Problèmes de mariages stables

Jérémie Dumas et Hugo Labrande
École Normale Supérieure de Lyon

Décembre 2011

Introduction

Le présent rapport présente le problème des mariages stables, tel qu'introduit en 1962 par Gale et Shapley [GS62]. Bien que son énoncé soit assez ancien, le problème a de nombreuses applications, que nous tâcherons d'illustrer brièvement. Nous présenterons donc dans un premier temps l'algorithme fondamental qui fut introduit dans l'article séminal de Gale et Shapley, avant de discuter de certaines extensions possibles du sujet.

1 Mariages stables, algorithme fondamental

Dans sa version la plus simple, on pourrait présenter le problème de la manière suivante : étant donné n hommes et n femmes, chacun ayant dressé une liste de préférence des personnes du sexe opposé (liste complète et sans égalités), trouver si possible un appariement (mariage) qui ait la propriété d'être stable. Un mariage est dit *instable* s'il contient deux couples $A\alpha$ et $B\beta$ tel que A préfère β à α, et β préfère A à B. On peut comparer cette notion aux équilibres de Nash, où les joueurs n'ont pas intérêt à changer de stratégie par rapport à l'état courant du système.

Étonnamment, il est toujours possible de trouver un mariage stable dans une telle situation. L'algorithme 1, celui proposé dans [GS62], fonctionne de la manière suivante : les hommes font des propositions de mariage à la femme qu'ils préfèrent et à qui ils n'ont pas fait une telle proposition, puis les femmes retiennent la meilleure proposition parmi celles qui lui sont faites, et ainsi de suite jusqu'à ce que ce tout le monde soit marié.

Cet algorithme termine en $\mathcal{O}(n^2)$ étapes et produit un mariage *stable* au sens défini précédemment. Le mariage obtenu est de plus *optimal* pour les hommes, au sens où chaque homme y est au moins aussi satisfait que dans n'importe quel autre mariage stable. Il existe aussi un algorithme dual, optimal pour les femmes. La preuve de cette propriété, détaillée dans [GS62], tient au fait que les hommes font des propositions en choisissant parmi toutes les femmes de leur liste, alors que les femmes n'ont qu'un choix restreint à chaque étape, dont elles conservent le meilleur élément.

Algorithme 1: Mariage stable

Entrées : Liste de préférence des hommes $L_{i,j}$, et des femmes $R_{j,i}$, n
Sorties : Un couplage stable
tant que *tout le monde n'est pas marié* **faire**
  pour α *homme libre* **faire**
    Proposer à la femme qu'il préfère et à qui il n'a pas encore demandé;
  pour *A femme (éventuellement déjà couplée à un homme α)* **faire**
    Conserver la meilleur offre (en comptant α) qui lui est faite, rejeter les autres;

2 Quelques applications

Compagnons de chambre Ou problème du mariage unisexe : n personnes doivent se partager des chambres de 2, et chaque personne dresse une liste de préférence parmi ses $n-1$ acolytes. On conserve la même notion de stabilité, mais cette fois il n'y a pas toujours de solution : prendre par exemple α, β, γ se préférant mutuellement et classant chacun δ en dernier. En 1985, Irving [RI85] proposa un algorithme en $\mathcal{O}(n^2)$ pour trouver un couplage stable s'il existe. L'algorithme procède en deux phases : une première étape des propositions et rejets comme dans l'algorithme 1, puis une phase de *rotations* où l'on transforme les choix effectués en un couplage valide.

Résidents / hôpitaux C'est le problème de l'admission à l'université, tel que posé au départ par Gale et Shapley. On remplace les hommes par des étudiants et les femmes par des universités, qui ont chacune une capacité d'accueil de q_i étudiants. L'algorithme 1 peut alors s'étendre à ce problème et trouver une solution stable optimale pour les étudiants. Utilisé depuis une cinquantaine d'année par le NRMP pour affecter des stages aux post-doc en médecine aux USA, cet algorithme a montré une réelle efficacité dans pratique.

Autres extensions Nous n'avons pas parlé dans ce court résumé d'autres applications étudiées dans la littérature : problème de mariage avec listes incomplètes, admissions en couples, étude en moyenne d'algorithmes de plus court chemin ou de recherche dans des tables de hachage [Knu76], etc. Une autre notion importante est celle de mécanisme *honnête* : un joueur a-t-il intérêt à tricher (mentir sur sa liste de préférence) ? Pas toujours : en réalité cela influera peu sur la nature du couplage obtenu.

Conclusion

La notion de mariages stables est intéressante, mais l'optimalité assez asymétrique pose également la question de la métrique utilisée. On pourrait chercher par exemple à minimiser la somme des mécontentements (problème d'assignement), à minimiser le regret de la personne la plus malheureuse [Knu76], etc.

Références

[GS62] D. Gale and L. S. Shapley. College Admissions and the Stability of Marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69 :9–15, 1962.

[Knu76] D.E. Knuth. *Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires : introduction à l'analyse mathématique des algorithmes.* Collection de la Chaire Aisenstadt. Presses de l'Université de Montréal, 1976.

[RI85] W. Robert and Irving. An efficient algorithm for the "stable roommates" problem. *Journal of Algorithms*, 6(4) :577 – 595, 1985.