Préservation topologique des images numériques 2D par transformations rigides

Phuc Ngo[1] Yukiko Kenmochi[1] Nicolas Passat[2] Hugues Talbot[1]

[1] Université Paris-Est, LIGM, UPEMLV-ESIEE-CNRS, France

[2] Université de Reims Champagne-Ardenne, CReSTIC, France

Journée Géométrie Discrète, 13 juin 2013

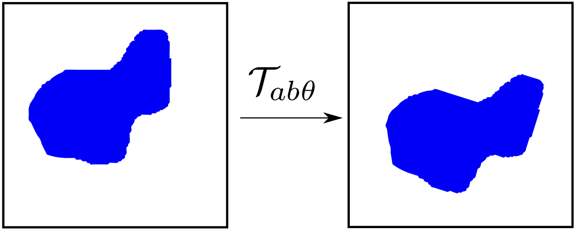
Transformation rigide

Définition

Une **transformation rigide** est une fonction $\mathcal{T}_{ab\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\cos\theta - q\sin\theta + a \\ p\sin\theta + q\cos\theta + b \end{pmatrix}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $(p, q), (p', q') \in \mathbb{R}^2$.



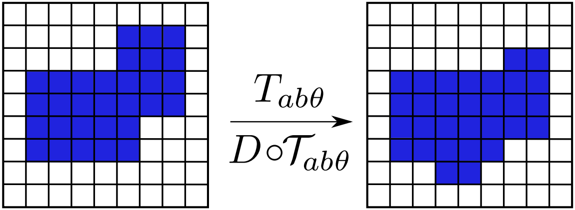
Transformation rigide digitalisée

Définition

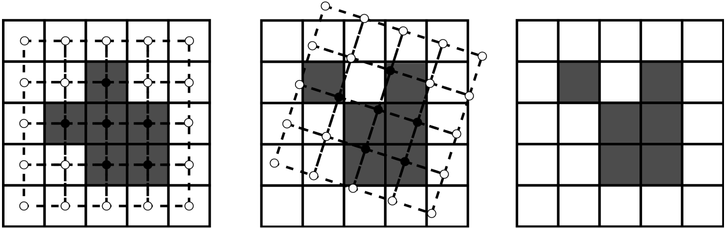
Une **transformation rigide digitalisée** est une fonction $T_{ab\theta} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [p\cos\theta - q\sin\theta + a] \\ [p\sin\theta + q\cos\theta + b] \end{pmatrix}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z}^2$.



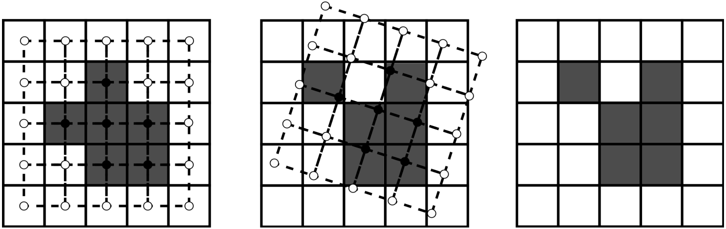
Motivation



La topologie n'est pas préservée lors de la numérisation de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{Z}^2$.

Problématiques

Motivation

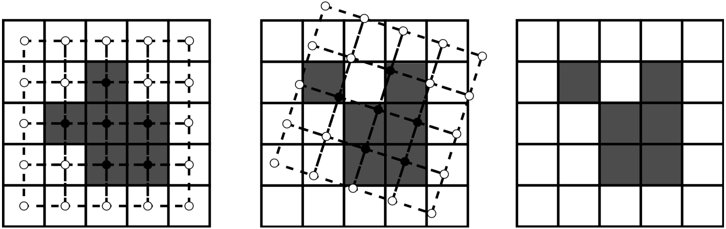


La topologie n'est pas préservée lors de la numérisation de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{Z}^2$.

Problématiques

- Existe-t-il des images binaires dont la topologie soit préservée par toutes les transformations rigides ?

Motivation

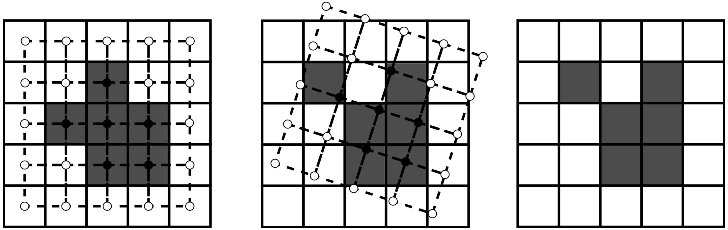


La topologie n'est pas préservée lors de la numérisation de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{Z}^2$.

Problématiques

- Existe-t-il des images binaires dont la topologie soit préservée par toutes les transformations rigides ?
- Pouvons-nous vérifier la préservation topologique d'une image ?

Motivation



La topologie n'est pas préservée lors de la numérisation de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{Z}^2$.

Problématiques

- Existe-t-il des images binaires dont la topologie soit préservée par toutes les transformations rigides ?
- Pouvons-nous vérifier la préservation topologique d'une image ?
- Quelles sont les conditions sur les images permettant de garantir la préservation de leurs propriétés topologiques ?

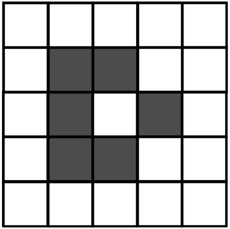
Plan de la présentation

1. Notions de base
2. Régularité : condition pour l'invariance topologique
3. Vérification de la régularité et pré-traitement d'images
4. Conclusion

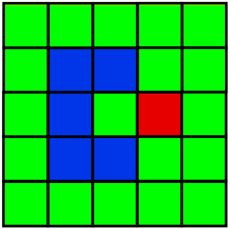
Adjacence duale

Définition

Une image I est une $(4, 8)$- (resp. $(8, 4)$-) image si la 4- (resp. 8-) adjacence est utilisée pour les pixels noirs (1) et la 8- (resp. 4-) adjacence est utilisée pour les pixels blancs (0).



$(4, 8)$-image

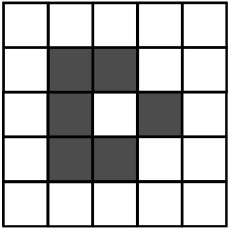


Composantes connexes

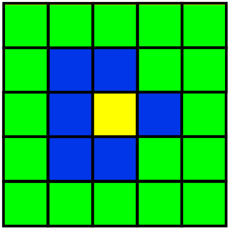
Adjacence duale

Définition

Une image I est une $(4,8)$- (resp. $(8,4)$-) image si la 4- (resp. 8-) adjacence est utilisée pour les pixels noirs (1) et la 8- (resp. 4-) adjacence est utilisée pour les pixels blancs (0).



$(8,4)$-image



Composantes connexes

Image well-composed (bien formée)

Définition

Une image est **well-composed** si chaque composante 8-connexe pour les pixels noirs (et blancs) est aussi une composante 4-connexe.

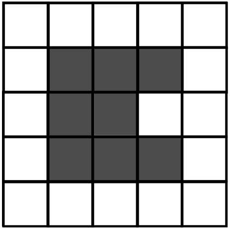
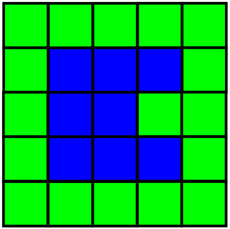


Image well-composed



Composantes 8-connexes

Image well-composed (bien formée)

Définition

Une image est **well-composed** si chaque composante 8-connexe pour les pixels noirs (et blancs) est aussi une composante 4-connexe.

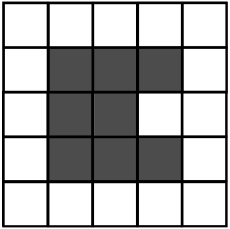
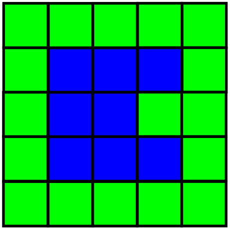


Image well-composed



Composantes 4-connexes

Image well-composed (bien formée)

Définition

Une image est **well-composed** si chaque composante 8-connexe pour les pixels noirs (et blancs) est aussi une composante 4-connexe.

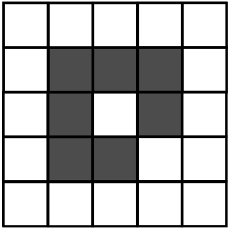
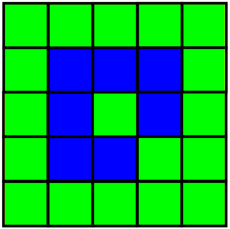


Image non well-composed



Composantes 8-connexes

Image well-composed (bien formée)

Définition

Une image est **well-composed** si chaque composante 8-connexe pour les pixels noirs (et blancs) est aussi une composante 4-connexe.

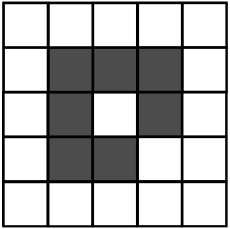
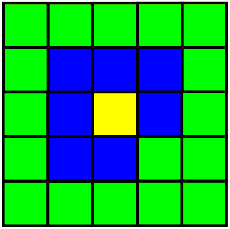


Image non well-composed



Composantes 4-connexes

Image well-composed (bien formée)

Propriétés

- Pas de paradoxe topologique lié au théorème de Jordan.
- Caractérisation par l'étude des échantillons 2×2.

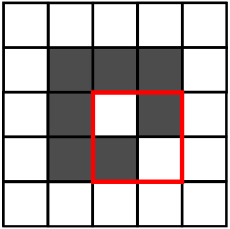
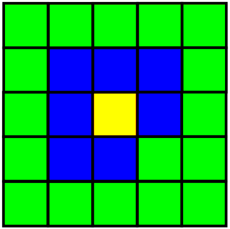


Image non well-composed



Composantes 4-connexes

Invariance topologique

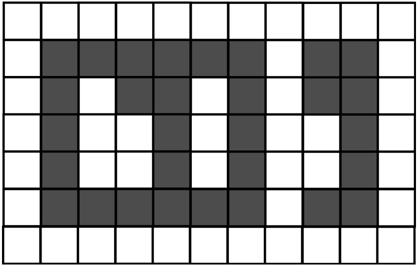
Définition

Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides digitalisées ont le même arbre d'adjacence que I.

Invariance topologique

Définition

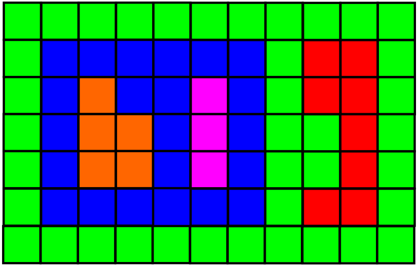
Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides digitalisées ont le même arbre d'adjacence que I.

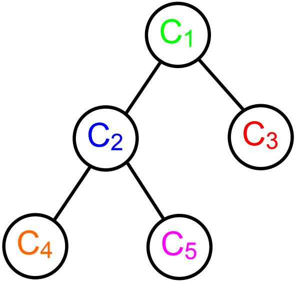


Invariance topologique

Définition

Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides digitalisées ont le même arbre d'adjacence que I.

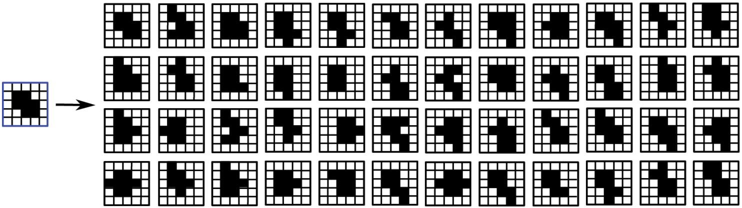




Invariance topologique

Définition

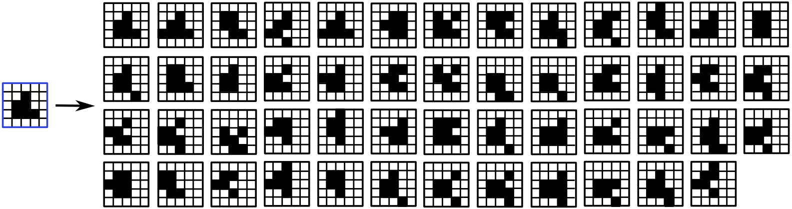
Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides digitalisées ont le même arbre d'adjacence que I.



Invariance topologique

Définition

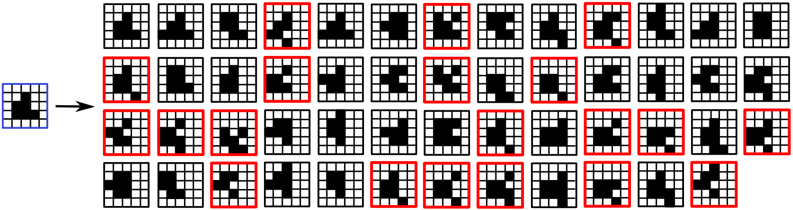
Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides digitalisées ont le même arbre d'adjacence que I.



Invariance topologique

Définition

Une image I est **topologiquement invariante** si ses images transformées par toutes les transformations rigides digitalisées ont le même arbre d'adjacence que I.



Singularité

Définition

Une image I est **singulière** s'il existe un pixel $\mathbf{p} \in I$ tel que pour tout pixel $\mathbf{q} \in I$, nous avons

$$\mathbf{p} \frown_4 \mathbf{q} \Rightarrow I(\mathbf{p}) \neq I(\mathbf{q})$$

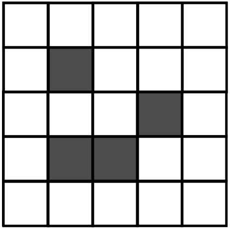


Image singulière

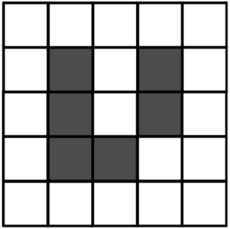


Image non singulière

Singularité

Définition

Une image I est **singulière** s'il existe un pixel $\mathbf{p} \in I$ tel que pour tout pixel $\mathbf{q} \in I$, nous avons

$$\mathbf{p} \frown_4 \mathbf{q} \Rightarrow I(\mathbf{p}) \neq I(\mathbf{q})$$

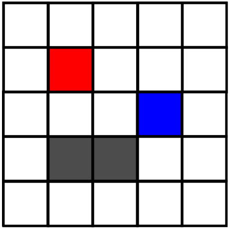


Image singulière

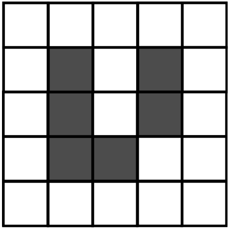


Image non singulière

Régularité

Définition

L'image I est 1- (resp. 0-) **régulière** si I est well-composed, non-singulière et si $\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in I$ tels que $I^{-1}(\mathbf{p}) = I^{-1}(\mathbf{q}) = 1$ (resp. 0), nous avons

$$\mathbf{p} \frown_4 \mathbf{q} \Rightarrow \left(\exists \boxplus \subseteq I^{-1}(\{1\}(\text{resp. } \{0\})), \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \boxplus\right)$$

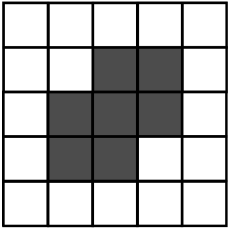


Image régulière

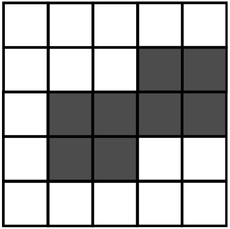


Image non régulière

Régularité

Définition

L'image I est 1- (resp. 0-) **régulière** si I est well-composed, non-singulière et si $\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in I$ tels que $I^{-1}(\mathbf{p}) = I^{-1}(\mathbf{q}) = 1$ (resp. 0), nous avons

$$\mathbf{p} \frown_4 \mathbf{q} \Rightarrow \left(\exists \boxplus \subseteq I^{-1}(\{1\}(\text{resp. } \{0\})), \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \boxplus\right)$$

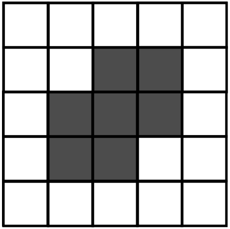


Image régulière

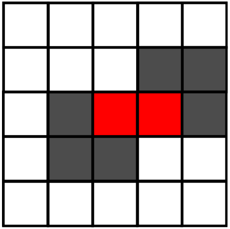
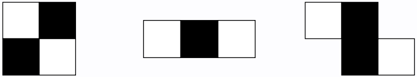


Image non régulière

Régularité

Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

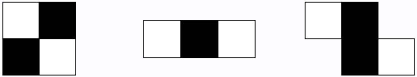


$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

Régularité

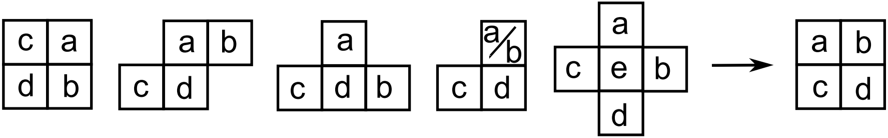
Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

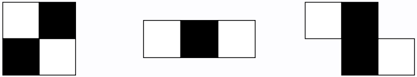
L'idée de la preuve :



Régularité

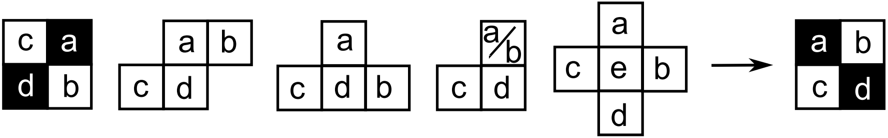
Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

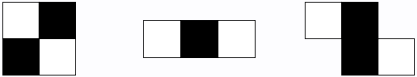
L'idée de la preuve :



Régularité

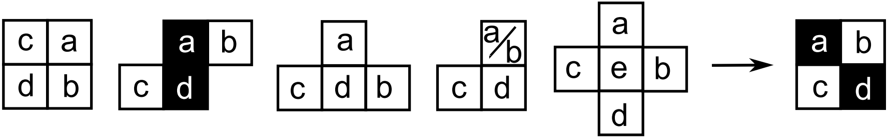
Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

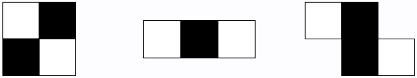
L'idée de la preuve :



Régularité

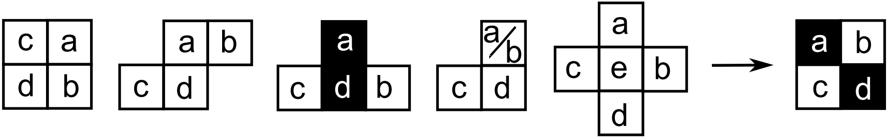
Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

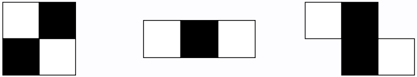
L'idée de la preuve :



Régularité

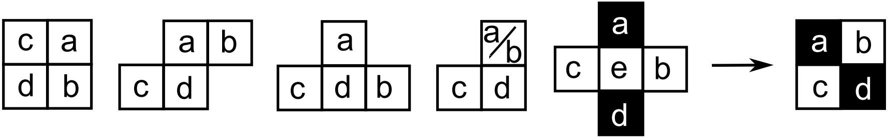
Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

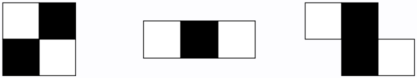
L'idée de la preuve :



Régularité

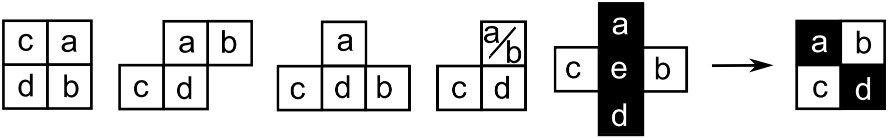
Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

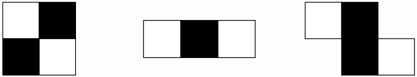
L'idée de la preuve :



Régularité

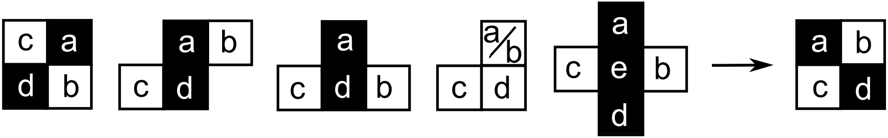
Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

L'idée de la preuve :



Invariance topologique

Proposition

Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

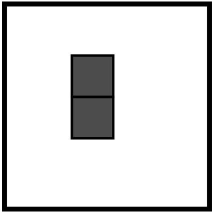
Invariance topologique

Proposition

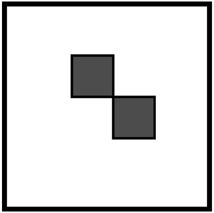
Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 1

Soit I une image regulière. La transformation rigide T établit un homomorphisme de $((I \circ T)^{-1}\{1\}, \frown_4)$ vers $(I^{-1}\{1\}, \sim_4)$ et de $((I \circ T)^{-1}\{0\}, \frown_4)$ vers $(I^{-1}\{0\}, \sim_4)$.



$I \circ T$



I

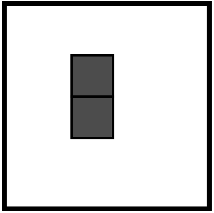
Invariance topologique

Proposition

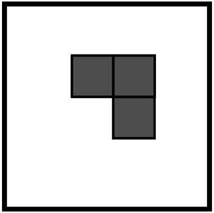
Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 1

Soit I une image regulière. La transformation rigide T établit un homomorphisme de $((I \circ T)^{-1}\{1\}, \frown_4)$ vers $(I^{-1}\{1\}, \sim_4)$ et de $((I \circ T)^{-1}\{0\}, \frown_4)$ vers $(I^{-1}\{0\}, \sim_4)$.



$I \circ T$



I

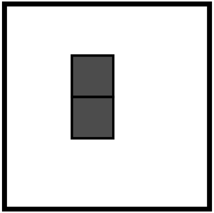
Invariance topologique

Proposition

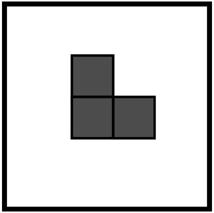
Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 1

Soit I une image regulière. La transformation rigide T établit un homomorphisme de $((I \circ T)^{-1}\{1\}, \frown_4)$ vers $(I^{-1}\{1\}, \sim_4)$ et de $((I \circ T)^{-1}\{0\}, \frown_4)$ vers $(I^{-1}\{0\}, \sim_4)$.



$I \circ T$



I

Invariance topologique

Proposition

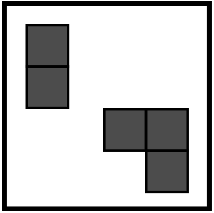
Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 2

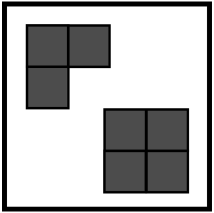
Soit $\mathfrak{T}_I$ la fonction définie par

$$\left|\begin{array}{lcccl} \mathfrak{T}_I & : & \mathcal{C}[I \circ T] & \to & \mathcal{C}[I] \\ & & C & \mapsto & \mathfrak{T}_I(C) \supseteq T^{-1}(C) \end{array}\right.$$

Si l'image I est régulière, alors $\mathfrak{T}_I$ est bijective.



$I \circ T$



I

Invariance topologique

Proposition

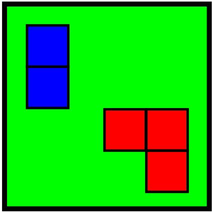
Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 2

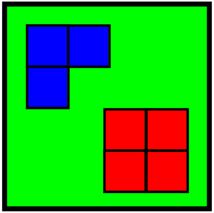
Soit $\mathfrak{T}_I$ la fonction définie par

$$\left| \begin{array}{lcccl} \mathfrak{T}_I & : & \mathcal{C}[I \circ T] & \rightarrow & \mathcal{C}[I] \\ & & C & \mapsto & \mathfrak{T}_I(C) \supseteq T^{-1}(C) \end{array} \right.$$

Si l'image I est régulière, alors $\mathfrak{T}_I$ est bijective.



$I \circ T$



I

Invariance topologique

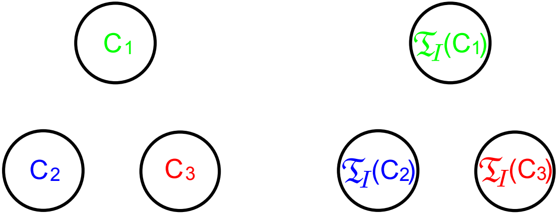
Proposition

Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 3

Si l'image I est régulière, alors $\mathfrak{T}_I$ établit un isomorphisme entre $(\mathcal{C}_{I \circ T}, \frown_4)$ et $(\mathcal{C}_I, \frown_4)$. Soit I une image regulière, T une transformation rigide et $C_1, C_2 \in \mathcal{C}[I \circ T]$. Nous avons

$$\left(C_1 \frown_{I \circ T} C_2\right) \iff \left(\mathfrak{T}_I(C_1) \frown_I \mathfrak{T}_I(C_2)\right)$$



Invariance topologique

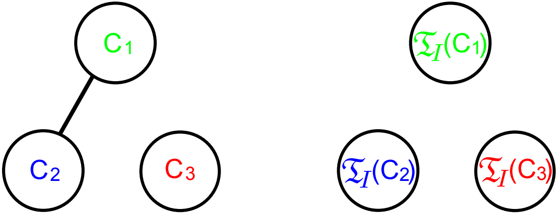
Proposition

Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 3

Si l'image I est régulière, alors $\mathfrak{T}_I$ établit un isomorphisme entre $(\mathcal{C}_{I\circ T}, \frown_4)$ et $(\mathcal{C}_I, \frown_4)$. Soit I une image regulière, T une transformation rigide et $C_1, C_2 \in \mathcal{C}[I \circ T]$. Nous avons

$$\left(C_1 \frown_{I\circ T} C_2\right) \iff \left(\mathfrak{T}_I(C_1) \frown_I \mathfrak{T}_I(C_2)\right)$$



$I \circ T$ $\qquad$ I

Invariance topologique

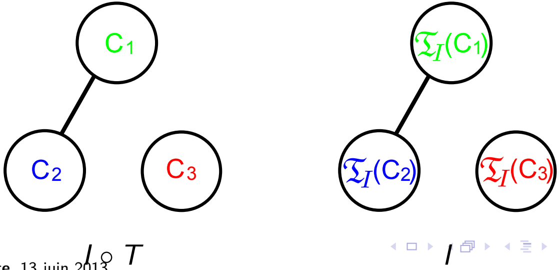
Proposition

Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 3

Si l'image I est régulière, alors $\mathfrak{T}_I$ établit un isomorphisme entre $(\mathcal{C}_{I\circ T}, \frown_4)$ et $(\mathcal{C}_I, \frown_4)$. Soit I une image regulière, T une transformation rigide et $C_1, C_2 \in \mathcal{C}[I \circ T]$. Nous avons

$$\left(C_1 \frown_{I\circ T} C_2\right) \Longleftrightarrow \left(\mathfrak{T}_I(C_1) \frown_I \mathfrak{T}_I(C_2)\right)$$



Invariance topologique

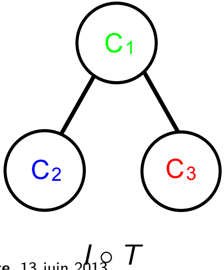
Proposition

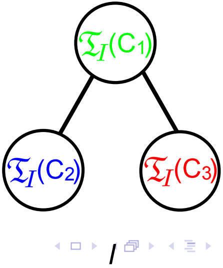
Si l'image I est régulière, alors elle est topologiquement invariante.

Lemme 3

Si l'image I est régulière, alors $\mathfrak{T}_I$ établit un isomorphisme entre $(\mathcal{C}_{I\circ T}, \frown_4)$ et $(\mathcal{C}_I, \frown_4)$. Soit I une image regulière, T une transformation rigide et $C_1, C_2 \in \mathcal{C}[I \circ T]$. Nous avons

$$\left(C_1 \frown_{I\circ T} C_2\right) \Longleftrightarrow \left(\mathfrak{T}_I(C_1) \frown_I \mathfrak{T}_I(C_2)\right)$$

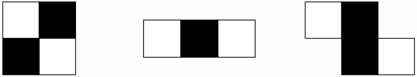




Vérification de l'invariance topologique

Propriété

Une image regulière ne contient aucune des configurations $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

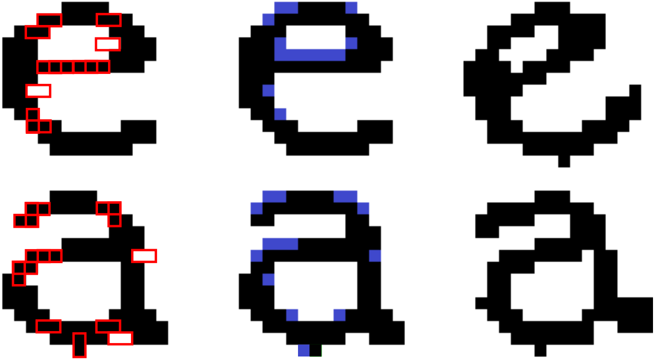


$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

Pré-traitement de l'invariance topologique des images

Méthode itérative

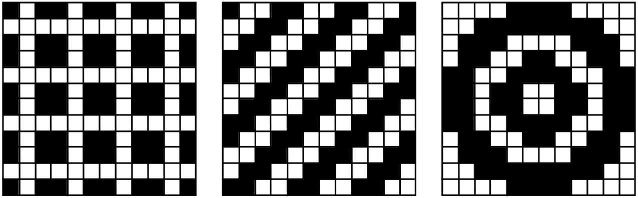
Nous modifions progressivement I de telle sorte que la régularité soit satisfaite.



Pré-traitement de l'invariance topologique des images

Méthode itérative

Nous modifions progressivement I de telle sorte que la régularité soit satisfaite.



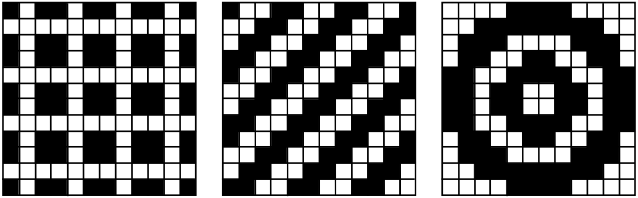
Échec pour la méthode itérative.

Pré-traitement de l'invariance topologique des images

Méthode itérative

Nous modifions progressivement I de telle sorte que la régularité soit satisfaite.

$\Longrightarrow$ **La méthode itérative ne fonctionne pas toujours !**



Échec pour la méthode itérative.

Pré-traitement de l'invariance topologique des images

Méthode par sur-échantillonnage

En doublant la résolution, c-à-d, en associant un carré 2×2 pour chaque pixel initial, une image well-composed devient régulière.

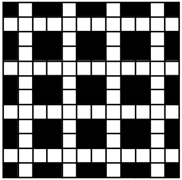


Image orignale

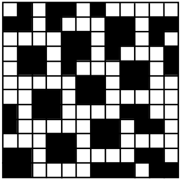


Image transformée

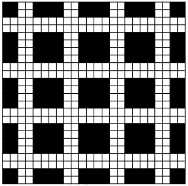


Image régulière

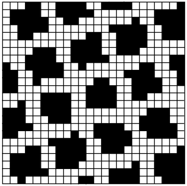


Image régulière transformée

Extension : image à niveaux de gris

Une image à niveaux de gris I est modélisée par l'ensemble fini des images binaires $\lambda_v(I)$ définies pour tout $v \in \mathbb{G}$, où $\mathbb{G}$ est l'ensemble des niveaux de gris dans I

$$\left| \begin{array}{lcll} \lambda_v(I) & : & \mathbb{Z}^2 & \to & \{0,1\} \\ & & \mathbf{p} & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } v \leqslant I(\mathbf{p}) \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \end{array} \right.$$

Définition

Une image à niveaux de gris I est **topologiquement invariante** si pour tout $v \in \mathbb{G}$, $\lambda_v(I)$ est topologiquement invariante.

Expérience : image à niveaux de gris

Image originale

Image régulière

Image transformée

Image régulière transformée

Expérience : image à niveaux de gris


Image originale

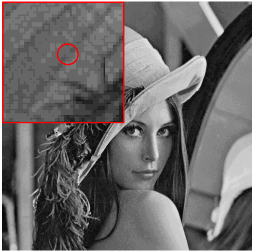


Image régulière

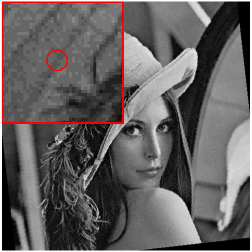


Image transformée

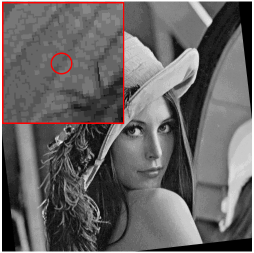


Image régulière transformée

Expérience : image à niveaux de gris

Image originale

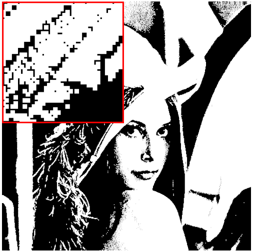


Image régulière

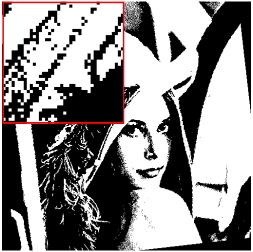


Image transformée

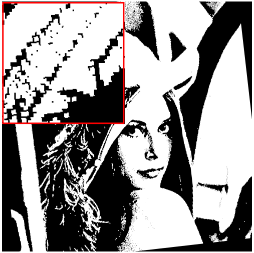


Image régulière transformée

Expérience : image à niveaux de gris

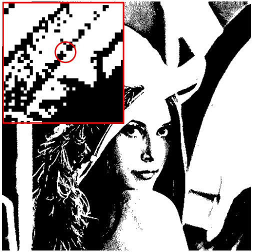


Image originale

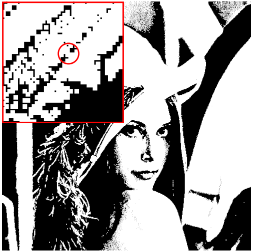


Image régulière

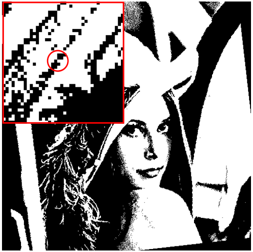


Image transformée

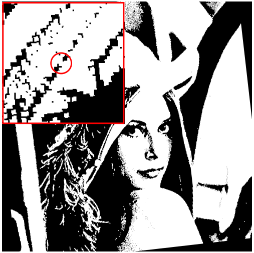


Image régulière transformée

Extension : image de labels

Une image de labels I est modélisée par l'ensemble fini des images binaires $\chi_\Lambda(I)$ définies pour tout $\Lambda \in 2^{\mathbb{L}}$, où $\mathbb{L}$ est l'ensemble des labels de I

$$\left| \begin{array}{cccc} \chi_\Lambda(I) & : & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \{0,1\} \\ & & \mathbf{p} & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } I(\mathbf{p}) \in \Lambda \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \end{array} \right.$$

Définition

Une image de labels I est **topologiquement invariante** si pour tout $\Lambda \in 2^{\mathbb{L}}$, $\chi_\Lambda(I)$ est topologiquement invariante.

Expérience : image de labels

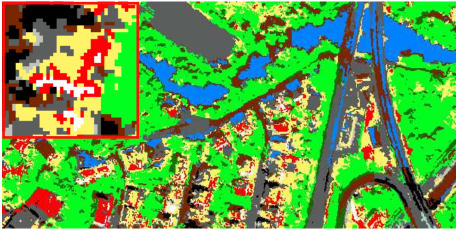


Image originale

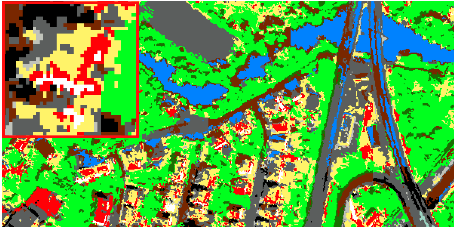


Image régulière

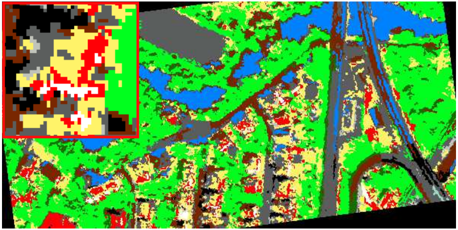


Image transformée

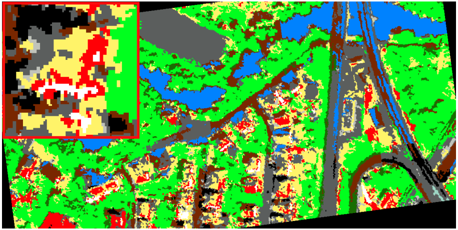


Image régulière transformée

Expérience : image de labels

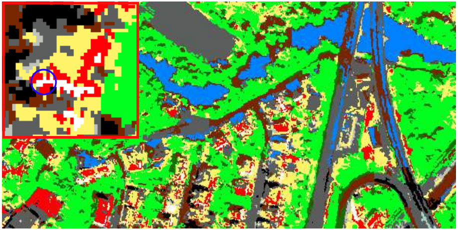


Image originale

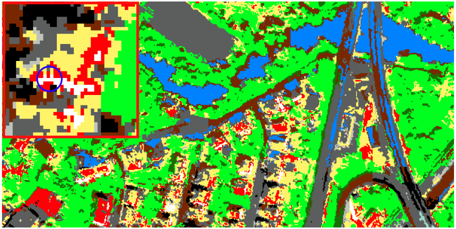


Image régulière

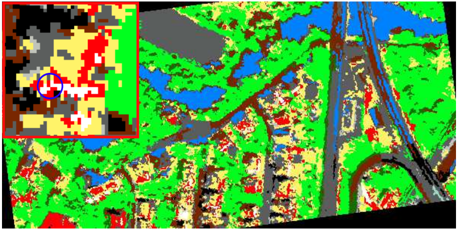


Image transformée

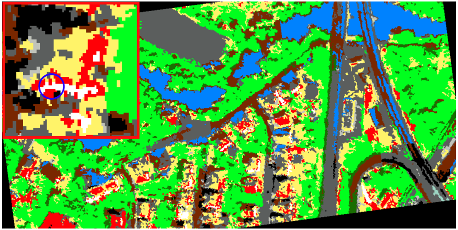


Image régulière transformée

Expérience : image de labels

Image originale

Image régulière

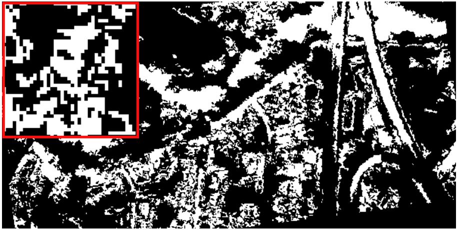


Image transformée

Image régulière transformée

Expérience : image de labels

Image originale

Image régulière

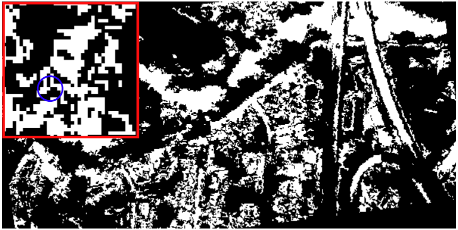


Image transformée

Image régulière transformée

Conclusion

Conclusion

- Proposition d'une notion de régularité impliquant l'invariance topologique.
- Obtention d'un algorithme simple et de complexité optimale pour l'analyse et la préservation de l'invariance topologique.
- Extension de ces résultat aux $(4, 8)$- and $(8, 4)$- images, aux images à niveaux de gris et aux images de labels.

Conclusion

Conclusion

- Proposition d'une notion de régularité impliquant l'invariance topologique.
- Obtention d'un algorithme simple et de complexité optimale pour l'analyse et la préservation de l'invariance topologique.
- Extension de ces résultat aux $(4, 8)$- and $(8, 4)$- images, aux images à niveaux de gris et aux images de labels.

Perspectives

- Étendre la méthode aux images 3D.
- Prouver la réciproque.
- Optimiser la méthode itérative.

Merci pour votre attention

Vos questions, commentaires et suggestions sont les bienvenus.

[1] P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi, and H. Talbot, "Well-composed images and rigid transformations", accepted to International Conference on Image Processing (2013).

[2] P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi, and H. Talbot, "Topology-preserving rigid transformation of 2D digital images", submitted. (Hal 00795054)