

# DÉDUCTION NATURELLE

---

On démontre en construisant des **arbres d'inférence** grâce à l'application de **règles d'inférence** (voir feuille). Un seul axiome :  $\Gamma, p \vdash p$ , où  $\Gamma$  est l'**antécédent**, un ensemble de prédicats appelés **hypothèses**, et  $p, q$  sont des prédicats.

Introduction de l'implication :

$$\rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}$$

Élimination de l'implication (modus ponens) :

$$\rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \rightarrow q \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Élimination du faux (du faux, on peut tout déduire) :

$$\perp E \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction du et :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \quad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du et à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du et à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du ou à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du ou à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du ou :

$$\vee E \frac{\Gamma \vdash p \vee q \quad \Gamma, p \vdash r \quad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Montrer :  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$ .

Montrer :

1.  $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$ ;
2.  $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ ;
3.  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$ .



Qu'est ce qui manque?

Introduction du quantificateur universel :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x F} \text{ si } x \text{ n'est libre dans } \Gamma$$

Élimination du quantificateur universel :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du quantificateur existentiel :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x F(x)}$$

Élimination du quantificateur existentiel :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x F \quad \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G} \text{ si } x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma \text{ et } G$$

Montrer :  $\forall x (F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x F(x)) \wedge (\forall x G(x))$ .

Montrer :  $\forall x (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \forall x (F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x)))$ .