Formalismes de Représentation et Raisonnements

Révisions

1 Logique propositionnelle

1. Les formules suivantes sont-elles valides ? Justifier.
   (a) $(B \to A) \to (A \vee B)$
   (b) $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee ((A \wedge B) \to C)$
2. Mettre les formules précédentes sous forme normale conjonctive.
3. Soient les bases de règles et de faits suivantes :
   Base de règles :
   R1 : si Alice vient, alors Claude vient
   R2 : si Benjamin et Claude viennent, alors Émilie vient
   R3 : si Alice et Benjamin et Émilie viennent alors Dominique vient
   R4 : si Claude et Dominique et Émilie viennent alors Fred vient
   Base de faits = {Alice, Benjamin}
   (a) Est-ce que les règles de la base de règles sont sous forme de clause de Horn ?
   (b) Saturer la base de faits avec les règles en suivant l'algorithme de chaînage avant.
   (c) Fred fait-il partie de la base de faits saturée ?

2 Unification

Soient $s = f(a, x, h(g(z)))$ et $t = f(z, h(y), h(y))$ deux termes, avec x, y, z, a des variables du langage prédicatif.

1. Appliquer l'algorithme d'unification à $\mathcal{U} = \{s, t\}$. Dérouler l'algorithme de manière détaillée ; en particulier, rédiger entièrement la justification pour les étapes *association* et *fusion*.
2. Si l'exécution de l'algorithme indique que s et t sont unifiables, écrire le résultat de s_σ et t_σ (où t_σ est l'application de la substitution σ au terme t).
3. Conclure.

3 Déduction naturelle

1. A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :
   (a) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$
   (b) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$
2. Soient les suppositions suivantes :
   i. Tous les invités ont pris au moins un fromage ou un dessert.
   ii. Tous les invités qui ont pris un dessert ont pris un café.
   iii. Les invités qui ont pris un café n'ont pas tous pris un dessert.

   (a) Traduire ces suppositions en logique des prédicats en utilisant les symboles de prédicats suivants : $f(x)$ (x a pris du fromage), $d(x)$ (x a pris du dessert), $c(x)$ (x a pris du café).
   (b) Peut-on en conclure que certains invités ont pris du fromage ? un dessert ? Donner une preuve en déduction naturelle, lorsque c'est possible.

4 Résolution en logique des prédicats

Soient les prédicat p, q, r, s d'arité 1 et des variables 'x', 'y', 'z'. On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \exists x\ p(x) \wedge q(x) \\
\phi_2 &= \forall y\ p(y) \rightarrow (r(y) \wedge s(y)) \\
\phi &= \exists z\ q(z) \wedge s(z)
\end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Annexes

Algorithme: Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que *(F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable)* **faire**

- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R — désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) — déclenchement de la règle R, conclusion de R ajoutée à la base de faits

si *F $\in$ BF* **alors**

F est établi

sinon

F n'est pas établi

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).
Soient $(s, t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition Si $s = f(s_1, ..., s_n)$ et $t = f(t_1, ..., t_n)$, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), ..., (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ (et $t \neq x$), et :

- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ (de même en inversant s et t)

fusion Si $s = x$ (et $t \neq x$), et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x, t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables.

La formule	se transforme en
$\neg\forall x\ \phi$	$\exists x\ \neg\phi$
$\neg\exists x\ \phi$	$\forall x\ \neg\phi$
$\phi \vee \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \vee \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\exists x\ \phi \vee \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \wedge \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\exists x\ \phi \wedge \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \rightarrow \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$\exists x\ \phi \rightarrow \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

Règle de résolution en logique des prédicats :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$