Problèmes de mariages stables

Jérémie Dumas & Hugo Labrande

5 janvier 2012

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Mariages stables

- Données : n hommes et n femmes, listes de préférence.
  - Tout le monde est classé, pas d'égalité possible.
- Problème : former n couples qui ont la propriété de stabilité.
  - Un mariage est *non-stable* s'il y a deux couples (α, A) et (β, B) tels que α préfère B à A et β préfère A à B.
- Algorithme de Gale et Shapley (1962) pour le résoudre.

Un exemple

	A	B	C
α	1,3	2,2	3,1
β	3,1	1,3	2,2
γ	2,2	3,1	1,3

- 6 mariages possibles, 3 sont stables.
- Par exemple $(\gamma, A), (\alpha, B), (\beta, C)$ (tout le monde a son second choix) est stable.
- Mais aussi $(\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C)$ (les hommes obtiennent leur premier choix)...
- Et $(\beta, A), (\gamma, B), (\alpha, C)$ (les femmes obtiennent leur premier choix).

Variantes

Plusieurs variantes à ce problème :

- Étudiants et universités ("femmes polyandres"), i.e. les universités doivent choisir q_i étudiants.
  - Algorithme de Gale et Shapley.
- Compagnons de chambre ("mariage unisexe").
  - Pas toujours de solution, mais un algorithme pour trouver les solutions quand elles existent (Irving, 1985).
- Autres variantes : listes de préférences incomplètes, égalités, etc.
- Applications dans certains contextes : recherche dans les tables de hachage, plus court chemin, etc.

Plan de l'exposé

Algorithme de Gale-Shapley

Algorithme 1: Mariage stable

Entrées : Liste de préférence des hommes et des femmes, n
Sorties : Un couplage stable
tant que *tout le monde n'est pas marié* **faire**
  pour α *homme libre* **faire**
    Proposer à la femme qu'il préfère;
  pour *A femme (éventuellement déjà couplée à un homme* α*)* **faire**
    Conserver la meilleur offre, rejeter les autres;

- Complexité : polynomiale $\mathcal{O}(n^2)$

Stabilité des couplages

On montre que le couplage est stable :

- Supposons que André n'est pas marié à Becky mais préfère Becky à sa propre femme.
- Alors Becky est mieux classée que sa femme dans sa liste, ce qui veut dire que André lui a proposé le mariage avant de le proposer à sa femme.
- Mais André n'est pas marié à Becky, ce qui veut dire que nécessairement Becky a rejeté André à un moment du processus...
- ... ce qui veut dire qu'elle s'est alors appariée avec quelqu'un qu'elle préfère.
- André préfère Becky mais Becky ne préfère pas André à son mari : stabilité !

Optimalité du couplage

- Couplage optimal pour les hommes : ils y sont au moins aussi bien que dans n'importe quel autre couplage stable.
  - Preuve : si André est rejeté par Becky, il est moins bien classé dans les voeux de Becky que Charlie, et Charlie a été rejeté par toutes les autres femmes qu'il préfère à Becky.
  - Si on marie André et Becky, Becky préfèrerait être mariée à Charlie et Charlie est marié avec une femme moins bien classée que Becky : non-stabilité.
  - Pour tout couplage stable, André ne se marie pas avec Becky.
- Optimal pour les hommes car *plus de choix*.
- Algorithme dual pour les femmes.

Plan de l'exposé

Etudiants et universités

- Chaque université veut q_i étudiants, et a une liste de préférence (résultats aux concours ?) tout comme les étudiants (liste des voeux).
- Même algorithme que précédemment.
- Utilisé en pratique ? Cf. ci-après.

Résidents et hôpitaux

- Programme NRMP aux États-Unis, depuis plus de 50 ans.
- Variantes : candidature en couple (NP-dur),
- Plusieurs listes de préférence (pour l'année suivante).
- Solution efficace en pratique.

Compagnons de chambre

- Un seul groupe de personnes à apparier.
  - Tout le monde envoie et reçoit des propositions.
- Existence d'une solution non garantie !
  - α classe β en premier, β classe γ en premier, γ classe α en premier, γ est classé en dernier par tout le monde.
  - Pour tout appariement, celui qui habite avec γ voudra changer, et au moins une personne l'acceptera.

Camarades de chambrée

- Algorithme d'Irving (1985) :
  - Premier round similaire à Gale et Shapley.
  - Rotations sur les choix retenus pour transformer en un couplage valide.
- Complexité : $\mathcal{O}(n^2)$

Applications exotiques

Analyse en moyenne d'algorithmes :

- Plus courts chemins (Dijikstra).
- Recherche dans une table de hachage.

Mécanisme honnête

- Jeu multi-agents.
- Stratégie : liste de préférence.
- Stratégie dominante.
- Notions de mécanisme honnête.

Conclusion

- Algorithme efficace et utilisé dans la pratique.
- Peu d'intérêt à tricher.
- Différentes métriques :
  - Minimiser la “somme” des regrets (problème d'assignement).
  - Minimiser le regret de la personne la plus malheureuse.