1 Problème introductif

Une escadrille de 4 avions effectue des missions au dessus du territoire ennemi. Elle y subit des pertes. Soit p la probabilité qu'un avion disparaisse. Elle ne part en misssion qu'avec 3 ou 4 avions ; sinon elle est mise au repos pendant que l'état major lui fournit d'autres avions. Chaque soir, s'il y a 0, 1 ou 2 avions valides, elle reçoit dans la nuit un avion en remplacement. On demande de décrire les états successifs de l'escadrille.

2 Solution

Les états du système sont représentés par le nombre d'avions en début de journée : E_1, E_2, E_3, E_4. Les transitions entre états ne dépendent pas du temps. Dans la figure 1, nous représentons par $q = 1 - p$ la probabilité qu'un avion revienne de mission. L'ensemble constitue bien une chaîne de Markov du premier ordre puisque l'état d'un jour donné ne dépend que de l'état du jour précédent, l'envoi de renfort éventuel répondant à une décision systématique dépendant des mêmes informations.

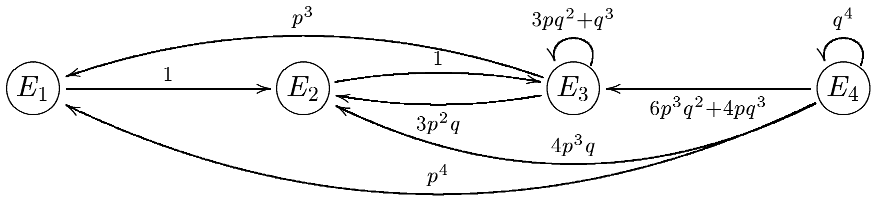

Figure 1: Graphe des états de l'escadrille

3 Justification : pourquoi des HMM ?

On ne peut pas observer directement les états.

Exemple

Le terrain d'aviation nous est interdit ; mais on peut fréquenter le bar de l'escadrille. A partir des observations faites dans le bar, on se pose le problème de savoir quel est l'état de l'escadrille ce jour là ou encore, quelle est la suite des états la plus probable au fils des jours précédents.

4 Comment ?

A chaque état est associé un ensemble d'observations faites dans le bar. On considère que l'état est représenté par une variable aléatoire Y_t dont on connaît la distribution. On verra plus tard comment obtenir cette distribution. La suite de variable Y_t constitue un deuxième processus stochastique appelé par la suite, `processus visible`, par opposition au processus caché constitué de la suite des états (*c.-à-d.* le nombre d'avions) de l'escadrille.

5 Reconnaître quoi ?

L'algorithme de Viterbi qui est un algorithme de programmation dynamique, donne la meilleure correspondance (état, observation) *c.-à-d.* la suite d'états s qui rende maximale la probabilité $prob(S = s/O = o)$. On cherche à classer des observations dans des états.

Exemple

- Dans le séquencage du génome, les états spécifient des zones stationnaires que l'on peut expliquer.

- Mise à jour de hiérarchies temporelles.

L'algorithme de Viterbi peut résoudre deux problèmes :
– retrouver la suite d'états la plus probable ;
– retrouver la suite de modèles la plus probable.

Ce deuxième problème arrive dans le cas suivant. Supposons que l'espion qui s'intéresse à l'évolution de l'escadrille sache que cette escadrille va changer d'avions pour en recevoir des moins vulnérables. La probabilité p d'être porté manquant va diminuer et passer de 0.33 à 0.25. L'espion désirerait connaître la date d'arrivée de ces nouveaux avions.

Le modèle associé est constitué de deux HMM connectés. Le premier correspond au HMM de la figure 1 avec une valeur de $p = 0.33$, le deuxième correspond au même HMM mais avec une valeur de $p = 0.25$. L'algorithme de Viterbi déterminera la meilleure suite d'états au travers des 2 modèles connectés. Un résultat secondaire sera la date ou le meilleur chemin sortira du premier modèle pour entrer dans le deuxième. Ce résultat constituera la réponse à la question de l'espion.