Grammaires formelles
Rappels mathématiques (suite et fin)

Karën Fort

karen.fort@sorbonne-universite.fr / https://members.loria.fr/KFort/

LETTRES SORBONNE UNIVERSITÉ

Quelques sources d'inspiration

par ordre d'importance décroissant

- (excellent) cours en ligne de J-F. Perrot (Paris 6), avec son accord : http://pagesperso-systeme.lip6.fr/Jean-Francois.Perrot/inalco/Automates/Cours2.html
- Mathématiques de base pour les linguistes (P. Goujon) – Hermann, Paris, 1975 (merci B. Habert !)
- Wikipédia, Algèbre_des_parties_d'un_ensemble (consultée le 4 oct. 2014)

Présentation et mise en perspective

3 opérations ensemblistes :

- union
- intersection
- complémentaire

liées aux opérations logiques de :

- disjonction (ou)
- conjonction (et)
- négation (non)

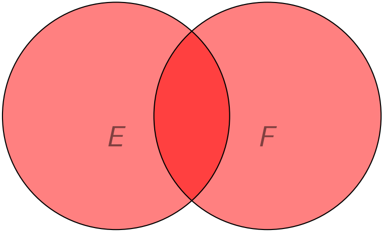
apparentées en algèbre à :

- addition
- multiplication
- soustraction

Union (ou réunion) d'ensembles

L'union de deux ensembles E et F est
l'ensemble des éléments de E et des éléments de F

Ce qui correspond à :
l'ensemble des éléments de E **ou** de F

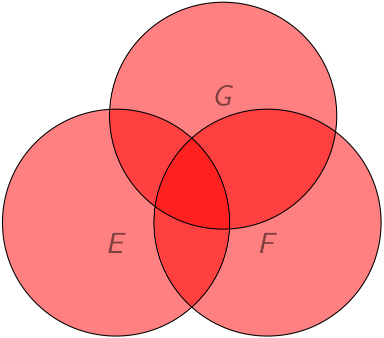


Notation

on écrit : $E \cup F = \{x | x \in E \vee x \in F\}$

Au-delà du couple

$E \cup F \cup G$



Exemples

- Q ={ sourd, sonore }
- R ={ dental, vélaire, bilabial }
- S ={ occlusif }
- T ={ sourd, dental, occlusif }

- $Q \cup R$?
- $S \cup T$?
- $Q \cup R \cup S \cup T$?

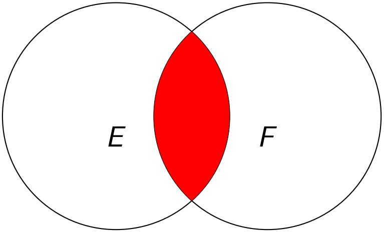
Note sur les notations

- $\cup$ peut être vu soit comme un dérivé arrondi de $\vee$, soit comme l'initiale de **u**nion
- en informatique, on utilise | (expressions régulières), parfois || (langages de programmation)

ne pas compter deux fois les éléments qui appartiennent aux X ensembles de l'union !
(en informatique, on distingue *set* – pas de doublons – de *bag*)

Intersection d'ensembles

L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent **simultanément** à E et F

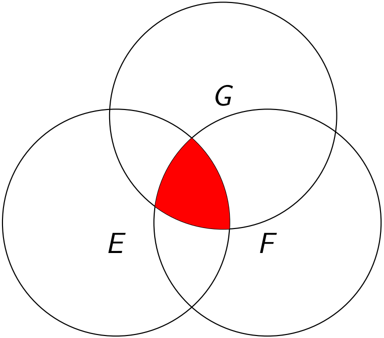


Notation

on écrit : $E \cap F = \{x | x \in E \wedge x \in F\}$

Au-delà du couple

$E \cap F \cap G$



Exemples

- Q ={ sourd, sonore }
- R ={ dental, vélaire, bilabial }
- S ={ occlusif }
- T ={ sourd, dental, occlusif }

- $Q \cap R$?
- $S \cap T$?
- $Q \cap R \cap S \cap T$?

Note sur les notations

- $\cap$ est l'inverse de $\cup$
- en programmation, on utilise &, parfois &&

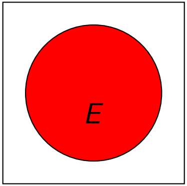
« deux ensembles qui n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire que leur intersection est vide, sont dits **disjoints** » [Wikipédia, Algèbre_des_parties_d'un_ensemble, consultée le 04/10/14]

Comment noter que E et F sont disjoints ?

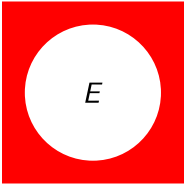
Complémentaire d'un ensemble

Le complémentaire d'un ensemble E est formé des éléments qui n'appartiennent pas à E

Ensemble E :



Complémentaire de E :



Notation

on écrit : $\complement E = \{x | x \notin E\}$

Exemples

- Q ={ sourd, sonore }
- R ={ dental, vélaire, bilabial }
- S ={ occlusif }
- T ={ sourd, dental, occlusif }

$\complement R$?

Note sur les notations

- opérateur **unaire** $\complement$ (Unicode x2201)
- en programmation, on utilise ~ ou !

$\complement(\complement E) = E$

Ils ne manquent pas d'air(e)

Arité

« En mathématiques, l'arité d'une fonction, ou opération, est le nombre d'arguments ou d'opérandes qu'elle requiert. Une fonction ou un opérateur peuvent donc être décrits comme unaires, binaires, ternaires, etc. »
[Wikipédia, Arité, consultée le 05/10/14]

- 2 opérations binaires : $\cup$ et $\cap$
- 1 opération unaire : $\complement$

« toute opération à plus de deux arguments peut se réaliser comme une composition d'opérations binaires (de la même manière que toute opération de choix peut se ramener à une composition de choix binaires) » [JF Perrot, Cours 2]

Commutativité des opérations ensemblistes

L'union et l'intersection sont commutatives :

1. $E \cup F = F \cup E$
2. $E \cap F = F \cap E$

Quelle opération commune n'est **pas** commutative ?

Associativité des opérations ensemblistes

L'union et l'intersection sont associatives :

1. $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$
2. $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$

Les parenthèses indiquent l'ordre du calcul :
$(E \cup F) \cup G$ signifie qu'on calcule d'abord $E \cup F$, puis qu'on en prend le résultat pour en calculer l'union avec G

Quelle opération commune n'est **pas** associative ?

Distributivité ?

La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
$(a + b)c = ac + bc$

La partie gauche de l'identité ci-dessus se lit :

- j'additionne a et b
- je multiplie le résultat par c (le symbole x est omis)

Exemple (dans un autre ordre) : 8 x (17+8) = (8x17)+(8x8)

Distributivité des opérations ensemblistes

L'intersection est distributive par rapport à l'union :
$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$

L'union est distributive par rapport à l'intersection :
$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$

Lois de De Morgan

Augustus De Morgan (1806-1871)

1. $\complement(E \cup F) = (\complement E) \cap (\complement F)$
2. $\complement(E \cap F) = (\complement E) \cup (\complement F)$

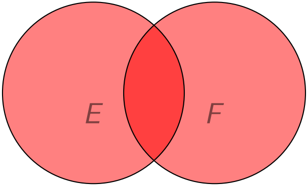
Lois de De Morgan

Augustus De Morgan (1806-1871)

1. $\complement(E \cup F) = (\complement E) \cap (\complement F)$
2. $\complement(E \cap F) = (\complement E) \cup (\complement F)$

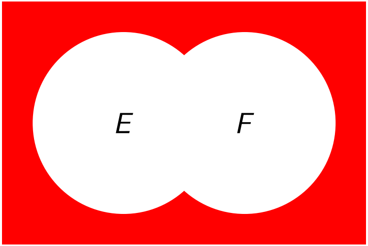
1. Être dans le complémentaire de $E \cup F$, c'est être ni dans E, ni dans F, donc à la fois dans le complémentaire de E et dans celui de F, c'est-à-dire dans leur intersection
2. Être dans le complémentaire de $E \cap F$, c'est ne pas être dans $E \cap F$, donc c'est être hors de E ou hors de F, c'est-à-dire être dans la réunion $(\complement E) \cup (\complement F)$

$\complement(E \cup F) = (\complement E) \cap (\complement F)$

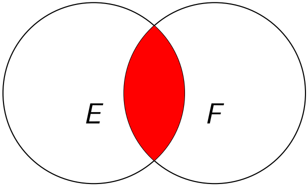


Être dans le complémentaire de $E \cup F$, c'est être ni dans E, ni dans F, donc à la fois dans le complémentaire de E et dans celui de F,

c'est-à-dire dans leur intersection

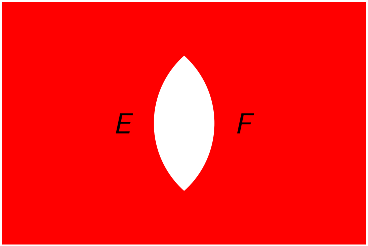


$\complement(E \cap F) = (\complement E) \cup (\complement F)$



Être dans le complémentaire de $E \cap F$, c'est ne pas être dans $E \cap F$, donc c'est être hors de E ou hors de F,

c'est-à-dire être dans la réunion $(\complement E) \cup (\complement F)$



- union
- intersection
- complémentaire
- et leurs caractéristiques