Road coloring

Jérémie Dumas

ENS de Lyon

15 décembre 2010

ENS DE LYON

Sommaire

Généralités
Définitions, théorème

Graphes apériodiques
Algorithme de reconnaissance

Théorème du Road Coloring

Conjecture de Černý

Cadre du problème

Définition

- Automate fini déterministe complet (AFDC) $\mathcal{A} = (V, \Sigma, \delta)$
- Étiquetage δ (coloration des arcs)
- Mot $w \in \Sigma^*$, fonction de transition δ_w

Définition (Coloration synchronisante)

- Ré-étiquetage δ' tel que $\exists w \in \Sigma^*$ tel que $\delta'_w(V) = \{x\}$
- w appelé un mot synchronisant
- G synchronisable si l'AFDC associé possède une coloration synchronisante

Énoncé du théorème

Théorème (*Road Coloring*)

Soit G un graphe k-admissible et fortement connexe. Alors :

$$G \text{ apériodique} \Leftrightarrow G \text{ synchronisable}$$

Définition (k-admissible)

G est k-admissible si $\forall v \in V, d^+(v) = k$

Définition (Graphe apériodique)

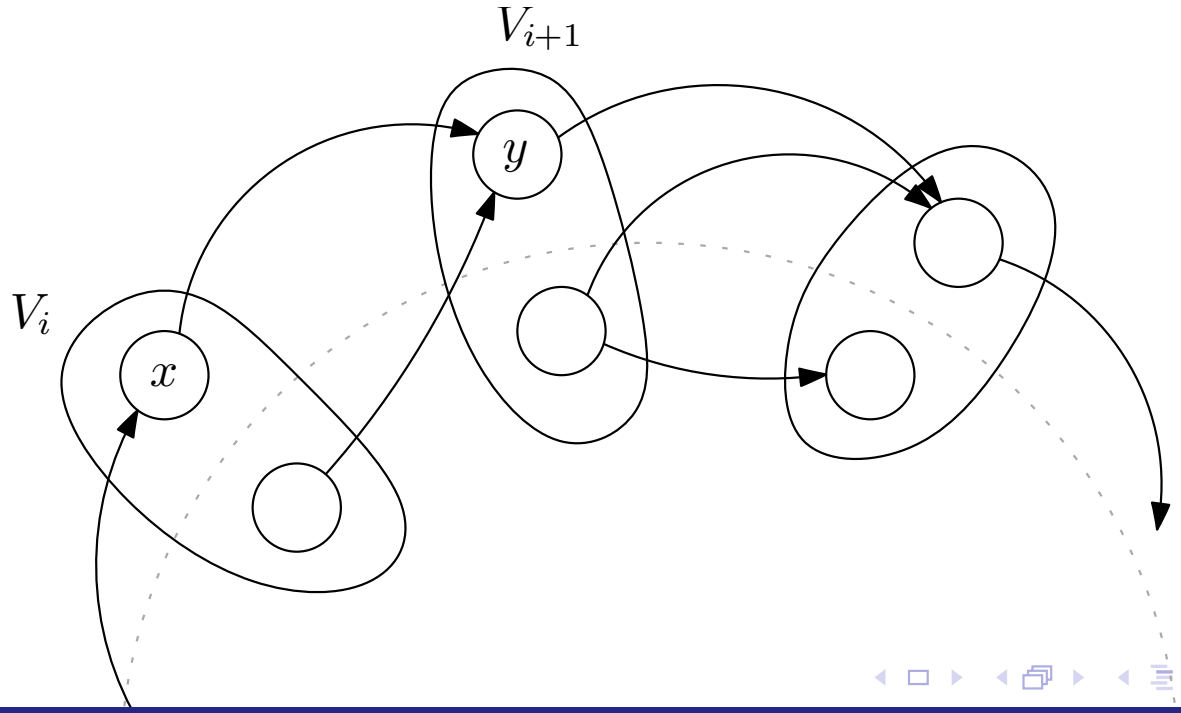
- Cyclicité de G : pgcd des longueurs de ses circuits.
- G apériodique si sa cyclicité vaut 1.

Un sens facile

Propriété

G périodique $\Leftrightarrow$ il existe une partition de V en $V_0, V_1, \ldots, V_d = V_0$ tel que $(x, y) \in E$ ssi $x \in V_i$ et $y \in V_{i+1}$

- Démonstration en utilisant $x \sim y \Leftrightarrow x \rightsquigarrow_k y, k \equiv 0[d]$



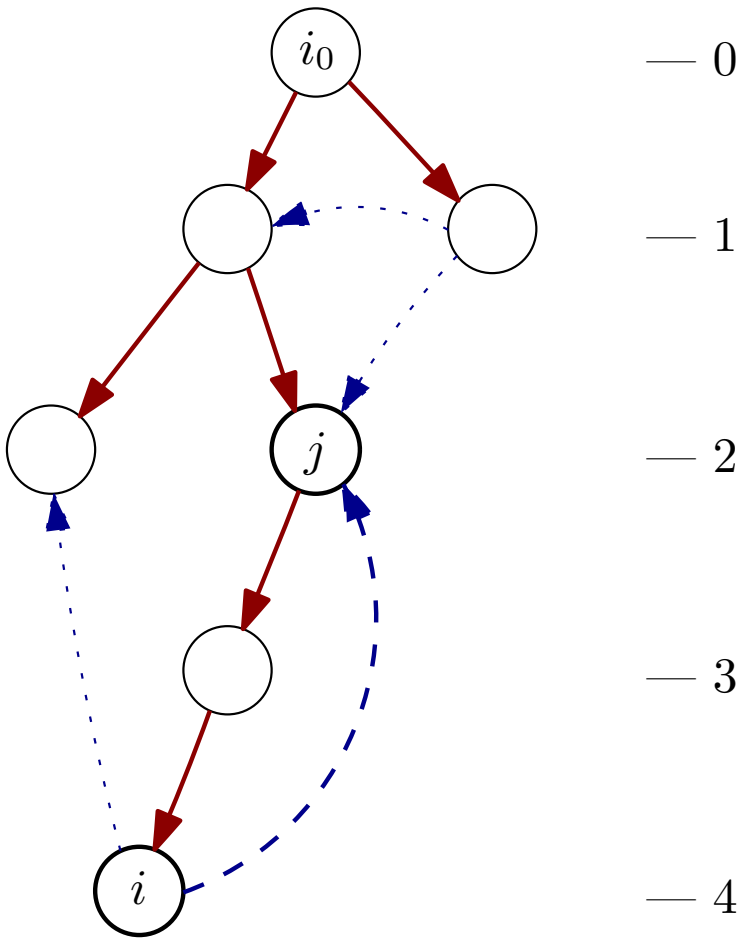
Idée générale

Description

- Parcours en largeur $\rightarrow$ arbre couvrant T
- Les arcs $\notin T \rightarrow$ créent des circuits
- $val(i,j) = level(i) - level(j) + 1 \geqslant 0$
- On a, $\forall e \in E$, le pgcd $d \mid val(e)$

Idée générale

Les différents niveaux obtenus



Présentation de l'algorithme

Reconnaissance des graphes apériodiques

Programme 1 (Complexité $\mathcal{O}(m + n \log n)$)

Entrée : G orienté fortement connexe.

Sortie : $pgcd(L_G)$ la cyclicité de G.

```
level ← BreadthFirstSearch(G, v0) /* v0 quelconque */
Pour (i, j) ∈ E faire
    val ← level(i) − level(j) + 1
    Si val > 0 alors
        g ← PGCD(val, g) /* Mise à jour */
    Fin Si
Fin Pour
Retourner g
```

Correction

Démonstration.

- Si $\alpha : x_0, \dots x_k$ est un cycle :

$$\begin{aligned} val(\alpha) &= \sum_{s=0}^{k-1} val(x_s, x_{s+1}) \\ &= level(x_0) - level(x_k) + l(\alpha) \\ &= l(\alpha) \end{aligned}$$

- Or $g \mid val(x_s, x_{s+1})$ par déf de g, donc $g \mid l(\alpha)$
- Ceci $\forall \alpha$, donc $g \mid d$ la cyclicité de G

$\square$

Historique

1. Formulation du problème (Adler et al., 1970).
2. Graphes avec un cycle de longueur première (O'Brien, 1981).
3. Coloration et vecteurs propres (Friedman, 1990).
4. Graphes eulériens (Kari, 2001).
5. Solution (Trahtman, 2007).

Exemples d'application

Stockage de données le coloriage définit un codage correspondant aux arcs du graphe. Un mot synchronisant permet de remettre le décodeur dans un état déterminé (Lind, Marcus, *Symbolic dynamics and coding*, Cambridge, 1995).

Conception automatisée dispositifs recevant des pièces orientées de façon arbitraire et les plaçant dans une orientation donnée (Eppstein, 1990).

Protocoles de communication suites de test pour vérifier si un protocole est conforme à sa spécification (Aho et al. 1991).

Cas des graphes eulériens

Définition (Graphe eulérien)

Graphe G orienté qui vérifie $\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v)$

Coloration totalement non synchronisante

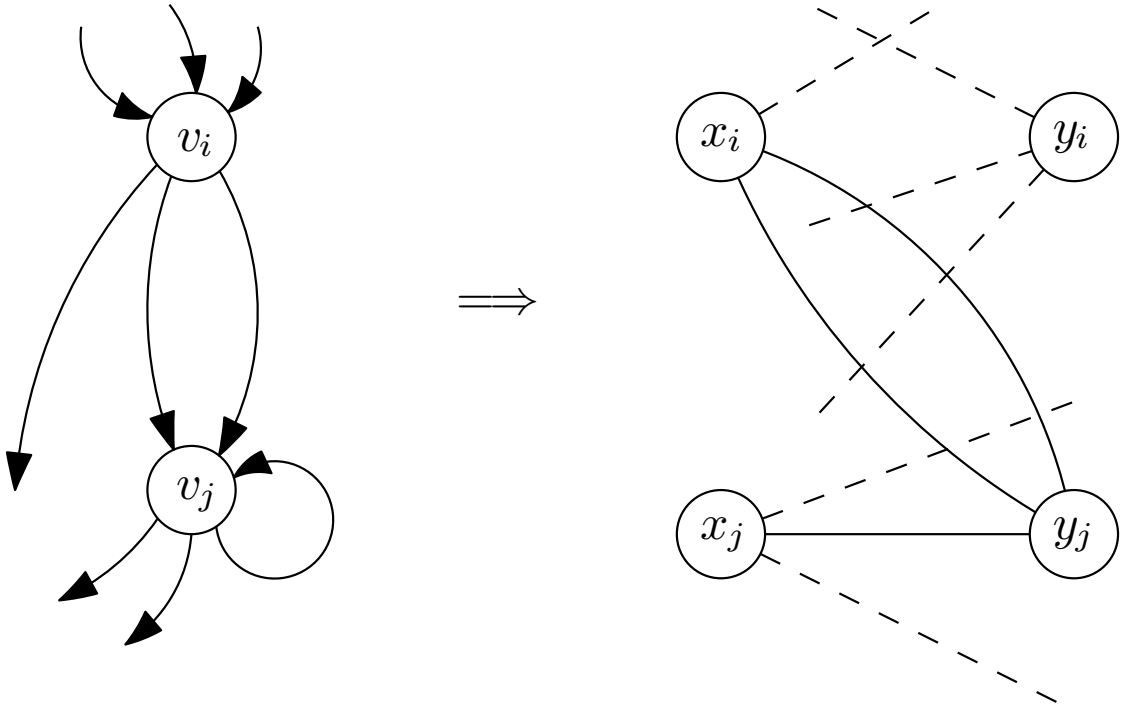
Coloration de G eulérien k-admissible avec k couleurs différentes sur chaque arc sortant et chaque arc entrant.

Démonstration.

- On transforme en un graphe biparti régulier.
- Théorème de Hall : il existe un couplage parfait.
- On enlève le cycle correspondant + récurrence.

$\square$

Transformation



Notions de paires stables

Relation d'équivalence, automate quotient

Définition (Paire stable)

$\{x, y\}$ est une paire stable si $\forall u \in \Sigma^*$, il existe un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $\delta_{uw}(x) = \delta_{uw}(y)$. On note $x \equiv y$.

Preuve du théorème du *Road Coloring*

- Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence.
- Partir d'une coloration totalement non synchronisante.
- Trouver deux sommets différents tel que $x \equiv y$.
- L'automate quotient $\mathcal{A}/\equiv$ est eulérien $\rightarrow$ récurrence.

Longueur minimale d'un mot synchronisant

Une question légitime

Le problème

Soit G un graphe synchronisable. Quelle est la longueur du plus petit mot synchronisant ?

Conjecture (Černý, 1964)

Le plus petit mot synchronisant a une longueur $\leqslant (n-1)^2$

Cas particuliers

Celui des graphes eulériens

Démonstration.

- Démonstration utilise des notions d'algèbre linéaire
- On assimile les éléments de V à la base canonique de $\mathbb{R}^n$
- $S \subseteq V$ représenté par la somme de ses éléments
- δ_a^{-1} devient un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$
- $\delta_w^{-1}(x) = (1, \ldots, 1)$ si w synchronise en x

$\square$

Conclusion

- Le *Road Coloring* c'est bien.
- Reconnaissance d'un graphe apériodique en temps $\mathcal{O}(m + n \log n)$
- Trouver un mot synchronisant : $O(n^3)$ (Trahtman, 2008)
- Problème ouvert : la conjecture de Černý

Merci de votre attention.