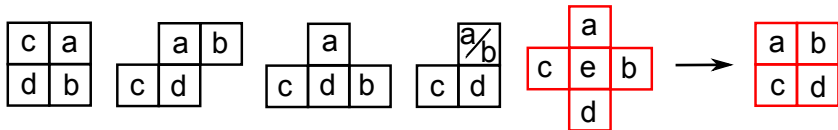
Altérations topologiques

Les configurations (hors symétries) permettent de générer un échantillon de 2×2 par transformations rigides digitalisées.



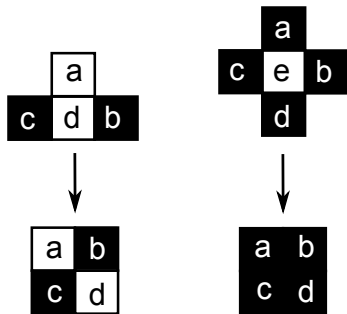
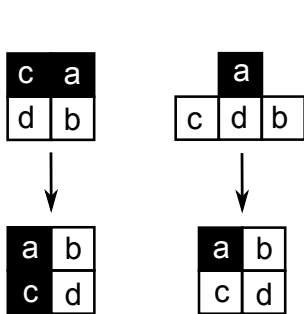
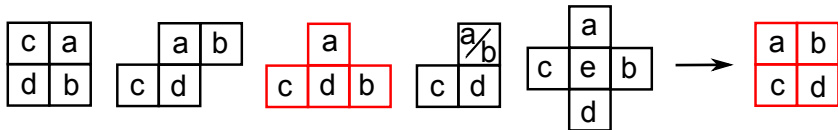
Altérations topologiques

Les configurations (hors symétries) permettent de générer un échantillon de 2×2 par transformations rigides digitalisées.

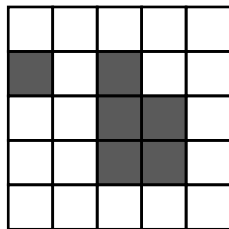
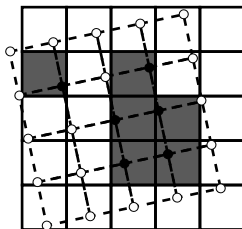
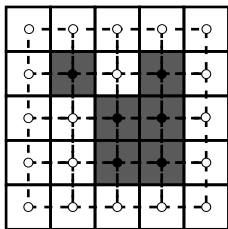


Altérations topologiques

Les configurations (hors symétries) permettent de générer un échantillon de 2×2 par transformations rigides digitalisées.

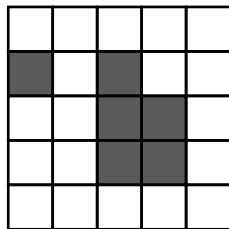
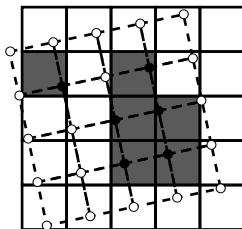
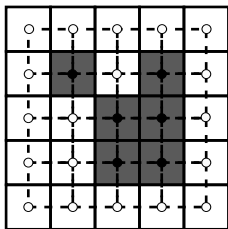


Motivation



Problématiques

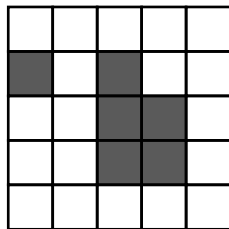
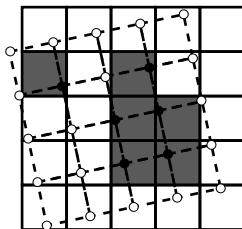
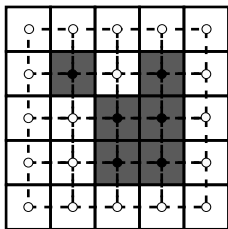
Motivation



Problématiques

- Existe-t-il des images binaires dont la topologie soit préservée par toutes les transformations rigides ?

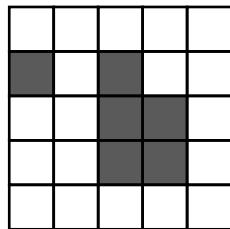
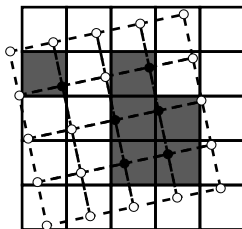
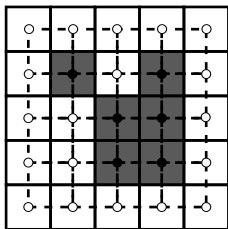
Motivation



Problématiques

- Existe-t-il des images binaires dont la topologie soit préservée par toutes les transformations rigides ?
- Pouvons-nous vérifier la préservation topologique d'une image ?

Motivation



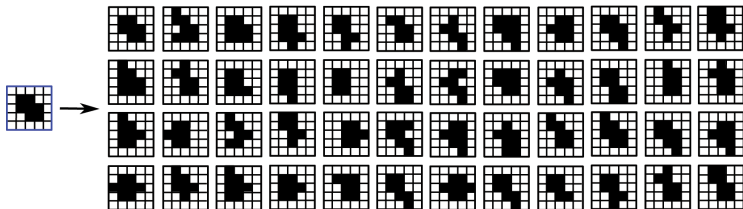
Problématiques

- Existe-t-il des images binaires dont la topologie soit préservée par toutes les transformations rigides ?
- Pouvons-nous vérifier la préservation topologique d'une image ?
- Quelles sont les conditions sur les images permettant de préserver leurs propriétés topologiques ?

Invariance topologique

Définition

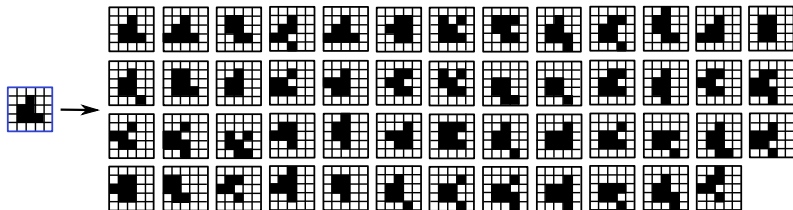
Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides ont le même type d'homotopie que I .



Invariance topologique

Définition

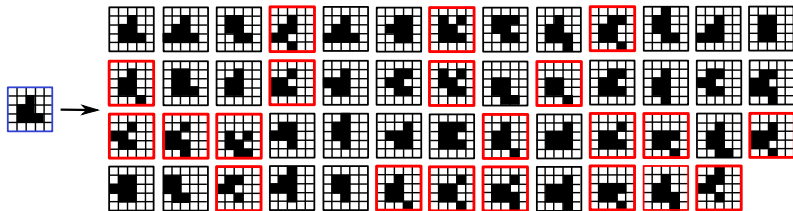
Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides ont le même type d'homotopie que I .



Invariance topologique

Définition

Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides ont le même type d'homotopie que I .



Comment vérifier l'invariance topologique ?

Des outils méthodologiques

- DRT graphe, et

Comment vérifier l'invariance topologique ?

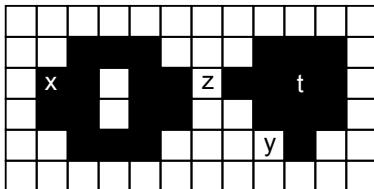
Des outils méthodologiques

- DRT graphe, et
- points simples.

Point simple

Définition

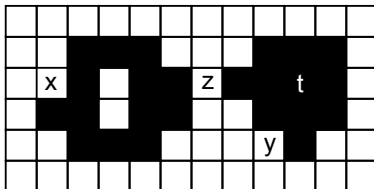
Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.



Point simple

Définition

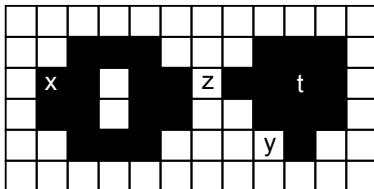
Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.



Point simple

Définition

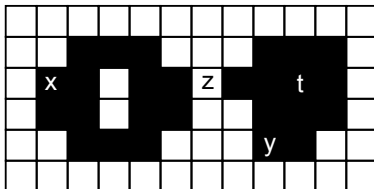
Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.



Point simple

Définition

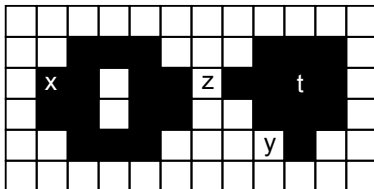
Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.



Point simple

Définition

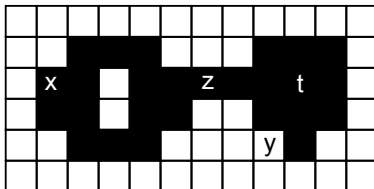
Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.



Point simple

Définition

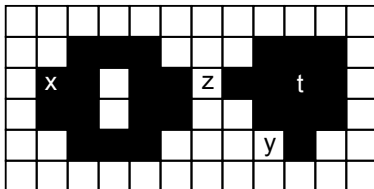
Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.



Point simple

Définition

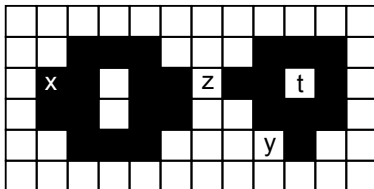
Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.



Point simple

Définition

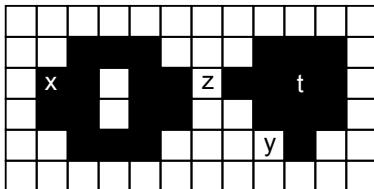
Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.



Point simple

Définition

Un **point simple** est un pixel dont la valeur peut être modifiée sans changer la topologie de l'image associée.

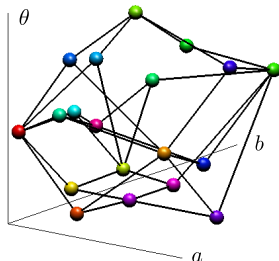
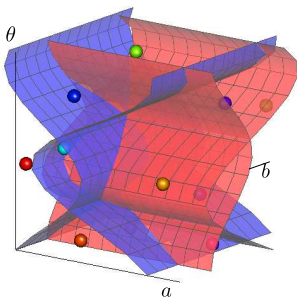


La simplicité d'un pixel peut être testée en temps constant, en utilisant un voisinage 3×3 .

Méthode naïve

Nous utilisons

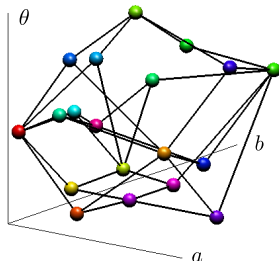
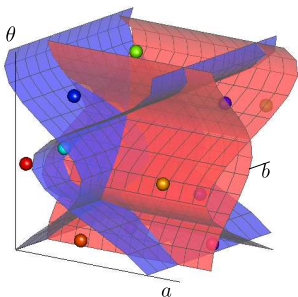
- le **DRT graphe** pour générer incrémentalement toutes les images transformées,



Méthode naïve

Nous utilisons

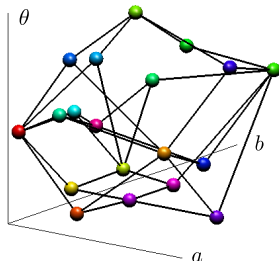
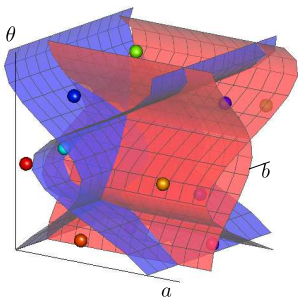
- le **DRT graphe** pour générer incrémentalement toutes les images transformées,
- un **test de simplicité** pour vérifier l'invariance topologique.



Méthode naïve

Nous utilisons

- **le DRT graphe** pour générer incrémentalement toutes les images transformées,
- **un test de simplicité** pour vérifier l'invariance topologique.



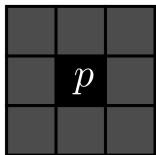
Le DRT graphe a une complexité de $O(N^9)$, où $N \times N$ est la taille de l'image.

Méthode utilisant des configurations locales

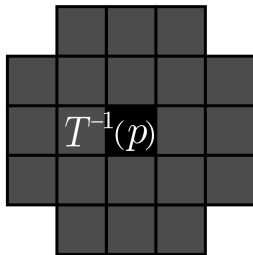
Propriété locale

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ un pixel et $\mathbf{q} \in N_8(\mathbf{p})$. Nous avons

$$T^{-1}(\mathbf{q}) \in N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$$



$N_8(\mathbf{p})$



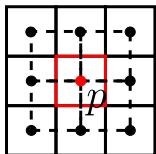
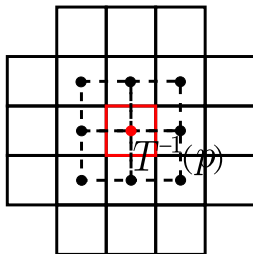
$N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$

Méthode utilisant des configurations locales

Propriété locale

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ un pixel et $\mathbf{q} \in N_8(\mathbf{p})$. Nous avons

$$T^{-1}(\mathbf{q}) \in N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$$

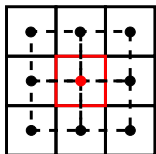
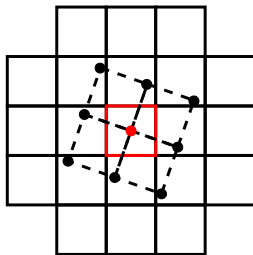

 $N_8(\mathbf{p})$

 $N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$

Méthode utilisant des configurations locales

Propriété locale

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ un pixel et $\mathbf{q} \in N_8(\mathbf{p})$. Nous avons

$$T^{-1}(\mathbf{q}) \in N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$$

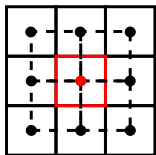
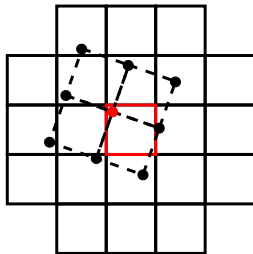

 $N_8(\mathbf{p})$

 $N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$

Méthode utilisant des configurations locales

Propriété locale

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ un pixel et $\mathbf{q} \in N_8(\mathbf{p})$. Nous avons

$$T^{-1}(\mathbf{q}) \in N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$$

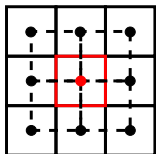

 $N_8(\mathbf{p})$

 $N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$

Méthode utilisant des configurations locales

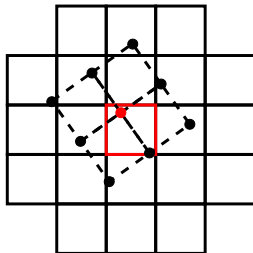
Propriété locale

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ un pixel et $\mathbf{q} \in N_8(\mathbf{p})$. Nous avons

$$T^{-1}(\mathbf{q}) \in N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$$



$N_8(\mathbf{p})$



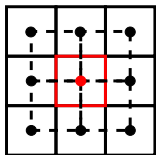
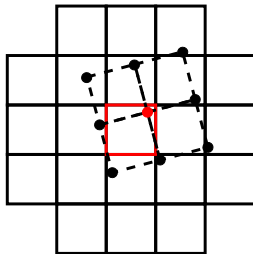
$N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$

Méthode utilisant des configurations locales

Propriété locale

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ un pixel et $\mathbf{q} \in N_8(\mathbf{p})$. Nous avons

$$T^{-1}(\mathbf{q}) \in N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$$

 $N_8(\mathbf{p})$  $N_{20}(T^{-1}(\mathbf{p}))$

Principe de l'approche locale

Algorithme

- Générer tous les échantillons binaires portés par un 20-voisinage.

Principe de l'approche locale

Algorithme

- Générer tous les échantillons binaires portés par un 20-voisinage.
- Générer l'ensemble P contenant des échantillons dont le point central est topologiquement invariant.

Principe de l'approche locale

Algorithme

- Générer tous les échantillons binaires portés par un 20-voisinage.
- Générer l'ensemble P contenant des échantillons dont le point central est topologiquement invariant.
- Vérifier l'invariance topologique pour chaque pixel de l'image donnée en utilisant P .

Principe de l'approche locale

Algorithme

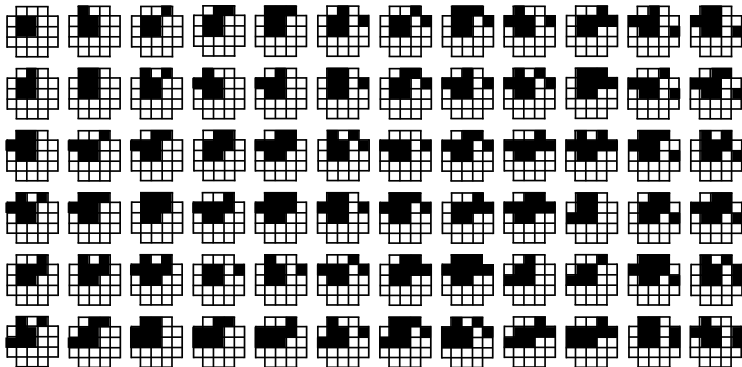
- Générer tous les échantillons binaires portés par un 20-voisinage.
- Générer l'ensemble P contenant des échantillons dont le point central est topologiquement invariant.
- Vérifier l'invariance topologique pour chaque pixel de l'image donnée en utilisant P .

La vérification est réalisée en temps linéaire par rapport à la taille de l'image.

Utilisation d'une look-up table

Parmi les 124 260 échantillons binaires (hors symétries), il y a

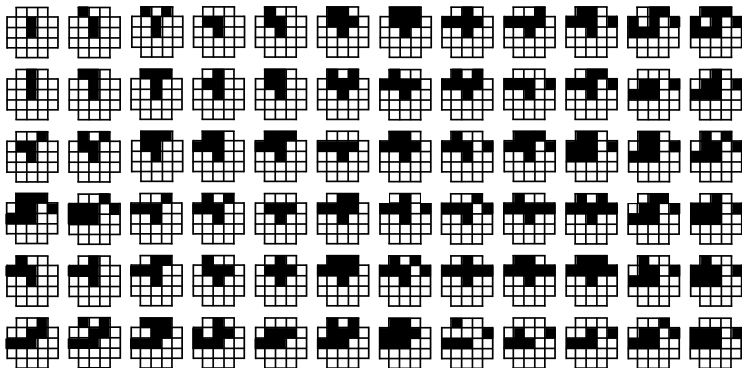
- 10 644 échantillons dans P_4 pour la (4, 8)-adjacence.



Utilisation d'une look-up table

Parmi les 124 260 échantillons binaires (hors symétries), il y a

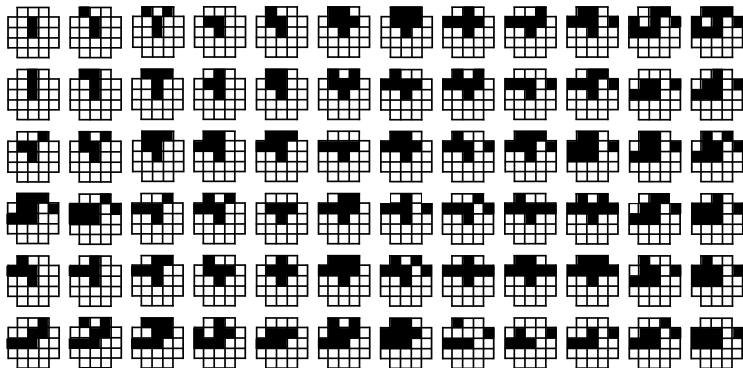
- 10 644 échantillons dans P_4 pour la (4, 8)-adjacence.
- 10 752 échantillons dans P_8 pour la (8, 4)-adjacence.



Utilisation d'une look-up table

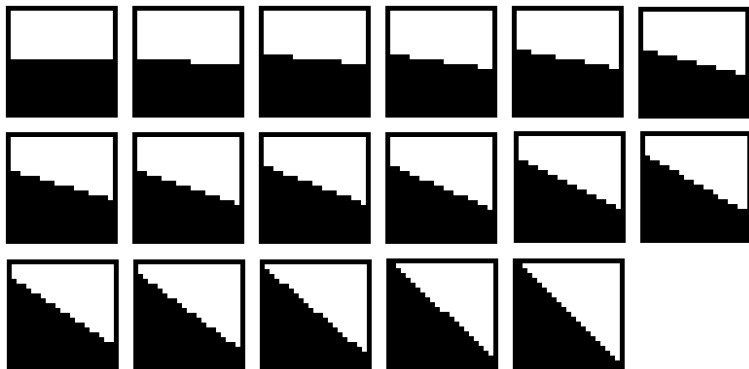
Parmi les 124 260 échantillons binaires (hors symétries), il y a

- 10 644 échantillons dans P_4 pour la (4, 8)-adjacence.
- 10 752 échantillons dans P_8 pour la (8, 4)-adjacence.



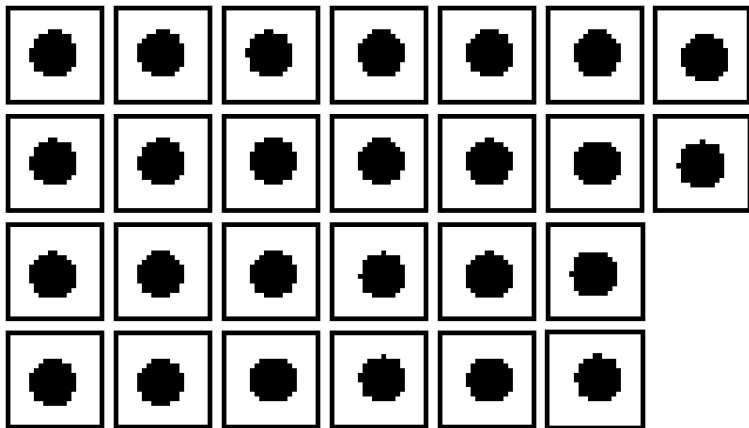
Conditions suffisantes pour l'invariance topologique.

Expérience avec des semi-plans



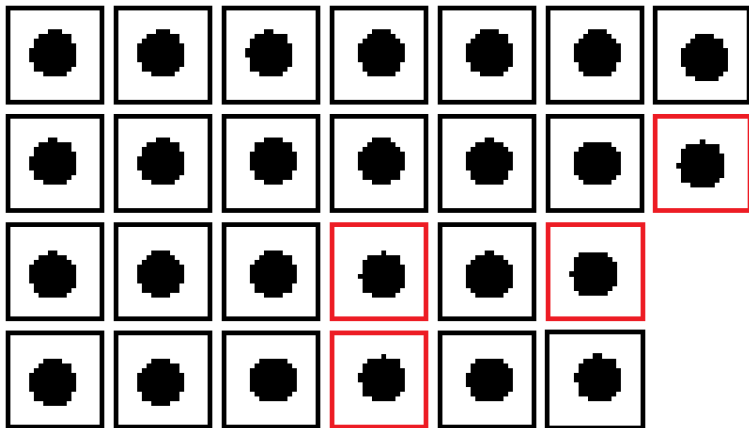
Les semi-plans centrés générés dans une image de taille 21×21 .

Expérience avec des disques



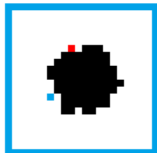
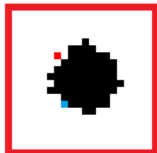
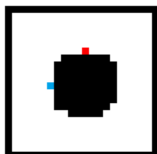
Disques numérisés de rayon 11 dont le centre est à l'intérieur du pixel central.

Expérience avec des disques

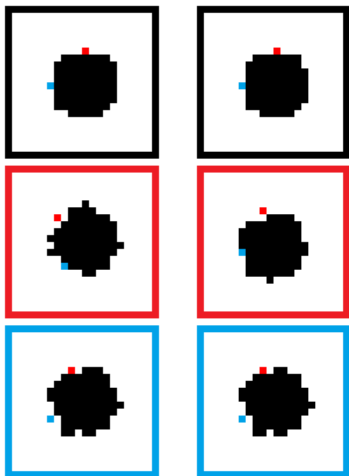


Disques numérisés de rayon 11 dont le centre est à l'intérieur du pixel central.

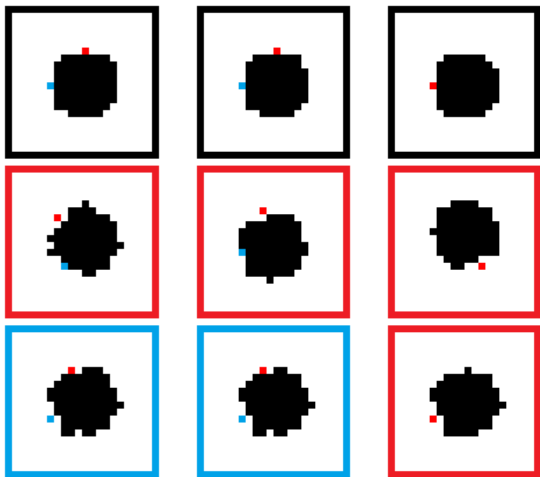
Expérience avec des disques



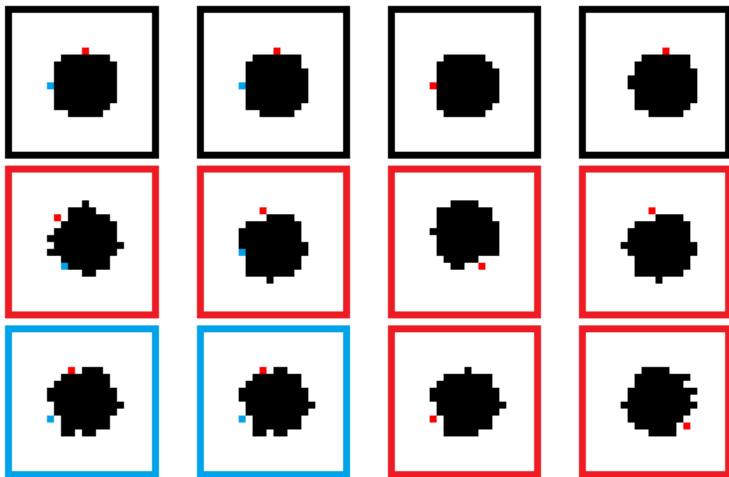
Expérience avec des disques



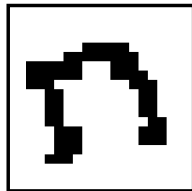
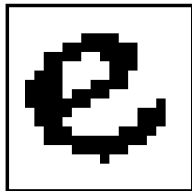
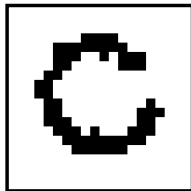
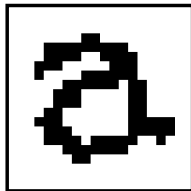
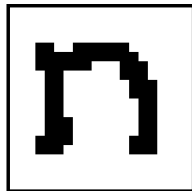
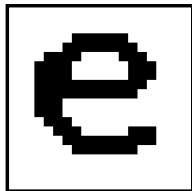
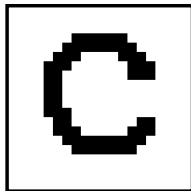
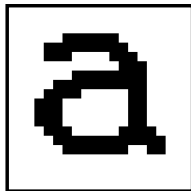
Expérience avec des disques



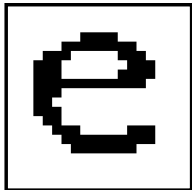
Expérience avec des disques



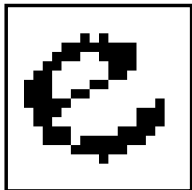
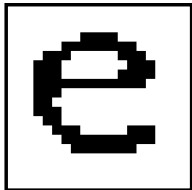
Expérience avec les caractères : invariance topologique



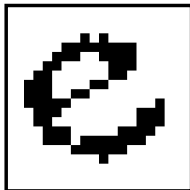
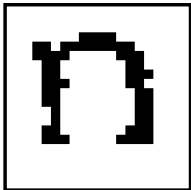
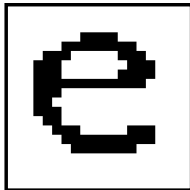
Expérience avec les caractères: variance topologique



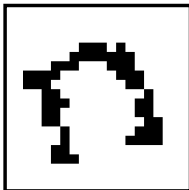
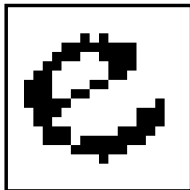
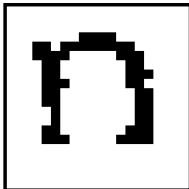
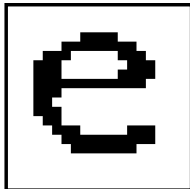
Expérience avec les caractères: variance topologique



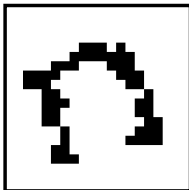
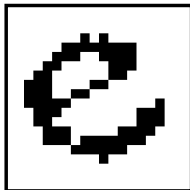
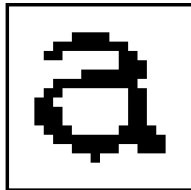
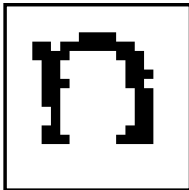
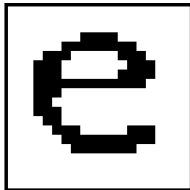
Expérience avec les caractères: variance topologique



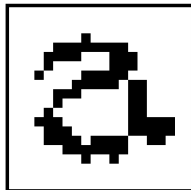
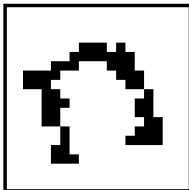
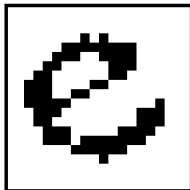
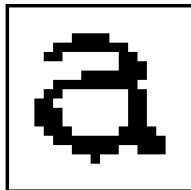
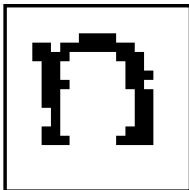
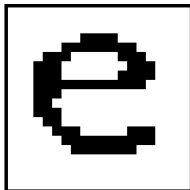
Expérience avec les caractères: variance topologique



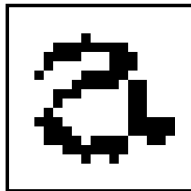
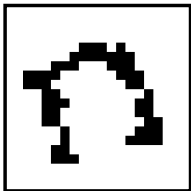
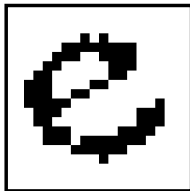
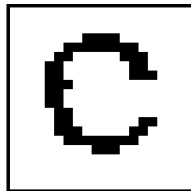
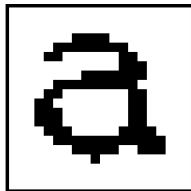
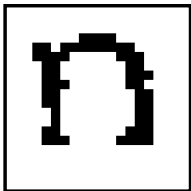
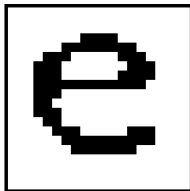
Expérience avec les caractères: variance topologique



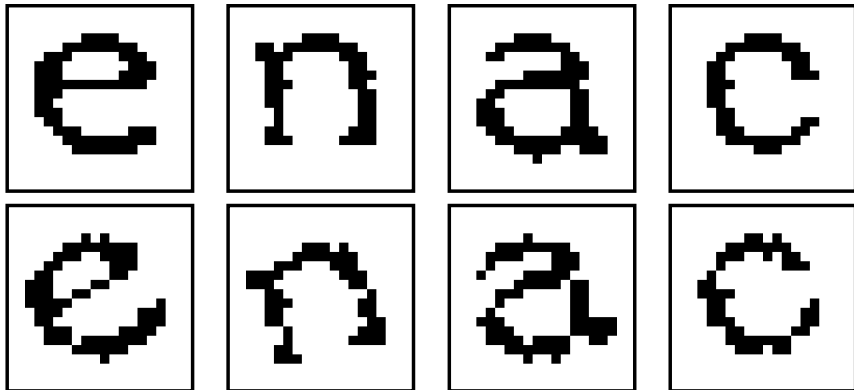
Expérience avec les caractères: variance topologique



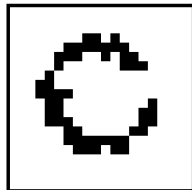
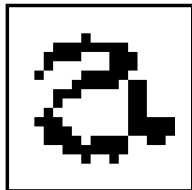
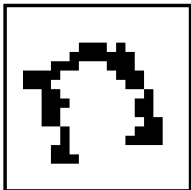
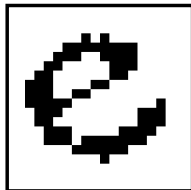
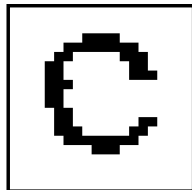
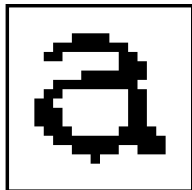
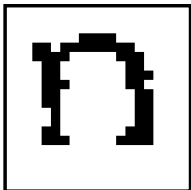
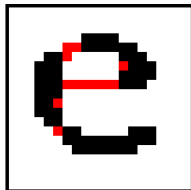
Expérience avec les caractères: variance topologique



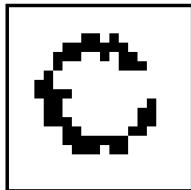
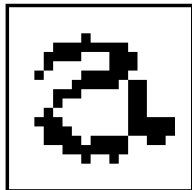
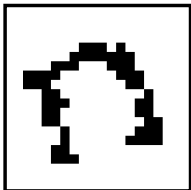
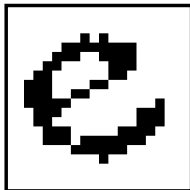
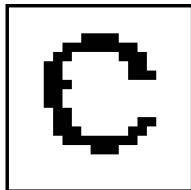
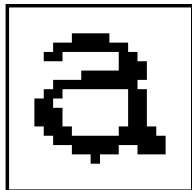
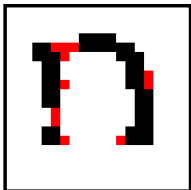
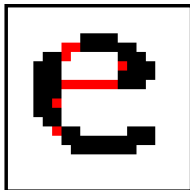
Expérience avec les caractères: variance topologique



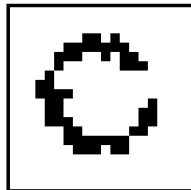
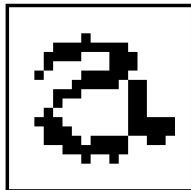
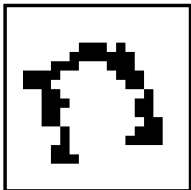
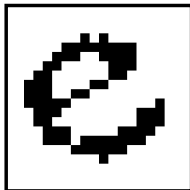
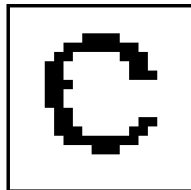
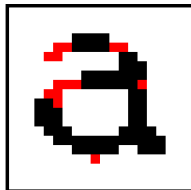
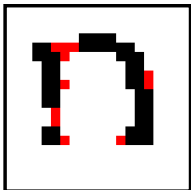
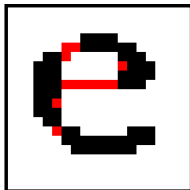
Expérience avec les caractères: variance topologique



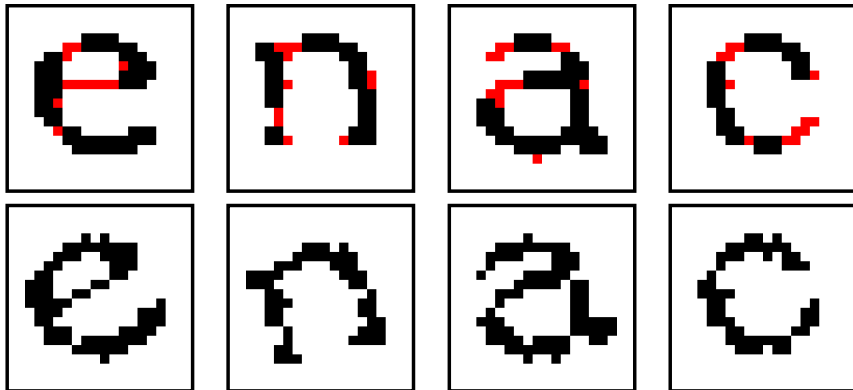
Expérience avec les caractères: variance topologique



Expérience avec les caractères: variance topologique



Expérience avec les caractères: variance topologique



Conclusion

- Nous avons proposé une version discrète des transformations rigides pour les images numériques 2D de taille $N \times N$.
- Nous avons défini un graphe représentant la structure combinatoire des transformations rigides discrètes.
- Nous avons utilisé ce graphe pour étudier les relations entre la géométrie et la topologie des images numériques.
- Nous avons proposé des conditions suffisantes et un algorithme linéaire pour évaluer l'invariance topologique de ces images.

Perspectives

- Généraliser les conditions de préservation à différents types d'images.
- Réparer les altérations topologiques des images.
- Utiliser le DRT graphe dans les applications de vision par ordinateur (recalage d'images).
- Étendre la structure et la méthode aux images 3D.

Merci pour votre attention

Vos questions, commentaires et suggestions sont les bienvenus