Matrices d'intervalle et normes

Jérémie Dumas

École Normale Supérieure de Lyon

Janvier 2012

ENS DE LYON

Contexte

- Matrices d'invervalles $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$.
- Idée : étendre les opérations sur $\mathbb{R}^{m \times n}$ à $\mathbb{IR}^{m \times n}$.
- On sait déjà faire pour l'addition, la multiplication (plus compliqué).
- On veut faire de même pour la norme.
- Problème : comment la calculer efficacement ?
- Vu en cours : calcul de $\|A\|_{\infty,1}$ est NP-dur.

Résumé

- Calcul de $|||\mathbf{A}|||$ possible par un max sur 2^{mn} matrices en général.
- Calcul de $|||\mathbf{A}|||_2$ possible par un max sur 2^{m+n} matrices.
- Calcul de $|||\mathbf{A}|||_\alpha$ pour les normes absolues : une seule évaluation.

Définitions

- Matrice $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta] = \{A, \underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A}\}$.
- Opérations définies par $\mathbf{A} \diamond \mathbf{B} = \mathit{Hull}\{A \diamond B, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$.
- Pas vraiment un espace vectoriel (distributivité, inverse).

Norme de matrice d'intervalle

C'est une fonction $|||\cdot|||$: $\mathbb{IR}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall \mathbf{A}, |||\mathbf{A}||| \geqslant 0$ et $|||\mathbf{A}||| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = [0, 0]$
2. $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, |||\mathbf{A} + \mathbf{B}||| \leqslant |||\mathbf{A}||| + |||\mathbf{B}|||$
3. $\forall \mathbf{A}, \alpha, |||\alpha \mathbf{A}||| = |\alpha| \, |||\mathbf{A}|||$

Norme induite

Définition

Si $\|\cdot\|$ norme dans $\mathbb{R}^{m\times n}$, alors $|||\cdot||| : \mathbf{A} \to |||\mathbf{A}||| = \sup\{\|A\|, A \in \mathbf{A}\}$ est une norme de $\mathbb{IR}^{m\times n}$, appelée norme induite.

Caractérisation

$|||\cdot|||$ est une norme induite de matrice d'intervalle si et seulement si on a $\forall \mathbf{A}, |||\mathbf{A}||| = \max\{|||[A, A]|||, A \in \mathbf{A}\}$.

Démonstration.

Découle du fait que $\|A\| = |||[A, A]|||$ définit une norme sur $\mathbb{R}^{m\times n}$, qui sera la norme inductante de $|||\cdot|||$. $\square$

Calcul de la norme

Cas général

Notations

- $\circ$ produit composante par composante.
- Z matrices avec des ± 1 et $\mathbf{A} = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$.
- On note $A_Z = A_c + Z \circ \Delta$.

Théorème 1

Si $|||\cdot|||$ *induite par* $\|\cdot\|$, *alors* $|||\mathbf{A}||| = \max_{|Z|=[1]} \|A_Z\|$.

Démonstration

- $\mathbf{A}$ pavé de $\mathbb{IR}^{m \times n}$.
- $A = \sum_{|Z|} \lambda_Z A_Z$ avec $\lambda_Z \geqslant 0$ et $\sum \lambda_Z = 1$.
- D'où $\|A\| \leqslant \sum \lambda_Z \|A_Z\| \leqslant \max \|A_Z\|$, puis passage au sup.
- Réciproquement, les A_Z sont dans $\mathbf{A}$.

Norme quadratique

Définition

Norme quadratique $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2} \|Ax\|_2 = \sigma_{\max}(A)$.

Théorème 2

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \|A\|_2 = \max_{\|x_1\|_2 = \|x_2\|_2 = 1} x_1^T A x_2.$$

Démonstration.

Décomposition SVD de $A = XSY^T$.
Vecteurs $x_1 \in \mathbb{R}^m$ et $x_2 \in \mathbb{R}^n$ de $\|\cdot\|_2 = 1$. Alors :

$$x_1^T A x_2 = x_1'^T S x_2' \leqslant \sigma_{\max}(A) |x_1''|^T |x_2''| \leqslant \|A\|_2 \|x_1''\|_2 \|x_2''\|_2 \leqslant \|A\|_2$$

Réciproquement, on écrit $\|A\|_2$ sous la forme $\|A\|_2 = S_{1,1} = x_1'''^T A x_2'''$ qui montre que la borne est atteinte. $\square$

Norme quadratique

Théorème 3

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}, |||\mathbf{A}|||_2 = \max_{|y|=e_m,|z|=e_n} \|A_c + (yz^T)\circ\Delta\|_2.$$

Démonstration.

- Soit $A \in \mathbf{A}$. On a $x_1^T A x_2 \leqslant x_1^T A_c x_2 + |x_1|^T \Delta |x_2|$.
- On écrit alors $x_1^T A_c x_2 + |x_1|^T \Delta |x_2| = x_1^T (A_c + \mathrm{diag}(y)\Delta\mathrm{diag}(z))x_2$.
- y et z sont des vecteurs avec des ± 1 tel que $y_i = 1$ ssi $(x_1)_i \geqslant 0$.
- Or on voit que $\mathrm{diag}(y)\Delta\mathrm{diag}(z) = (yz^T)\circ\Delta$
- On déduit que $|||A|||_2 \leqslant \max\|A_c + (yz^T)\circ\Delta\|_2$.
- Réciproquement les $A_c + (yz^T)\circ\Delta$ sont dans $\mathbf{A}$.

$\square$

Normes absolues

Définitions

- Norme absolue si $\||A|\|_\alpha = \|A\|_\alpha$ pour toute matrice A.
- Exemples : $\|\cdot\|_\alpha$ pour $\alpha \in \{1, \infty, (1, \infty), F\}$.
- $\mathrm{sgn}(A_c)$ matrice telle que $\mathrm{sgn}(A_c)_{i,j} = 1$ si $(A_c)_{i,j} \geqslant 0$ et -1 sinon

Caractérisation

$\|\cdot\|$ norme absolue sur $\mathbb{R}^{m \times n}$ ssi $\forall A, B, |A| \leqslant |B| \Rightarrow \|A\| \leqslant \|B\|$.

Normes absolues

Théorème 4

Si $\|\cdot\|$ est une norme absolue, alors la norme induite $\|\!|\cdot|\!\|$ vérifie :

$$\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}, \|\!|\boldsymbol{A}|\!\| = \|A_c + \operatorname{sgn}(A_c) \circ \Delta\| = \||A_c| + \Delta\|$$

Démonstration.

Soit $A \in \mathbf{A} = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$.

1. $|A| = |A_c + A - A_c| \leqslant |A_c| + \Delta = ||A_c| + \Delta|$.
2. D'après la caractérisation : $\|A\| \leqslant \||A_c| + \Delta\|$.
3. Passage au sup : $\|\!|\mathbf{A}|\!\| \leqslant \||A_c| + \Delta\|$.
4. D'un autre côté : $|A_c| + \Delta = \operatorname{sgn}(A_c) \circ A_c + \Delta$.
5. On en déduit que : $|A_c| + \Delta = |A_c + \operatorname{sgn}(A_c) \circ \Delta|$.
6. Caractérisation : $\||A_c| + \Delta\| = \|A_c + \operatorname{sgn}(A_c) \circ \Delta\|$.

$\square$

Conclusion

Ouverture

- Le calcul de $|||\cdot|||_2$ est-t-il NP-dur ?
- Construire une norme sur $\mathbb{IR}^{m\times n}$ non induite ?

Merci de votre attention.