Formalismes de Représentation et Raisonnements

Maria Boritchev

24 Août 2018

Le sujet comprend 3 pages d'énoncés et 2 pages d'annexes. L'examen dure 1 heure et demie. L'usage d'une feuille d'aide A4 recto-verso est autorisé. Tout autre document est interdit. Un barème indicatif vous est donné, il est susceptible de changer à la correction.

1 Logique propositionnelle – 5 pts

Soient p, q, r des variables propositionnelles.

1. (a) La formule suivante est-elle valide ? Justifier.

$$(p \to (q \to r)) \to (r \lor \neg p)$$

   (b) Mettre cette formule sous forme normale conjonctive.

2. Soient les bases de règles et de faits suivantes :

   Base de règles :

   R1 : si Pierre vient, alors Juliette vient

   R2 : si Laurine et Maria viennent, alors Pierre vient

   R3 : si Titouan et Laurine viennent, alors Maria vient

   R4 : si Nicolas et Pierre viennent, alors Laurine vient

   R5 : si Nicolas et Titouan viennent, alors Laurine vient

   Base de faits = {Nicolas, Titouan} (On sait que Nicolas et Titouan viennent.)

   (a) Est-ce que les règles de la base de règles sont sous forme de clause de Horn ?

   (b) Laurine fait-elle partie de la base de faits saturée en suivant l'algorithme de chaînage avant ?

   (c) Montrer que Juliette vient en suivant l'algorithme de chaînage avant.

2 Logique du premier ordre – 5 pts

Soit la formules du calcul de prédicats suivante :

$$F = \forall x \ ((p(x) \vee q(x, y)) \rightarrow (\exists y \ (r(y) \wedge s(x, y)) \wedge h(u, f(y, x))))$$

1. Donner une représentation de la formule sous forme d'arbre.
   Par exemple, la formule $\exists x \ p(x)$ est représentée de la manière suivante :
   $$\begin{array}{c} \exists x \\ | \\ p \\ | \\ x \end{array}$$
2. Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.
3. Donner tous les prédicats et toutes les fonctions, avec leurs arités, qui apparaissent dans la formule.

3 Déduction naturelle – 5pts

Soient p, q, r des variables propositionnelles. A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer le postulat suivant :

$$(p \vee q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

4 Résolution en logique des prédicats – 5pts

Soient les prédicats p, r d'arité 1, les prédicats q, s d'arité 2, les variables x, y et la constante c. On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \forall x \ p(x) \rightarrow q(x, c) \\ \phi_2 &= \forall x \exists y \ ((r(x) \vee \neg p(y)) \rightarrow s(x, y)) \\ \phi_3 &= \forall x \ p(x) \\ \phi &= \forall x \ (r(x) \rightarrow \exists y \ (s(x, y) \wedge q(y, c))) \end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \vdash \phi$.

Annexes

Axiome :

$$Ax \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p}$$

Introduction de la *négation* :

$$\neg I \quad \frac{\Gamma, p \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg p}$$

Élimination de la *négation* :

$$\neg E \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \perp}$$

Ab absurdo :

$$Abs \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *faux* (*ex falso*) :

$$\perp E \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction de l'*implication* :

$$\rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}$$

Élimination de l'*implication* (*modus ponens*) :

$$\rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *et* :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du *et* à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *et* à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *ou* à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du *ou* à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du *ou* :

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Introduction du *quantificateur universel* :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x\ F} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma$$

Élimination du *quantificateur universel* :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du *quantificateur existentiel* :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ F(x)}$$

Élimination du *quantificateur existentiel* :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ F \qquad \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma$$

Algorithme: Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que *(F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable)* **faire**

- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R — désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) — déclenchement de la règle R,

  conclusion de R ajoutée à la base de faits

si *F $\in$ BF* **alors**

F est établi

sinon

F n'est pas établi

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).
Soient $(s, t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition Si $s = f(s_1, ..., s_n)$ et $t = f(t_1, ..., t_n)$, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), ..., (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ (et $t \neq x$), et :

- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ (de même en inversant s et t)

fusion Si $s = x$ (et $t \neq x$), et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x, t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables.

La formule	se transforme en
$\neg\forall x\ \phi$	$\exists x\ \neg\phi$
$\neg\exists x\ \phi$	$\forall x\ \neg\phi$
$\phi \vee \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \vee \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\exists x\ \phi \vee \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \wedge \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\exists x\ \phi \wedge \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \rightarrow \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$\exists x\ \phi \rightarrow \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

Règle de résolution en logique des prédicats :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

Résolution en logique des prédicats :

1. Contraposée de la conclusion.
2. Mise sous forme normale de la logique des prédicats.
3. Substitution et résolution.