Vers l'aborification des valeurs multizêtas

Dorian Perrot

LORIA

10/03/2025

1. Valeurs multizêtas
    - Forme somme
    - Forme intégrales itérées
    - Egalité de Kontsevich

2. Arborification (enracinée) des multizêtas
    - Arbres enracinés
    - Extension des applications $\zeta_{\uplus}, \zeta_{ш}, \uplus, ш$ et $\mathfrak{s}$
    - De $\zeta_{\uplus}^{T}$ à ζ^{t}
    - Conclusion

Sommaire

Les mots convergeants

On note :

- $\mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}$: le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les mots dans l'alphabet $\mathbb{N}^*$
- $\mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv} \subset \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}$ le s.e.v engendré par le mot vide, noté $\emptyset$, et les mots dont la première lettre est plus grande que 2.

Exemple

$(2,3) \in \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}, \quad \emptyset + (5) + (4,5) \in \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}, \quad (1,55) \notin \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}.$

- $\mathcal{W}_{\{x,y\}}$: le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les mots dans l'alphabet $\{x, y\}$
- $\mathcal{W}_{\{x,y\}}^{conv} \subset \mathcal{W}_{\{x,y\}}$ le s.e.v engendré par le mot vide, noté $\emptyset$, et les mots commençant par x et se terminant par y.

Exemple

$\emptyset + xxyxy \in \mathcal{W}_{\{x,y\}}^{conv}, \quad yxxy \notin \mathcal{W}_{\{x,y\}}^{conv}, \quad xxyx \notin \mathcal{W}_{\{x,y\}}^{conv}.$

Multizêta stuffle

Définition : multizêta stuffle $\zeta_{⧢}$

On définit la fonction linéaire

$$\begin{array}{cccc} \zeta_{⧢} & : & \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \emptyset & \mapsto & 1 \\ & & (a_1 \ldots a_k) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n_1 > n_2 > \ldots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{a_1} n_2^{a_2} \ldots n_k^{a_k}} \end{array}$$

Multizêta stuffle

Définition : multizêta stuffle $\zeta_{\uplus}$

On définit la fonction linéaire

$$\begin{array}{cccc} \zeta_{\uplus} & : & \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \emptyset & \mapsto & 1 \\ & & (a_1 \ldots a_k) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n_1 > n_2 > \ldots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{a_1} n_2^{a_2} \ldots n_k^{a_k}} \end{array}$$

Exemple

$$\zeta_{\uplus}(2,3) = \sum_{n_1 > n_2 > 0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3}, \quad \zeta_{\uplus}(5,1,1) = \sum_{n_1 > n_2 > n_3 > 0} \frac{1}{n_1^5 n_2 n_3}$$

$\zeta_{\uplus}(k) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^k} = \zeta(k)$ (généralisation de la fonction ζ de Riemann).

Produit de multizêta stuffle

On a $\zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}(2,3)\zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}(4) = \left(\sum_{n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3}\right)\left(\sum_{n_3>0} \frac{1}{n_3^4}\right) = \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3>0}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4}$.

On peut partitionne l'ensemble sur lequel on somme:

$$\begin{aligned}\{(n_1,n_2,n_3),\ n_3>0 \text{ et } n_1>n_2>0\} = &\{(n_1,n_2,n_3),\ n_3>n_1>n_2>0\}\\ &\cup\{(n_1,n_2,n_3),\ n_1>n_3>n_2>0\}\\ &\cup\{(n_1,n_2,n_3),\ n_1>n_2>n_3>0\}\\ &\cup\{(n_1,n_2,n_3),\ n_1>n_2>0 \text{ et } n_3=n_2\}\\ &\cup\{(n_1,n_2,n_3),\ n_1>n_2>0 \text{ et } n_3=n_1\}\end{aligned}$$

Produit de multizêta stuffle

On a $\zeta_{\uplus}(2,3)\zeta_{\uplus}(4) = \left(\sum_{n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3}\right)\left(\sum_{n_3>0} \frac{1}{n_3^4}\right) = \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3>0}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4}$.

On peut partitionne l'ensemble sur lequel on somme:

$$\begin{aligned}\{(n_1,n_2,n_3),\ n_3>0 \text{ et } n_1>n_2>0\} = {}& \{(n_1,n_2,n_3),\ n_3>n_1>n_2>0\}\\ &\cup \{(n_1,n_2,n_3),\ n_1>n_3>n_2>0\}\\ &\cup \{(n_1,n_2,n_3),\ n_1>n_2>n_3>0\}\\ &\cup \{(n_1,n_2,n_3),\ n_1>n_2>0 \text{ et } n_3=n_2\}\\ &\cup \{(n_1,n_2,n_3),\ n_1>n_2>0 \text{ et } n_3=n_1\}\end{aligned}$$

Ainsi : $$\sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3>0}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} = \sum_{n_3>n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{n_1>n_3>n_2>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{n_1>n_2>n_3>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3=n_2}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3=n_1}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4}.$$

Produit stuffle

Définition : stuffle $⧢$

On définit la fonction linéaire : $⧢ : \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv} \otimes \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv} \to \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ définie récursivement par pour tout $w_1, w_2 \in \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ non vide

- $\emptyset ⧢ w_1 = w_1 ⧢ \emptyset = w_1$,
- $(a \cdot w_1') ⧢ (b \cdot w_2') =$
  $a \cdot (w_1' ⧢ (b \cdot w_2')) + b \cdot ((a \cdot w_1') ⧢ w_2') + (a+b) \cdot (w_1' ⧢ w_2')$

Exemple

$$3 ⧢ 4 = 3,4 + 4,3 + 7$$

$$(2,3) ⧢ 4 = (2,3,4 + 2,4,3 + 2,7) + (4,2,3) + (6,3)$$

$\zeta_{⧢}$ est un morphisme pour ⧢

On a $(2,3) ⧢ 4 = (2,3,4 + 2,4,3 + 2,7) + (4,2,3) + (6,3)$, d'où

$$
\begin{aligned}
\zeta_{⧢}(2,3)\zeta_{⧢}(4) &= \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3>0}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} \\
&= \sum_{n_3>n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{n_1>n_3>n_2>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} \\
&\quad + \sum_{n_1>n_2>n_3>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3=n_2}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3=n_1}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} \\
&= \zeta_{⧢}((2,3) ⧢ 4).
\end{aligned}
$$

$\zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}$ est un morphisme pour $\sqcup\!\!\!\sqcup$

On a $(2,3)\sqcup\!\!\!\sqcup 4 = (2,3,4+2,4,3+2,7)+(4,2,3)+(6,3)$, d'où

$$\begin{aligned}
\zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}(2,3)\zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}(4) &= \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3>0}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} \\
&= \sum_{n_3>n_1>n_2>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{n_1>n_3>n_2>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} \\
&\quad + \sum_{n_1>n_2>n_3>0} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3=n_2}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} + \sum_{\substack{n_1>n_2>0,\\ n_3=n_1}} \frac{1}{n_1^2 n_2^3 n_3^4} \\
&= \zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}((2,3)\sqcup\!\!\!\sqcup 4).
\end{aligned}$$

Proposition

Pour tout $w_1, w_2 \in \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}, \quad \zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}(w_1 \sqcup\!\!\!\sqcup w_2) = \zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}(w_1)\zeta_{\sqcup\!\!\!\sqcup}(w_2).$

Sommaire

Multizêta shuffle $\zeta_{⧢}$

Définition : multizêta shuffle $\zeta_{⧢}$

On définit la fonction linéaire

$$\begin{array}{cccc} \zeta_{⧢} : & \mathcal{W}^{conv}_{\{x,y\}} & \to & \mathbb{R} \\ & \emptyset & \mapsto & 1 \\ & (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l) & \mapsto & \displaystyle\int_{1>t_1>\cdots>t_l>0} \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\omega_{\varepsilon_l}(t_l) \end{array}$$

où $\omega_{\varepsilon_i}(t) = \frac{dt}{t}$ si $\varepsilon_i = x$ et $\omega_{\varepsilon_i}(t) = \frac{dt}{1-t}$ sinon.

remarque : Ce sont des intégrales itérées, on a

$$\int_{1>t_1>\cdots>t_l>0} \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\omega_{\varepsilon_l}(t_l) =$$

$$\int_0^1 \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\left(\int_0^{t_1} \omega_{\varepsilon_2}(t_2)\left(\cdots\left(\int_0^{t_{l-1}} \omega_{\varepsilon_l}(t_l)dt_l\right)\cdots\right)dt_2\right)dt_1$$

Produit shuffle

Définition : shuffle $\sqcup\!\sqcup$

On définit la fonction linéaire : $\sqcup\!\sqcup : \mathcal{W}^{conv}_{\{x,y\}} \otimes \mathcal{W}^{conv}_{\{x,y\}} \to \mathcal{W}^{conv}_{\{x,y\}}$ définie récursivement par pour tout $w_1, w_2 \in \mathcal{W}^{conv}_{\{x,y\}}$ non vide

- $\emptyset \sqcup\!\sqcup w_1 = w_1 \sqcup\!\sqcup \emptyset = w_1$,
- $(\varepsilon_1 \cdot w_1') \sqcup\!\sqcup (\varepsilon_2 \cdot w_2') = \varepsilon_1 \cdot (w_1' \sqcup\!\sqcup (\varepsilon_2 \cdot w_2')) + \varepsilon_2 \cdot ((\varepsilon_1 \cdot w_1') \sqcup\!\sqcup w_2')$

Exemple

$$x \sqcup\!\sqcup xy = 2xxy + xyx$$

$$xxy \sqcup\!\sqcup xy = 3xxyxy + 6xxxyy + xyxxy$$

$\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$ est un morphisme pour $\sqcup\!\sqcup$

On utilise le même principe que pour $\zeta_{\perp\!\!\!\perp}$,

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l)\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_m) \\
&\qquad = \int_{1>t_1>\cdots>t_l>0} \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\omega_{\varepsilon_l}(t_l) \cdot \int_{1>u_1>\cdots>u_m>0} \omega_{\varepsilon'_1}(u_1)\cdots\omega_{\varepsilon'_m}(u_m) \\
&\qquad = \int_{\substack{1>t_1>\cdots>t_l>0 \\ 1>u_1>\cdots>u_m>0}} \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\omega_{\varepsilon_l}(t_l)\omega_{\varepsilon'_1}(u_1)\cdots\omega_{\varepsilon'_m}(u_m) \\
&\qquad = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l \sqcup\!\sqcup \varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_m)
\end{aligned}
$$

$\zeta_{ш}$ est un morphisme pour $ш$

On utilise le même principe que pour $\zeta_{\uplus}$,

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{ш}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l)\zeta_{ш}(\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_m) \\
&\quad = \int_{1>t_1>\cdots>t_l>0} \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\omega_{\varepsilon_l}(t_l) \cdot \int_{1>u_1>\cdots>u_m>0} \omega_{\varepsilon'_1}(u_1)\cdots\omega_{\varepsilon'_m}(u_m) \\
&\quad = \int_{\substack{1>t_1>\cdots>t_l>0 \\ 1>u_1>\cdots>u_m>0}} \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\omega_{\varepsilon_l}(t_l)\omega_{\varepsilon'_1}(u_1)\cdots\omega_{\varepsilon'_m}(u_m) \\
&\quad = \zeta_{ш}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l ш \varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_m)
\end{aligned}
$$

Proposition

Pour tout $w_1, w_2 \in \mathcal{W}^{conv}_{\{x,y\}}$, $\quad \zeta_{ш}(w_1 ш w_2) = \zeta_{ш}(w_1)\zeta_{ш}(w_2)$.

Sommaire

Lien entre les deux formes

Définition de $\mathfrak{s}$

La **fonction de binarisation**, $\mathfrak{s}$, est la fonction linéaire de $\mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{W}_{\{x,y\}}$ telle que $\mathfrak{s}(\emptyset) = \emptyset$ et $\mathfrak{s}(a_1 \dots a_l) = (\underbrace{x \cdots x}_{a_1 - 1} y \underbrace{x \cdots x}_{a_2 - 1} y \cdots \underbrace{x \cdots x}_{a_p - 1} y)$

avec $a_1, a_2, \cdots, a_p \in \mathbb{N}^*$.

Lien entre les deux formes

Définition de $\mathfrak{s}$

La **fonction de binarisation**, $\mathfrak{s}$, est la fonction linéaire de $\mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{W}_{\{x,y\}}$ telle que $\mathfrak{s}(\emptyset) = \emptyset$ et $\mathfrak{s}(a_1 \dots a_l) = (\underbrace{x \cdots x}_{a_1 - 1} y \underbrace{x \cdots x}_{a_2 - 1} y \cdots \underbrace{x \cdots x}_{a_p - 1} y)$

avec $a_1, a_2, \cdots, a_p \in \mathbb{N}^*$.

Proposition

$\mathfrak{s}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ dans $\mathcal{W}_{\{x,y\}}^{conv}$.

Relation de Kontsevich

$$\zeta_{\uplus} = \zeta_{\sqcup\!\sqcup} \circ \mathfrak{s}$$

Exemple

$\zeta_{\uplus}(2,1) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(xyy)$, $\zeta_{\uplus}(5,1,2) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(xxxxyyxy)$, $\zeta_{\uplus}(3,1,1) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(xxyyy)$.

Sommaire

Fonction d'enracinement

On note

- Ω un alphabet (dans notre cas $\Omega = \mathbb{N}^*$ ou $\{x, y\}$).
- $\mathcal{G}ra_\Omega$ le $\mathbb{Q}$-e.v engendré par les graphes orientés acycliques décorés par Ω.
- $(V(G), E(G))$ d'un graphe G l'ensemble des sommets et des arrêtes de G respectivement.
- si $v, v' \in V(G)$ et qu'il existe un chemin de v à v' on notera $v' \succeq v$.

Définition

Soit $B : \Omega \times \mathcal{G}ra_\Omega \to \mathcal{G}ra_\Omega$ l'opération qui à un couple $(\omega, (G, d)) \in \Omega \times \mathcal{G}ra_\Omega$ associe le graphe Ω-décoré obtenu à partir de G en ajoutant une racine décorée par ω reliée à chaque racine locale de G. C'est la fonction **d'enracinement**.

Arbres enracinés

Arbres enracinés

Les arbres enracinés sont une famille de graphes acycliques décorés par les lettres d'un alphabet Ω définis récursivement par :

- $F = \emptyset$.
- $F = B_\omega(f)$ avec $\omega \in \Omega$ et f un arbre enraciné Ω-décoré.

$$B_\omega(\emptyset) = \bullet_\omega \qquad B_\omega(\bullet_{\omega'}) = \mathbf{I}_\omega^{\omega'} \qquad B_\omega(\bullet_{\omega'}\bullet_{\omega''}) = {}^{\omega'}\mathbf{V}_\omega^{\omega''}$$

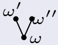
- $F = f_1 \bullet f_2$ avec f_1, f_2 des arbres enracinés non vide Ω-décorés.

$$\mathbf{I}_\omega^{\omega'} \bullet \bullet_{\omega''} = \mathbf{I}_\omega^{\omega'} \bullet_{\omega''}$$

Arbres enracinés

Les arbres enracinés sont une famille de graphes acycliques décorés par les lettres d'un alphabet Ω définis récursivement par :

- $F = \emptyset$.
- $F = B_\omega(f)$ avec $\omega \in \Omega$ et f un arbre enraciné Ω-décoré.

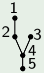
$$B_\omega(\emptyset) = \bullet_\omega \qquad B_\omega(\bullet_{\omega'}) =$$  $$\qquad B_\omega(\bullet_{\omega'}\bullet_{\omega''}) =$$ 

- $F = f_1 \bullet f_2$ avec f_1, f_2 des arbres enracinés non vide Ω-décorés.

 $\bullet \; \bullet_{\omega''} =$  $\bullet_{\omega''}$

Exemple

Avec $\Omega = \mathbb{N}^*$:

$$B_2(B_1(\emptyset)) =$$  $$\qquad B_5\Big[B_4\Big(B_3(\emptyset) \bullet B_2(B_1(\emptyset))\Big)\Big] =$$ 

Sommaire

Objectif

Notons $\mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}$ (resp. $\mathcal{F}_{\{x,y\}}$) le $\mathbb{Q}$-e.v engendré par les arbres enracinés décoré par $\mathbb{N}^*$ (resp. par $\{x, y\}$). Ainsi que

- $\mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ le s.e.v de $\mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}$ engendré par l'arbre vide et les arbres enracinés dont les racines sont strictement plus grandes que 1.
- $\mathcal{F}_{\{x,y\}}^{conv}$ le s.e.v de $\mathcal{F}_{\{x,y\}}$ engendré par l'arbre vide et les arbres enracinés dont les racines sont décorées par x et les brachements et les feuilles sont décorées par y.

On souhaite généraliser les trois propriétés suivantes aux arbres enracinés

1. $\forall w_1, w_2 \in \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$, $\zeta_{\uplus}(w_1)\zeta_{\uplus}(w_2) = \zeta_{\uplus}(w_1 \uplus w_2)$,
2. $\forall w_1, w_2 \in \mathcal{W}_{\{x,y\}}^{conv}$, $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(w_1)\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(w_2) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(w_1 \sqcup\!\sqcup w_2)$,
3. $\forall w \in \mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$, $\zeta_{\uplus}(w) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup} \circ \mathfrak{s}(w)$.

La fonction multizêta arborifiée stuffle $\zeta^T_{\sqcup\!\!\!\!+}$

Définition de $\zeta^T_{\sqcup\!\!\!\!+}$

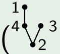
La fonction **multizêta arborifiée stuffle** est la fonction linéaire, notée $\zeta^T_{\sqcup\!\!\!\!+}$, à valeur de $\mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\zeta^T_{\sqcup\!\!\!\!+}(\emptyset) = 1$ et

$$\zeta^T_{\sqcup\!\!\!\!+}(F) = \sum_{\substack{n_v > 0 \\ v_i \preceq v_j \Rightarrow n_{v_j} < n_{v_i} \text{ et } i \neq j}}^{+\infty} \prod_{v \in V(F)} \frac{1}{(n_v)^{\alpha_v}}$$

où les v_i désignent les sommets de F et α_v la décoration du sommet v.

Exemple

$$\zeta^T_{\sqcup\!\!\!\!+}\Big(\ \Big) = \sum_{\substack{n_a > n_c > n_d > 0 \\ n_a > n_b > 0}} \frac{1}{n_a^2 n_b^3 n_c^4 n_d}.$$



La fonction multizêta arborifiée shuffle $\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}$

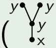
Définition de $\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}$

La fonction **multizêta arborifiée shuffle** est la fonction linéaire, notée $\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}$, à valeur de $\mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}(\emptyset) = 1$ et

$$\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}(F) = \int_{\Delta_F} \prod_{v \in V(F)} \omega_{\varepsilon_v}(z_v)$$

où $\Delta_F \in [0,1]^{|V(F)|}$ et $(z_1, \cdots, z_{v_{|V(F)|}}) \in \Delta_F \Leftrightarrow (v_i \preceq v_j \Rightarrow z_{v_j} \leq z_{v_i})$ où les v_i désignent les sommets de F, ε_v représente la décoration du sommet v de F et $\omega_{\varepsilon_v}(z_v) = \frac{dz_v}{z_v}$ si $\varepsilon_v = x$ ou $\omega_{\varepsilon_v}(z_v) = \frac{dz_v}{1-z_v}$ sinon.

Exemple

$\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}($ 

$)$
$$= \int_{\substack{1>t_1>t_2>t_3>0 \\ 1>t_1>t_2>t_4>0}} \frac{1}{t_1(1-t_2)(1-t_3)(1-t_4)} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

Stuffle et shuffle arborifié

Le **produit** **stuffle** **arborifié** noté $⊔̲⊔̲ ^T$ de deux arbres enracinés F et G est définie par récurrence sur $|F| + |G|$

- $F \,\underline{\sqcup\!\sqcup}^T \emptyset = F, \quad \emptyset \,\underline{\sqcup\!\sqcup}^T G = G.$
- Si $F = B_a(f)$ et $G = B_b(g)$ sont des arbres enracinés avec une seule composante connexe alors :

$$F \,\underline{\sqcup\!\sqcup}^T G = B_a(f \,\underline{\sqcup\!\sqcup}^T G) + B_b(F \,\underline{\sqcup\!\sqcup}^T g) + B_{a+b}(f \,\underline{\sqcup\!\sqcup}^T g).$$

- Si $F = f_1 f_2 \cdots f_n$ et $G = g_1 g_2 \cdots g_k$ avec $f_i, g_j \in \mathcal{F}_\Omega$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$ alors:

$$F \,\underline{\sqcup\!\sqcup}^T G = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left((f_i \,\underline{\sqcup\!\sqcup}^T g_j) f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_k g_1 \cdots \widehat{g_j} \cdots g_n \right)$$

où $f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_k$ est la concaténation des arbres $f_1, \cdots, f_k$ sans l'arbre f_i.)

Stuffle et shuffle arborifié

Le **produit** **shuffle** **arborifié** noté $\sqcup\!\sqcup^T$ de deux arbres enracinés F et G est définie par récurrence sur $|F| + |G|$

- $F \sqcup\!\sqcup^T \emptyset = F, \quad \emptyset \sqcup\!\sqcup^T G = G.$
- Si $F = B_a(f)$ et $G = B_b(g)$ sont des arbres enracinés avec une seule composante connexe alors :

$$F \sqcup\!\sqcup^T G = B_a(f \sqcup\!\sqcup^T G) + B_b(F \sqcup\!\sqcup^T g).$$

- Si $F = f_1 f_2 \cdots f_n$ et $G = g_1 g_2 \cdots g_k$ avec $f_i, g_j \in \mathcal{F}_\Omega$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$ alors:

$$F \sqcup\!\sqcup^T G = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \Big((f_i \sqcup\!\sqcup^T g_j) f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_k g_1 \cdots \widehat{g_j} \cdots g_n \Big)$$

où $f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_k$ est la concaténation des arbres $f_1, \cdots, f_k$ sans l'arbre f_i.)

Fonction de binarisation arborifiée $\S^T$

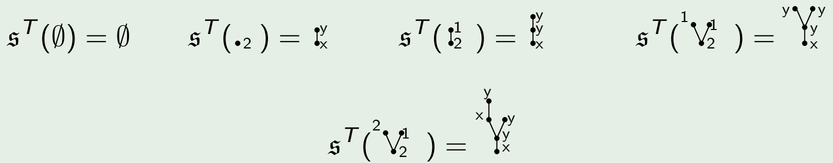
Définition $\mathfrak{s}^T$

On définit récursivement $\mathfrak{s}^T : \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \to \mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}}$ par

- $\mathfrak{s}^T(\emptyset) = \emptyset$.
- $\mathfrak{s}^T(B_a(f)) = B_x^{a-1} \circ B_y \circ \mathfrak{s}^T(f)$.
- $\mathfrak{s}^T(F \cdot G) = \mathfrak{s}^T(F) \cdot \mathfrak{s}^T(G)$ avec F et G non vide.

et on étend par linéarité à $\mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*}$.

Exemple



Différents résultats

Proposition

On a
$$\zeta_{\boxplus} = \zeta^{T}_{\boxplus} \circ i_{\mathbb{N}^*} \text{ et } \zeta_{\sqcup\!\sqcup} = \zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup} \circ i_{\{x,y\}}$$
où $i_{\mathbb{N}^*}$ (resp. $i_{\{x,y\}}$) est l'injection canonique de $\mathcal{W}^{conv}_{\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*}$ (resp. $\mathcal{W}^{conv}_{\{x,y\}}$ dans $\mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}}$).

Proposition [Clavier 2019]

- $\zeta^{T}_{\boxplus}$ est une combinaison linéaire (sur $\mathbb{Q}$) de $\zeta_{\boxplus}$.
- $\zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup}$ est une combinaison linéaire (sur $\mathbb{Q}$) de $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$,
- $\forall F, G \in \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*}, \quad \zeta^{T}_{\boxplus}(F \boxplus^{T} G) = \zeta^{T}_{\boxplus}(F)\zeta^{T}_{\boxplus}(G)$,
- $\forall F, G \in \mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}}, \quad \zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup}(F \sqcup\!\sqcup^{T} G) = \zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup}(F)\zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup}(G)$.

Différents résultats

Proposition

On a

$$\zeta_{\uplus} = \zeta_{\uplus}^{T} \circ i_{\mathbb{N}^*} \text{ et } \zeta_{\sqcup\!\sqcup} = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T} \circ i_{\{x,y\}}$$

où $i_{\mathbb{N}^*}$ (resp. $i_{\{x,y\}}$) est l'injection canonique de $\mathcal{W}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ dans $\mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ (resp. $\mathcal{W}_{\{x,y\}}^{conv}$ dans $\mathcal{F}_{\{x,y\}}^{conv}$).

Proposition [Clavier 2019]

- $\zeta_{\uplus}^{T}$ est une combinaison linéaire (sur $\mathbb{Q}$) de $\zeta_{\uplus}$.
- $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T}$ est une combinaison linéaire (sur $\mathbb{Q}$) de $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}$,
- $\forall F, G \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}, \quad \zeta_{\uplus}^{T}(F \uplus^{T} G) = \zeta_{\uplus}^{T}(F)\zeta_{\uplus}^{T}(G)$,
- $\forall F, G \in \mathcal{F}_{\{x,y\}}^{conv}, \quad \zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T}(F \sqcup\!\sqcup^{T} G) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T}(F)\zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T}(G)$.

Problème

$$\zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T} \neq \zeta_{\uplus}^{T} \circ \mathfrak{s}^{T}$$

Sommaire

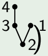
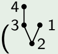
Définition de ζ^t

Définition

Soit $F \in \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*}$ alors:

$$\zeta^t(F) := \sum_{\substack{n_v \geq 1 \\ v \in V(F)}} \prod_{v \in V(F)} \left(\sum_{\substack{v' \in V(F) \\ v' \succeq v}} n_{v'} \right)^{-\alpha_{v'}} \in \mathbb{R}.$$

Exemple

$\zeta^t($  $) = \displaystyle\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4 \geq 1} = \frac{1}{(n_1+n_2+n_3+n_4)^2(n_2+n_4)^3 n_3 n_4^4} \neq \zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}($  $),$

$\zeta^t($  $) = \displaystyle\sum_{n_1,n_2,n_3 \geq 1} \frac{1}{(n_1+n_2+n_3)^2(n_2+n_3)^5 n_3^6} = \zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}($  $).$

Généralisation de l'égalité de Kontsevich

Théorème [Clavier 2022]

Pour tout $F \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ on a $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T} \circ \mathfrak{s}^{T}(F) = \zeta^{t}(F)$.

A-t-on pour tout $F, G \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$, $\zeta^{t}(F \,⧢^{T} G) = \zeta(F)\zeta(G)$?

Généralisation de l'égalité de Kontsevich

Théorème [Clavier 2022]

Pour tout $F \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ on a $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T} \circ \mathfrak{s}^{T}(F) = \zeta^{t}(F)$.

A-t-on pour tout $F, G \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$, $\zeta^{t}(F \,\underline{\sqcup\!\!\!+\!\!\sqcup}^{T}\, G) = \zeta(F)\zeta(G)$?

NON

On a $\zeta^{t}\Big(\overset{1\;1}{\bigvee_{2}} \,\underline{\sqcup\!\!\!+\!\!\sqcup}^{T} \bullet_{2}\Big) > \zeta^{t}\Big(\overset{1\;1}{\bigvee_{2}}\Big)\zeta^{t}(\bullet_{2})$.

Existe-t-il une loi telle que ζ^{t} soit un morphisme pour cette loi?

Généralisation de l'égalité de Kontsevich

Théorème [Clavier 2022]

Pour tout $F \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$ on a $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}^{T} \circ \mathfrak{s}^{T}(F) = \zeta^{t}(F)$.

A-t-on pour tout $F, G \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}^{conv}$, $\zeta^{t}(F \sqcup\!\!\!\!\!\perp^{T} G) = \zeta(F)\zeta(G)$?

NON

On a $\zeta^{t}\left({}^{1}\!\vee^{1}_{2} \sqcup\!\!\!\!\!\perp^{T} \bullet_{2}\right) > \zeta^{t}\left({}^{1}\!\vee^{1}_{2}\right)\zeta^{t}(\bullet_{2})$.

Existe-t-il une loi telle que ζ^{t} soit un morphisme pour cette loi?

OUI

C'est une fonction qui est définie récursivement, notée $\rightharpoonup$ et prononcée "yew".

Fonction $\upharpoonleft$

La fonction linéaire $\upharpoonleft : \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \otimes \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \to \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*}$ est définie récursivement

- $\emptyset \upharpoonleft \emptyset = \emptyset, \quad F_1 \upharpoonleft \emptyset = F_1, \quad \emptyset \upharpoonleft F_2 = F_2.$
- Si $F_1 = B_a(f_1)$ et $F_2 = B_b(f_2)$ sont des arbres avec une seule composante connexe alors $F_1 \upharpoonleft F_2$ vaut :

$$\sum_{i=0}^{b-1} \binom{a-1+i}{i} B_{a+i}\left[f_1 \upharpoonleft B_{b-i}(f_2)\right] + \sum_{j=0}^{a-1} \binom{b-1+j}{j} B_{b+j}\left[B_{a-j}(f_1) \upharpoonleft f_2\right].$$

- Si $F_1 = T_1 T_2 \cdots T_n$ et $F_2 = t_1 t_2 \cdots t_k$ avec $T_i, t_j \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$ alors:

$$F_1 \upharpoonleft F_2 = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \Big((T_i \upharpoonleft t_j) T_1 \cdots \widehat{T_i} \cdots T_k t_1 \cdots \widehat{t_j} \cdots t_n \Big)$$

où $T_1 \cdots \widehat{T_i} \cdots T_k$ est la concaténation de $T_1, \cdots, T_k$ sans T_i.

Exemple

$$\begin{aligned}
\bullet_2 \curvearrowright \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} &= B_2\Big(\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix}\Big) + 2.B_3\Big(\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\end{smallmatrix}\Big) + 3.B_4\Big(\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\end{smallmatrix}\Big) + B_3(\bullet_2 \curvearrowright \bullet_1) + 3.B_4(\bullet_1 \curvearrowright \bullet_1) \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\\ \vert\\ \bullet_2\end{smallmatrix} + 2.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_4\end{smallmatrix} + B_3\left[B_2(\bullet_1) + B_1(\bullet_2) + B_2(\bullet_1)\right] \\
&\quad + 3.B_4\left[B_1(\bullet_1) + B_1(\bullet_1)\right] \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\\ \vert\\ \bullet_2\end{smallmatrix} + 2.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_4\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet_2\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + 6.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_4\end{smallmatrix} \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\\ \vert\\ \bullet_2\end{smallmatrix} + 4.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + 9.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_4\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet_2\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix}
\end{aligned}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
\bullet_2 \Rsh \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} &= B_2\left(\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix}\right) + 2.B_3\left(\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\end{smallmatrix}\right) + 3.B_4\left(\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\end{smallmatrix}\right) + B_3(\bullet_2 \Rsh \bullet_1) + 3.B_4(\bullet_1 \Rsh \bullet_1) \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\\ \vert\\ \bullet_2\end{smallmatrix} + 2.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_4\end{smallmatrix} + B_3\left[B_2(\bullet_1) + B_1(\bullet_2) + B_2(\bullet_1)\right] \\
&\quad + 3.B_4\left[B_1(\bullet_1) + B_1(\bullet_1)\right] \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\\ \vert\\ \bullet_2\end{smallmatrix} + 2.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_4\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet_2\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + 6.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_4\end{smallmatrix} \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\\ \vert\\ \bullet_2\end{smallmatrix} + 4.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_2\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix} + 9.\begin{smallmatrix}\bullet_1\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_4\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet_2\\ \vert\\ \bullet_1\\ \vert\\ \bullet_3\end{smallmatrix}
\end{aligned}
$$

Remarque : Plus rigouresement on définit $\Rsh$ comme $(\mathfrak{s}^T)^{-1} \circ ⧢^T \circ (\mathfrak{s}^T \otimes \mathfrak{s}^T)$, puis on en déduit son expression combinatoire.

Proposition [Clavier, Perrot 2023]

ζ^t est un morphisme pour $\Rsh$.

Sommaire

Conclusion et ouverture

Le graphe suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \otimes \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \arrow[r, "\ast"'] \arrow[d, "\mathfrak{s}^T \otimes \mathfrak{s}^T"', "\wr"] & \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \arrow[d, "\mathfrak{s}^T"', "\wr"] \arrow[dr, "\zeta^t"] & \\
 & & \mathbb{R} \\
\mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \otimes \mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \arrow[r, "\sqcup\!\sqcup^T"] & \mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \arrow[ur, "\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}"'] &
\end{tikzcd}$$

Conclusion et ouverture

Le graphe suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \otimes \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \arrow[r, "\int"'] \arrow[d, "\mathfrak{s}^T \otimes \mathfrak{s}^T"', "\wr"] & \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \arrow[d, "\mathfrak{s}^T"', "\wr"] \arrow[dr, "\zeta^t"] & \\
 & & \mathbb{R} \\
\mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \otimes \mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \arrow[r, "\sqcup\!\sqcup^T"] & \mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \arrow[ur, "\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}"'] &
\end{tikzcd}$$

Questions ouvertes

- Interprétation géométrique (en terme de multizêta coniques) de la fonction yew ?
- Une généralisation à tout Direct Acyclic Graph est-elle possible ?

Références

- Jose Ignacio Burgos Gill and Javier Fresan *Multiple zeta values: from numbers to motives*
- Pierre J.Clavier *Double Shuffle relations for Arborified Zeta Values*, 2019
- Pierre J.Clavier *Series representation of arborified zeta values*, 2022
- Pierre J.Clavier and Dorian Perrot *Generalisations of multiple zeta values to rooted forests*, 2023
- Michel Waldschmidt *Lectures on Multiple Zeta Values*, 2011