

Rapport de projet recherche : Enumération de permutations
à motifs exclus

Rachel Dufau-Sansot
Encadrants : Mathilde Bouvel et Emmanuel Jeandel

Table des matières

1	Contexte et présentation du sujet	3
1.1	Permutations, motifs et évitement	3
1.1.1	Définition d'une permutation	3
1.1.2	Définition d'un motif	3
1.2	Motifs vinculaires	4
1.3	Exemples de résultats connus et de problèmes ouverts	5
1.4	Présentation du sujet	5
1.5	Approches pour la résolution	6
2	Reformulation de la bijection de Reifegerste	7
2.1	Présentation de la bijection de Reifegerste	7
2.2	Reformulation de la bijection de Reifegerste	8
2.2.1	Propriétés et définitions	8
2.2.2	Bijection entre $Av_n(132)$ et les chemins de Dyck de longueur $2n$	10
2.2.3	Bijection entre $Av_n(123)$ et les chemins de Dyck de longueur $2n$	12
2.3	Difficultés pour généraliser la bijection	13
3	Les arbres de génération	15
4	Génération par insertion sur la droite	19
4.1	Construction de la méthode de génération	19
4.2	Difficultés pour la transmission du label	20
5	Génération à partir des permutations évitant 132	22
5.1	Idée de la méthode	22
5.2	Mise en place de la méthode	22
5.2.1	Formation des permutations évitant 132	23
5.2.2	Méthode des colonnes	23
5.3	Problèmes rencontrés	25

Abstract

Une problématique classique dans l'étude des permutations en combinatoire est de chercher à énumérer les permutations évitant un certain motif π , c'est-à-dire expliciter $|Av_n(\pi)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici, on cherche à énumérer les permutations évitant le motif vinculaire $14\underline{23}$. En particulier, on cherche à prouver la conjecture selon laquelle leur séquence d'énumération est la même que celle des permutations évitant $1\underline{23}4$. Nous avons essayé trois approches différentes qui vont être décrites dans la suite.

La première méthode consiste à étudier une bijection entre $Av(123)$ et $Av(132)$ appelée bijection de Reifegerste où les chemins de Dyck jouent un rôle essentiel. L'objectif est de pouvoir ensuite la généraliser pour obtenir une bijection entre $Av(14\underline{23})$ et $Av(1\underline{23}4)$. Nous avons travaillé sur *les valley marked Dyck paths* pour essayer de généraliser la bijection.

La deuxième méthode utilise les arbres de génération. Nous avons cherché à définir une méthode de génération par insertion sur la droite. La règle de succession obtenue est cependant trop complexe pour pouvoir être manipulée.

La troisième méthode utilise également les arbres de génération. L'idée est de d'abord générer l'ensemble des permutations évitant 132 , puis de les faire muter pour obtenir des permutations contenant 132 mais pas $14\underline{23}$. Malheureusement, cette approche n'a pas aboutie car nous n'avons pas réussi à définir complètement la méthode pour faire muter les permutations. De plus, en appliquant la méthode de génération, on obtient des permutations dont la répartition des labels ne correspond pas à ce qui était attendu pour l'interprétation du label que nous avons envisagée.

1 Contexte et présentation du sujet

1.1 Permutations, motifs et évitement

1.1.1 Définition d'une permutation

Soit $n \in \mathbb{N}$, une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ est une bijection de cet ensemble dans lui-même. On note une telle permutation $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n) = \sigma_1 \dots \sigma_n$ et on dit qu'elle est de taille n . Par la suite, on considérera une permutation de taille n non pas comme une bijection mais comme un mot, consistant en un arrangement des nombres de 1 à n . On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$. La permutation de taille 0 est notée ϵ . On peut aussi représenter les permutations graphiquement : soit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ une permutation de taille n , on la représente sur une grille de taille $n \times n$ par les cases (i, σ_i) (voir Figure 1.1).

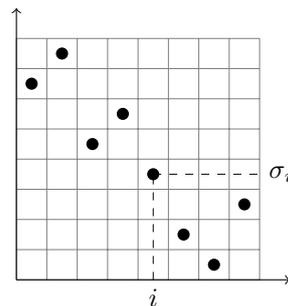


FIGURE 1.1 – $\sigma = 78564213 \in S_8$

1.1.2 Définition d'un motif

Soit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ une permutation de taille n et $\pi = \pi_1 \dots \pi_k$ une permutation de taille $k \leq n$.

On dit que π est un motif de σ lorsqu'il existe $i_1 < \dots < i_k$ tels que $\sigma_{i_a} < \sigma_{i_b}$ si et seulement si $\pi_a < \pi_b$ pour tout $a, b \in \{1, \dots, k\}$.

Dans ce cas, la sous-suite $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$ est appelée une occurrence de π dans σ .

Exemple : $\pi = 132$ est un motif de $\sigma = 31256847$. En effet, pour $i_1 = 2, i_2 = 4, i_3 = 7$, on a $\sigma_{i_1} = 3 < \sigma_{i_3} = 4 < \sigma_{i_2} = 5$ (voir Figure 1.2).

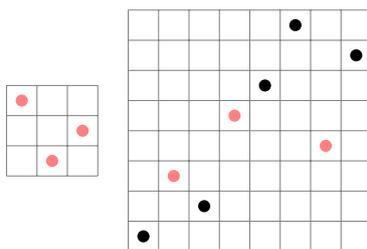


FIGURE 1.2 – $\pi = 132$ et $\sigma = 31256847$. Les points en rouge forment une occurrence du motif 132.

On dit qu'une permutation σ évite le motif π lorsqu'il n'existe aucune occurrence de π dans σ (voir Figure 1.3).

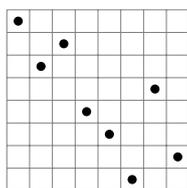


FIGURE 1.3 – $\sigma = 86743152$ évite $\pi = 123$.

On note :

- $Av(\pi)$: l'ensemble des permutations qui évitent (*avoid*) le motif π
- $Av_n(\pi)$: l'ensemble des permutations de taille n qui évitent le motif π

1.2 Motifs vinculaires

En 2000, Eric Babson et Einar Steingrímsson ont défini dans [2] les motifs vinculaires. Un motif vinculaire est un motif avec une condition d'adjacence indiquée par un crochet $\underline{\quad}$.

Soit $\pi = \pi_1 \dots \pi_r \pi_{r+1} \dots \pi_k$ un motif vinculaire de taille k et $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ une permutation de taille n . On dit que π est un motif de σ lorsqu'il existe $i_1 < \dots < i_r < i_{r+1} < \dots < i_k$ tels que $\sigma_{i_a} < \sigma_{i_b}$ si et seulement si $\pi_a < \pi_b$ pour tout $a, b \in \{1, \dots, n\}$ et $i_{r+1} = i_r + 1$ (voir Figure 1.4).

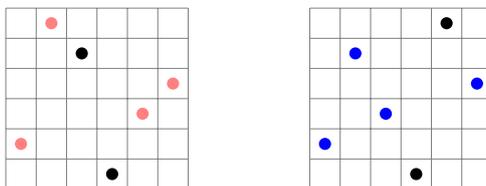


FIGURE 1.4 – $\pi = 265134$ (à gauche) contient une occurrence de $14\underline{23}$ (en rouge). $\sigma = 253164$ (à droite) contient une occurrence de 1423 (en bleu) mais pas $14\underline{23}$ dans cette occurrence : les nombres correspondants aux valeurs relatives 2 et 3 ne sont pas dans des colonnes adjacentes.

1.3 Exemples de résultats connus et de problèmes ouverts

Une problématique classique de l'étude des motifs de permutations est de chercher à énumérer l'ensemble des permutations évitant un certain motif π : on cherche à expliciter $|Av_n(\pi)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, afin de caractériser la séquence d'énumération de $Av(\pi)$.

L'un des premiers résultats de ce type a été énoncé en 1915 par Percy MacMahon [12]. Il a démontré que les permutations évitant 123 sont énumérées par les nombres de Catalan, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|Av_n(123)| = C_n$ avec $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ le n -ème nombre de Catalan.

En 1968, Donald Knuth a prouvé que les permutations pouvant être triées par une pile étaient caractérisées par l'évitement de 231 et étaient aussi énumérées par les nombres de Catalan [10]. Par symétrie, cela résout l'énumération de $Av(\pi)$ pour tout π motif de taille 3.

Depuis, d'autres résultats ont pu être prouvés, même si certains problèmes restent ouverts. Le tableau ci-dessous en présente certains. Pour chaque motif, il indique sa séquence d'énumération (si elle est connue) ainsi que sa référence sur l'OEIS¹.

π	séquence d'énumération de $Av(\pi)$	OEIS	Référence
motif de taille 3	Nombres de Catalan	A000108	[12],[10]
1342	1, 1, 2, 6, 23, 103, 512, 2740, 15485, ...	A022558	[6]
1 $\overline{23}$	Nombres de Bell	A000110	[8]
1 $\overline{32}$	Nombres de Bell	A000110	[8]
1 $\overline{32}4$	1, 1, 2, 6, 23, 105, 549, 3207, 20577, ...	A113227	[7]
1324	1, 1, 2, 6, 23, 103, 513, 2762, 15793, ...	A061552	[1], [5]

Pour 1342 et 1 $\overline{32}4$, les séquences d'énumération sont complètement connues. Pour 1324, seuls les 50 premiers termes de la séquence d'énumération sont connus. De nombreux articles étudient le taux de croissance de $Av(1324)$, défini comme $gr(Av(1324)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Av_n(1324)|}$. Un encadrement de $gr(Av(1324))$ a été obtenu dans [5] : $10.27 \leq gr(Av(1324)) \leq 13.5$.

1.4 Présentation du sujet

L'objectif du projet est d'énumérer $Av(14 \overline{23})$.

Les premiers termes de la séquence d'énumération de $Av(14 \overline{23})$ ont été obtenus en générant avec un algorithme toutes les permutations appartenant à $Av_n(14 \overline{23})$ avec $n \leq 13$ (travail réalisé en 2022 par des étudiants en master de l'Université de Lorraine [11]) :

1, 1, 2, 6, 23, 105, 549, 3207, 143239, 1071704, 8555388, 72442465, 647479819, ...

1. L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, abrégé OEIS) est un site web qui répertorie des suites d'entiers remarquables.

On remarque alors que ce sont les même premiers termes que ceux de A113227 la séquence d'énumération de $Av(\underline{123}4)$ et $Av(\underline{132}4)$. On conjecture alors que $Av(\underline{1423})$ est énuméré par A113227. On cherche donc à prouver cette conjecture.

1.5 Approches pour la résolution

Pour prouver la conjecture, on peut utiliser deux approches différentes :

- Une approche par bijection : on va chercher à expliciter une bijection qui préserve la taille entre $Av(\underline{1423})$ et $Av(\underline{123}4)$.
- Une approche par arbres de génération : voir dans la Section 3

Malheureusement, aucune de ces méthodes n'a permis de prouver la conjecture. Dans la suite de ce rapport, on détaillera les approches utilisées et pourquoi elles n'ont pas fonctionné.

2 Reformulation de la bijection de Reifegerste

2.1 Présentation de la bijection de Reifegerste

Comme expliqué dans la partie 1.5, on va chercher à expliciter une bijection qui préserve la taille entre $Av(14\overline{23})$ et $Av(1\overline{23}4)$. Pour ce faire, on va réduire en taille 3 les motifs $14\overline{23}$ et $1\overline{23}4$ en "fusionnant" les nombres dans le crochet : $1\overline{23}4$ devient 123 et $14\overline{23}$ devient 132 . On a vu dans la partie 1.3 que $|Av_n(123)| = |Av_n(132)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ces deux motifs ont été beaucoup étudiés. En particulier, l'article [9] répertorie plusieurs bijections entre $Av(321)$ et $Av(132)$ (les permutations qui évitent 123 et celles qui évitent 321 sont les mêmes à une symétrie près). Notre objectif ici est donc d'étudier ces bijections dans l'objectif de pouvoir les généraliser à $Av(14\overline{23})$ et $Av(1\overline{23}4)$.

La bijection que nous avons choisie d'étudier est la bijection de Reifegerste, définie par Astrid Reifegerste dans l'article [13]. C'est une bijection entre $Av(321)$ et $Av(132)$. Pour comprendre son fonctionnement, on a besoin de définir ce qu'est une excédance :

Définition 2.1. Soit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ une permutation de taille n . Une excédance de σ est une position i telle que $\sigma_i > i$ (voir Figure 2.1).

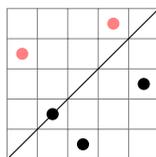


FIGURE 2.1 – La permutation $\sigma = 42153$ avec ses excédances 4 et 5 en rouge

On va illustrer le fonctionnement de cette bijection avec un exemple sur la permutation $\sigma = 13256847 \in Av_8(321)$ (voir Figure 2.2).

1. Pour chacune des excédances i de σ , on place un carré à la position $(i, n + 1 - \sigma_i)$
2. On noircit les cases qui n'ont pas de carrés au dessus d'elles à leur droite
3. En allant de gauche à droite, pour chaque colonne, on place un point dans la ligne encore vide la plus basse dans la zone grisée

Partant de $\sigma = 13256847$ on a construit la permutation $\pi = 78564213 \in Av_n(132)$.

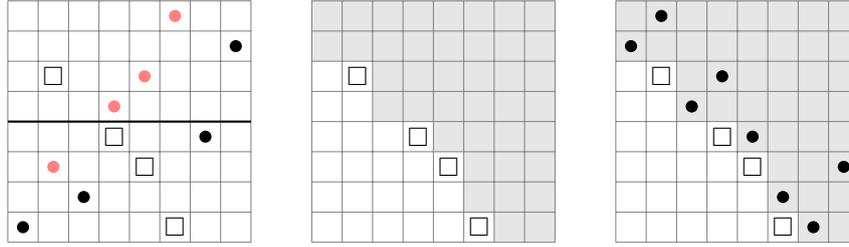


FIGURE 2.2 – On applique la bijection de Reifegerste à $\sigma = 13256847 \in Av_8(321)$ (ses excédances sont en rouge). On construit $\pi = 78564213 \in Av_n(132)$

2.2 Reformulation de la bijection de Reifegerste

Pour obtenir une bijection sous une forme plus adaptée à notre objectif, on a choisi de travailler sur $Av(123)$ au lieu de $Av(321)$. On a ensuite cherché à reformuler la bijection. Finalement, on a réussi à exprimer la bijection de Reifegerste comme une composition de deux bijections :

- une bijection entre $Av(123)$ et les chemins de Dyck
- une bijection entre $Av(132)$ et les chemins de Dyck

La suite de cette partie est consacrée à l'explication de cette reformulation et à sa preuve.

2.2.1 Propriétés et définitions

Avant d'aborder la reformulation de la bijection de Reifegerste, on définit certaines notions et on prouve certaines propriétés :

Définition 2.2. Soit $\sigma \in S_n$. On appelle antidiagonale de σ la diagonale qui va du coin en haut à gauche au coin en bas à droite de la représentation graphique de σ (voir Figure 2.3)

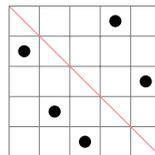


FIGURE 2.3 – La permutation $\sigma = 42153$ avec son antidiagonale en rouge

Définition 2.3. Soit $\sigma \in S_n$. On dit qu'un point (i, σ_i) de σ est un maximum de gauche à droite, dit encore LtoRmax, si pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $j < i$, $\sigma_j < \sigma_i$. On définit de la même manière les LtoRmin, les RtoLmin et les RtoLmax.

Proposition 2.1. Les LtoRmin de la permutation σ sont toujours en dessous ou sur l'antidiagonale

Démonstration. Soit σ une permutation. Soit (i, σ_i) la position d'un LtoRmin de σ . Il y a $i - 1$ points à gauche de la colonne i qui sont tous au dessus la ligne σ_i , donc on a $\sigma_i \leq n - (i - 1)$ c'est à dire $\sigma_i \leq n + 1 - i$: (i, σ_i) est en dessous ou sur l'antidiagonale. \square

Proposition 2.2. *Les RtoLmax de la permutation σ sont toujours au dessus ou sur l'antidiagonale*

Démonstration. Soit σ une permutation de S_n . Soit (i, σ_i) la position d'un RtoLmax de σ . On doit placer $n - i$ points à droite de la colonne i qui sont tous en dessous de la ligne σ_i , donc on a $\sigma_i > n - i$ c'est à dire $\sigma_i \geq n + 1 - i$: (i, σ_i) est au dessus ou sur l'antidiagonale. \square

Proposition 2.3. *Les points sur l'antidiagonale d'une permutation $\sigma \in Av_n(123)$ sont à la fois des LtoRmin et des RtoLmax*

Démonstration. Soit un point situé en position (i, σ_i) avec $\sigma_i = n - i + 1$. Il y a donc $i - 1$ points à gauche de lui et $n - i$ points à droite de lui. On suppose qu'il existe un point (j, σ_j) à droite de lui ($j > i$) tel que $\sigma_j > \sigma_i$. Comme il n'y a que $n - (n - i + 1) = i - 1$ lignes au dessus de σ_i , et qu'on place $i - 1$ points à gauche de i , il y a un point à gauche de i qui est en dessous de la ligne $n - i + 1$, et donc en dessous de σ_i : en prenant σ_i , ce point à sa gauche au dessous de lui et le point (j, σ_j) à sa droite au dessus de lui, on forme le motif 123, absurde.

On a alors que tous les points à droite de i sont en dessous de la ligne $n - i + 1$: (i, σ_i) est un RtoLmax. On a alors que les $i - 1$ points à gauche de i occupent les $i - 1$ lignes au dessus de σ_i : (i, σ_i) est un LtoRmin. \square

Proposition 2.4. *Tous les points $\sigma \in Av(123)$ sont soit des RtoLmax, soit des LtoRmin, soit les deux*

Démonstration. Soit (i, σ_i) un point de σ qui n'est ni un RtoLmax ni un LtoRmin. Donc $\exists j < i$ tel $\sigma_j < \sigma_i$ et $\exists k > i$ tel que $\sigma_i < \sigma_k$: $\sigma_j \sigma_i \sigma_k$ est une occurrence de 123 dans σ , absurde. \square

On va maintenant introduire une nouvelle famille d'objets qui sera utile pour la reformulation de la bijection de Reifegerste.

Définition 2.4. Un chemin de Dyck de longueur $2n$ est un chemin allant du point $(0, n)$ au point $(n, 0)$ en faisant des pas Est e et des pas Sud s et restant toujours sous l'antidiagonale. (voir Figure 2.4)

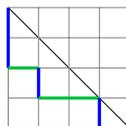


FIGURE 2.4 – $sseseese$ est un chemin de Dyck de longueur 8 avec les pas Sud en bleu et les pas Est en vert

On définit un pic d'un chemin de Dyck comme la succession d'un Sud et d'un Est. Une vallée d'un chemin de Dyck est la succession d'un Est et d'un Sud.

Un résultat classique sur les chemins de Dyck est que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\{\text{chemins de Dyck de longueur } 2n\}| = C_n$ le n -ème nombre de Catalan.

On va alors définir une fonction qui, pour tout $n \in \mathbb{N}$, construit un chemin de Dyck de longueur $2n$ à partir d'une permutation de taille n .

Définition 2.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour construire un chemin de Dyck de longueur $2n$ à partir d'une permutation $\sigma \in S_n$, on récupère les LtoRmin de σ , et on trace le chemin de Dyck allant de $(0, n)$ à $(n, 0)$ en considérant les LtoRmin comme des pics (c'est à dire que le chemin contourne ces points par la gauche et le bas, voir Figure 2.5). On note cette transformation f .

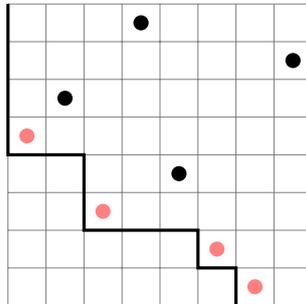


FIGURE 2.5 – On représente la permutation $56384217 \in S_8$. Les points rouges sont ses LtoRmin. On représente le chemin de Dyck associé par la fonction f

Proposition 2.5. f construit bien un chemin de Dyck de longueur $2n$

Démonstration. Soit σ un permutation de taille n . Soit P l'ensemble de ses LtoRmin. Les LtoRmin sont décroissants de gauche à droite donc f construit bien un chemin allant de $(0, n)$ à $(n, 0)$. Pour montrer que c'est un chemin de Dyck, il faut montrer qu'il est bien sous l'antidiagonale. Pour cela, on va montrer que les vallées du chemin sont toujours strictement en dessous de l'antidiagonale. On suppose qu'il existe une vallée au dessus l'antidiagonale, c'est à dire une position (i, a_i) telle que $a_i \geq n + 1 - i$ et que le chemin contourne cette position par par le haut et la droite. On a donc $n - a_i \leq i - 1$ lignes au dessus du chemin à cette position. Il y a $i - 1$ points à gauche de la colonne i , qui doivent tous être placés au dessus du chemin. Le point de la colonne i doit être aussi être placé au dessus du chemin : on doit donc placer i points au dessus de la ligne a_i : absurde. Il n'existe donc pas de vallée au dessus de l'antidiagonale. On a bien que le chemin est toujours sous l'antidiagonale : c'est bien un chemin de Dyck. \square

2.2.2 Bijection entre $Av_n(132)$ et les chemins de Dyck de longueur $2n$

On cherche ici à décrire une bijection entre $Av_n(132)$ et les chemins de Dyck de longueur $2n$. On a vu dans la Section 2.2.1 la fonction f qui construit un chemin de Dyck de longueur $2n$ à partir d'une permutation de taille n . Ici, on va considérer la restriction de f à $Av_n(132)$, notée $f|_{Av_n(132)}$.

Pour construire une permutation de $Av_n(132)$ à partir d'un chemin de Dyck de longueur $2n$, on applique la méthode suivante : en allant de gauche à droite, pour chaque colonne vide, on place un point dans la ligne encore vide la plus basse au dessus du chemin. On note cette transformation γ .

On cherche à montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- γ est bien définie pour tout chemin de Dyck de longueur $2n$
- γ construit bien une permutation de $Av_n(132)$

- $f_{|Av_n(132)} \circ \gamma = id$
- $f_{|Av_n(132)}$ est injective

Cela permet de conclure que $f_{|Av_n(132)} : Av_n(132) \mapsto \{\text{chemins de Dyck de longueur } 2n\}$ est bijective et que γ est son inverse.

Proposition 2.6. γ est bien définie pour tout chemin de Dyck.

Démonstration. Soit D un chemin de Dyck de longueur $2n$, allant de $(0, n)$ à $(n, 0)$. Par définition des chemins de Dyck, ce chemin est sous l'antidiagonale. On veut construire une permutation de taille n à partir de D .

Supposons qu'on a déjà défini $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ et qu'on cherche à définir σ_i . On a déjà rempli les $i-1$ colonnes à gauche de la colonne i , donc il y a $i-1$ lignes occupées. On veut placer le point de la colonne i au dessus de D . Comme D est sous l'antidiagonale, il y a $j > n - (n+1-i) = i-1$ lignes vides au dessus du chemin, donc il y a forcément une ligne vide au dessus du chemin pour placer le point de la colonne i .

On peut bien construire une permutation de taille n en appliquant γ à D . \square

Proposition 2.7. γ construit une permutation de $Av_n(132)$.

Démonstration. Soit σ une permutation de taille n construite avec γ . Montrons $\sigma \in Av_n(132)$. On suppose par l'absurde qu'il existe $i, j, k, i < j < k$ tels que $\sigma_i < \sigma_k < \sigma_j$. Au moment où on place le point de la colonne j , la ligne σ_k est vide et au dessus du chemin car $\sigma_i < \sigma_k$. D'après les règles de construction de γ , on ne devrait pas pouvoir placer un point à la position (j, σ_j) car la ligne $\sigma_k < \sigma_j$ est libre : absurde. \square

Proposition 2.8. $f_{|Av_n(132)} \circ \gamma = id$.

Démonstration. Soit D un chemin de Dyck. Montrons que $f_{|Av_n(132)}(\gamma(D)) = D$. Il suffit pour cela de montrer que les LtoRmin de $\gamma(D)$ correspondent exactement aux pics de D . On remarque immédiatement que tous les points de $\gamma(D)$ placés sous les pics de D (c'est-à-dire avec un pas Sud à leur gauche et un pas Est en dessous d'eux) sont des LtoRmin. Montrons que les LtoRmin de la permutation $\gamma(D)$ sont tous placés sous les pics de D . Soit $(i, \gamma(D)_i)$ un LtoRmin de $\gamma(D)$. Par l'absurde, on suppose qu'il n'est pas sous un pic de D . Donc, d'après les règles de construction de γ , ce point a un pic de D à sa gauche en dessous de lui : $(i, \gamma(D)_i)$ n'est pas un LtoRmin, absurde. \square

Proposition 2.9. $f_{|Av_n(132)}$ est injective.

Démonstration. Soit $\sigma, \pi \in Av_n(132)$ telles que $\sigma \neq \pi$ et $f_{|Av_n(132)}(\sigma) = f_{|Av_n(132)}(\pi)$. On note i la première colonne telle que $\pi_i \neq \sigma_i$. On sait que (i, σ_i) et (i, π_i) ne sont pas des LtoRmin car σ et π ont les mêmes LtoRmin par définition de $f_{|Av_n(132)}$.

On suppose par symétrie que $\sigma_i < \pi_i$. On a que $\forall j < i, \sigma_j = \pi_j$, donc dans π le point de la ligne σ_i est à droite de la colonne i , dans la colonne $i' > i$: (i, π_i) et (i', σ_i) forment une inversion, c'est-à-dire une occurrence du motif 21. De plus, (i, π_i) n'est pas un LtoRmin, donc il existe un point à gauche de la colonne i situé dans une ligne en dessous de la ligne π_i . Ce point est également en dessous de la ligne σ_i car pour tout $j < i, \sigma_j = \pi_j$, donc les LtoRmin à gauche de la colonne i sont les mêmes dans σ et π . Donc ce LtoRmin, (i, π_i) et (i', σ_i) forment une occurrence du motif 132 : absurde. \square

2.2.3 Bijection entre $Av_n(123)$ et les chemins de Dyck de longueur $2n$

On cherche ici à décrire une bijection entre $Av_n(123)$ et les chemins de Dyck de longueur $2n$. On a vu dans la Section 2.2.1 la fonction f qui construit un chemin de Dyck de longueur $2n$ à partir d'une permutation de taille n . Ici, on va considérer la restriction de f à $Av_n(123)$, notée $f|_{Av_n(123)}$.

Pour construire une permutation de $Av_n(123)$ à partir d'un chemin de Dyck de longueur $2n$, on applique la méthode suivante :

1. On place un point sous chaque pic de D .
2. En allant de gauche à droite, pour chaque colonne vide, on place un point dans la ligne encore vide la plus haute au dessus du chemin.

On note cette transformation β . Elle ressemble beaucoup à la fonction γ de la section précédente, à la différence qu'on remplit d'abord les lignes les plus hautes et non pas les plus basses pour les points qui ne sont pas sous les pics.

On doit donc prouver que :

- β est bien définie pour tout chemin de Dyck de longueur $2n$
- β construit bien une permutation de $Av(123)$
- $f|_{Av_n(123)} \circ \beta = id$
- $f|_{Av_n(123)}$ est injective

Cela permet de conclure que $f|_{Av_n(123)} : Av_n(123) \mapsto \{\text{chemins de Dyck de longueur } 2n\}$ est bijective et que β est son inverse.

Proposition 2.10. *β est bien définie pour tout chemin de Dyck de longueur $2n$.*

Démonstration. Soit D un chemin de Dyck de longueur $2n$, allant de $(0, n)$ à $(n, 0)$. On veut construire une permutation de taille n en appliquant β à D . Supposons qu'on a déjà défini $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ et qu'on cherche à définir σ_i . On a déjà rempli les $i-1$ colonnes à la gauche de i , donc il y a $i-1$ lignes occupées. On veut placer le point de la colonne i au dessus de D . Comme D est sous l'antidiagonale, il y a $j > n - (n+1-i) = i-1$ lignes vides au dessus du chemin, donc il y a forcément une ligne vide au dessus du chemin pour placer le point de la colonne i . On peut bien construire une permutation de taille n en appliquant β à D . \square

On remarque que cette preuve est identique à celle de la Proposition 2.6

Proposition 2.11. *β construit bien une permutation de $Av_n(123)$.*

Démonstration. Soit D un chemin de Dyck tel que $\beta(D) \notin Av_n(123)$ c'est-à-dire qu'il existe i, j, k tels que $i < j < k$ et $\sigma_i < \sigma_j < \sigma_k$. On a que (j, σ_j) n'est pas un LtoRmin, donc c'est un point qui a été construit par la fonction β à l'étape 2. Lorsqu'on place le point (j, σ_j) , la ligne σ_k est encore vide et elle est au dessus du chemin : d'après les règles de construction de β , on ne peut pas placer le point (j, σ_j) : absurde. \square

On remarque que cette preuve est très proche de celle de la Proposition 2.7

Proposition 2.12. *$f|_{Av_n(123)} \circ \beta = id$.*

Démonstration. Soit D un chemin de Dyck. Montrons que $f_{|Av_n(123)}(\beta(D)) = D$. Montrons que les LtoRmin de la permutation $\beta(D)$ sont tous placés sous les pics de D (c'est-à-dire avec un South à leur droite et un East sous eux). Soit $(i, \beta(D)_i)$ un LtoRmin de $\beta(D)$. Par l'absurde, on suppose qu'il n'est pas sous un pic de D . D'après les règles de construction de β , ce point a un pic de D à sa gauche en dessous de lui : $(i, \beta(D)_i)$ n'est pas un LtoRmin, absurde. \square

On remarque que cette preuve est identique à celle de la Proposition 2.8

Proposition 2.13. $f_{|Av_n(123)}$ est injective.

Démonstration. Soit $\sigma, \pi \in Av_n(123)$ telles que $\sigma \neq \pi$ et $f_{|Av_n(123)}(\sigma) = f_{|Av_n(123)}(\pi)$. On note i la colonne la plus à gauche telle que $\pi_i \neq \sigma_i$. On sait que (i, σ_i) et (i, π_i) ne sont pas des LtoRmin car σ et π ont les mêmes LtoRmin par définition de f .

On suppose par symétrie que $\sigma_i < \pi_i$. On a que $\forall j < i, \sigma_j = \pi_j$, donc dans σ le point de la ligne π_i est à droite de la colonne i dans la colonne i' : (i, σ_i) et (i', π'_i) forment une non-inversion, c'est-à-dire une occurrence du motif 12. De plus, (i, σ_i) n'est pas un LtoRmin, donc il existe un point à gauche de la colonne i situé dans une ligne en dessous de la ligne σ_i : on forme le motif 123 : absurde. \square

On remarque que cette preuve est très proche de celle de la Proposition 2.9

2.3 Difficultés pour généraliser la bijection

Après avoir reformulé la bijection de Reifegerste, on a cherché à la généraliser à $Av(14\overline{23})$. Pour cela, on va avoir besoin d'introduire une nouvelle famille d'objets : les valley marked Dyck paths.

Définition 2.6. Un valley marked Dyck path de longueur $2n$ est un chemin de Dyck dans lequel pour chaque vallée, un point est marqué. Les positions possibles de ce point sont sur la perpendiculaire à l'antidiagonale passant par la vallée, en dessous de l'antidiagonale, et ses coordonnées doivent être entières ou demi-entières (voir Figure 2.6).

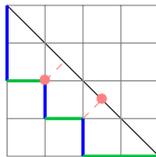


FIGURE 2.6 – $ssesesee$ est un chemin de Dyck de longueur 8 avec les South en bleu et les East en vert. Les points rouges sont des marques possibles des vallées.

Or, on sait que la séquence d'énumération des valley marked Dyck paths est la même que celle de $Av_n(1\overline{23}4)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\text{valley marked Dyck paths de longueur } 2n| = |Av_n(1\overline{23}4)|$. On va alors essayer d'adapter la bijection de Reifegerste en utilisant les valley marked Dyck paths : on va chercher à construire une bijection qui préserve la taille entre $A(14\overline{23})$ et les valley marked Dyck paths en s'appuyant sur le fonctionnement de la bijection de Reifegerste.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\sigma \in Av_n(14\overline{23})$. Comme pour la bijection de Reifegerste "classique", on va récupérer les LtoRmin de σ et les utiliser pour tracer un chemin de Dyck D . Comme on veut

réaliser une bijection avec les valley marked Dyck paths, on va alors chercher à "marquer" D , c'est-à-dire à placer des points dans ses vallées. Pour cela, on a cherché à identifier des particularités de σ qu'on pourrait associer à une certaine position d'un point d'une vallée. Malheureusement, nous n'avons pas pu trouver de correspondance entre la position des points des vallées de D et les particularités de σ .

3 Les arbres de génération

La méthode des arbres de génération est une méthode classique pour énumérer des familles d'objets discrets. Dans notre cas, on cherche à énumérer des permutations évitant un motif. Pour comprendre le fonctionnement de cette méthode, on va l'illustrer par un exemple sur $Av(132)$. On va alors chercher, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à contruire les permutations de $Av_{n+1}(132)$ à partir des permutations de $Av_n(132)$. Pour ce faire, on a besoin de définir une méthode de génération qui vérifie les propriétés suivantes :

- elle construit des permutations de taille $n + 1$ qui évite 132 en ajoutant un nouvel élément à des permutations de $Av_n(132)$;
- chaque permutation de $Av_{n+1}(132)$ sera créée une et une seule fois

On considère la méthode de génération suivante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite tout d'abord contruire l'ensemble des permutations de S_{n+1} à partir des permutations de S_n . Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on construit les permutations $\sigma' \in S_{n+1}$ telles que :

$$\sigma' = \sigma \cdot a = \sigma'_1 \dots \sigma'_n a \text{ avec } a \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket \text{ et } \sigma'_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } \sigma_i < a \\ \sigma_i + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensuite, on peut construire l'ensemble des permutations de $Av_{n+1}(132)$ à partir des permutations de $Av_n(132)$. Pour toute permutation $\sigma \in Av_n(132)$, on construit les permutations $\sigma' \in Av_{n+1}(132)$ telles que :

$$\sigma' = \sigma \cdot a \text{ avec } a \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket \text{ tel que } \sigma' \text{ évite } 132$$

On appelle sites actifs de σ l'ensemble des $a \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ tels que la permutation σ' obtenue en ajoutant a à la fin de σ appartienne à $Av_{n+1}(132)$. Le nombre de sites actifs de σ est appelé labels. Les positions $a \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ qui ne sont pas des sites actifs sont appelés sites inactifs (voir Figure 3.1).

On remarque que la permutation de taille 1 est de label 2. On observe également que 1 et $n + 1$ sont toujours des sites actifs pour une permutation de $Av(132)$: la seule manière de créer une occurrence du motif 132 en ajoutant un nouvel élément à droite dans une permutation est que cet élément occupe la position du 2 dans cette occurrence de 132. En ajoutant un nouvel élément sur les sites 1 et $n + 1$, on garantit qu'il ne pourra pas jouer ce rôle.

On peut alors chercher à caractériser les sites actifs d'une permutation σ' obtenue un ajoutant a à la fin de σ .

Soit $\sigma \in Av_n(132)$ de label k . On note $n + 1 = a_1 > \dots > a_k = 1$ les sites actifs de σ . On construit σ' en ajoutant a_j à la fin de σ . On observe alors (voir Figure 3.2) :



FIGURE 3.1 – On construit $\sigma' = 6745123$ à partir de $\sigma = 563412$ en ajoutant 3 (en vert) à droite. Les sites actifs sont représentés par des cercles, les sites inactifs par des croix.

- $a_k = 1$ est un site actif de σ' : $a_k = 1$ ne peut pas jouer le rôle du 2 dans une occurrence de 132
- a_{j+1}, \dots, a_{k-1} deviennent des sites inactifs de σ' : en prenant le 1 de σ et l'élément ajouté dans le site a_j , on peut former une occurrence de 132 en plaçant un point dans un des sites a_{j+1}, \dots, a_{k-1}
- $a'_1 = a_1 + 1, \dots, a'_j = a_j + 1$ restent des sites actifs de σ' : on ne peut pas former une occurrence de 132 en plaçant un élément plus grand que a_j à sa droite

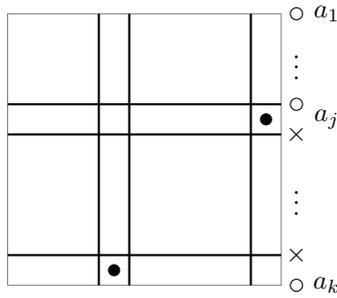


FIGURE 3.2 – Représentation des sites actifs (cercles) et inactifs (croix) de la permutation σ

On a alors que σ' est de label $j + 1$.

On a ainsi montré qu'une permutation $\sigma \in Av_n(123)$ de label k peut générer par la méthode de génération k permutations de $Av_{n+1}(132)$ de label $2, 3, \dots, k + 1$.

De plus, on montre ci-dessous que cette méthode de génération garantit de créer chaque permutation de $Av_{n+1}(132)$ une et une seule fois.

Proposition 3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La méthode de génération appliquée aux permutations de $Av_{n+1}(132)$ ne crée pas deux fois la même permutation.*

Démonstration. On suppose que la méthode de génération crée deux fois la même permutation, notée σ . On a donc qu'il existe $\sigma_1, \sigma_2 \in Av_n(132)$ telles que $\sigma_1 \neq \sigma_2$ et $\sigma = \sigma_1 \cdot a_1 = \sigma_2 \cdot a_2$ avec a_1 (resp. a_2) est un site actif de σ_1 (resp. σ_2). On a alors que $a_1 = a_2$ et donc $\sigma_1 = \sigma_2$: absurde. \square

Proposition 3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La méthode de génération construit toutes les permutations de $Av_n(132)$.*

Démonstration. Par récurrence :

$n = 2$: La méthode de génération appliquée à la permutation de taille 1 crée bien les deux permutations de $Av_2(132)$, 12 et 21.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. On suppose que la méthode de génération construit bien toutes les permutations de $Av_n(132)$. Montrons que la méthode de génération construit bien toutes les permutations de $Av_{n+1}(132)$. Soit $\sigma \in Av_{n+1}(132)$. On considère ρ la permutation obtenue en retirant à σ son élément le plus à droite a : $\sigma = \rho \cdot a$. On a alors que $\rho \in Av_n(132)$. On applique la méthode de génération à ρ : on ajoute un nouvel élément dans chaque site actif de ρ . a est un site actif de ρ car $\rho \cdot a$ évite 132. Donc la méthode de génération construit la permutation $\rho \cdot a = \sigma$. \square

On peut alors définir une règle de succession pour $Av(132)$ que l'on note Ω_{cat} :

$$\Omega_{cat} = \begin{cases} (2) \\ (k) \end{cases} \rightarrow (2), \dots, (k), (k+1)$$

Une règle de succession est une règle qui décrit, pour une permutation de label k , le nombre de permutations qu'elle produit par la méthode de génération et le label qui leur est associé. Elle indique également que le label de la permutation de taille 1 est 2.

On peut alors construire un arbre de génération pour $Av(132)$ à partir de Ω_{cat} (voir Figure 3.3).

C'est un arbre infini, dont la racine est la permutation de taille 1 de $Av(132)$. Ses noeuds de profondeur n sont les permutations de $Av_n(132)$. Les enfants d'un noeud de label k sont décrits par Ω_{cat} .

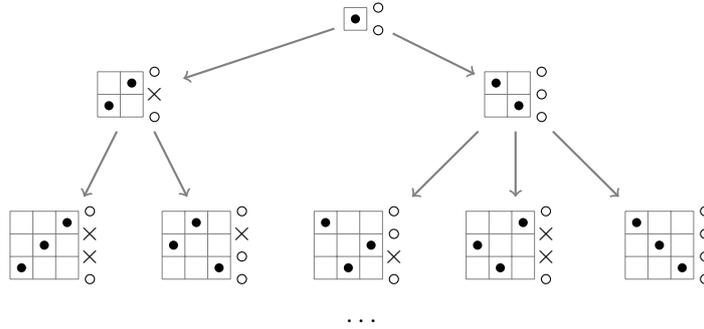


FIGURE 3.3 – Arbre de génération de $Av(132)$

Avec l'arbre de génération, on peut expliciter la séquence d'énumération de $Av(132)$. A partir de la règle de succession, on va utiliser des séries génératrices (i.e des séries formelles de la forme $\sum_{n \geq 0} |Av_n(132)| x^n$) pour expliciter la séquence d'énumération de $Av(132)$.

On pose $c_{n,k}$ = le nombre de permutation de $Av_n(132)$ de label k . On considère la série génératrice $C(x, y) = \sum_{n,k} c_{n,k} x^n y^k$. On a alors que $C(x, 1)$ est la série génératrice de $Av(132)$. En injectant Ω_{cat} dans $C(x, y)$, on obtient :

$$C(x, y) = xy^2 + \sum_{n,k} c_{n,k} x^{n+1} (y^2 + \dots + y^k + y^{k+1})$$

En omettant les détails de calculs, on obtient ensuite une équation fonctionnelle :

$$(1 - y + xy^2)C(x, y) = xy^2(1 - y + C(x, 1))$$

On cherche alors une série formelle $Y(x)$ qui annule $(1 - y + xy^2)$. On obtient alors que $C(x, 1) = Y(x) - 1$. Par extraction des coefficients, et en omettant les détails de calcul, on trouve que $|Av_n(132)| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$. Avec C_n le n -ème nombre de Catalan (d'où le nom Ω_{cat} de la règle de succession).

4 Génération par insertion sur la droite

Dans cette section, on va essayer de générer les permutations de $Av(14\overline{23})$ en utilisant la méthode des arbres de génération. On va donc chercher à définir une méthode de génération pour $Av(14\overline{23})$.

4.1 Construction de la méthode de génération

Soit $\sigma \in Av_n(14\overline{23})$ et $\sigma' = \sigma \cdot a$ la permutation obtenue en ajoutant a à la fin de σ . On veut déterminer quelles valeurs de a garantissent que $\sigma' \in Av_{n+1}(14\overline{23})$.

On remarque d'abord que si a appartient à une occurrence de $14\overline{23}$, alors il joue le rôle du 3 (c'est-à-dire que dans cette occurrence de $14\overline{23}$, il occupe la position relative du 3). De plus, l'élément situé dans la colonne à sa gauche, c'est-à-dire σ_n , joue alors le rôle du 2. Cette situation ne peut donc pas se produire si $a \leq \sigma_n$. On peut alors en déduire la propriété suivante :

Proposition 4.1. *Soit $\sigma \in Av_n(14\overline{23})$. Pour tout $a \leq \sigma_n$, $\sigma \cdot a \in Av_{n+1}(14\overline{23})$, c'est-à-dire a est un site actif de σ*

Démonstration. Soit $a \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Comme $a \leq \sigma_n$, a ne peut pas jouer le rôle du 3 dans une occurrence de $14\overline{23}$, donc a n'appartient pas à une occurrence de $14\overline{23}$ et $\sigma \cdot a \in Av_{n+1}(14\overline{23})$. \square

Il reste à traiter le cas où $a > \sigma_n$. Dans ce cas, $\sigma_n a$ forment le morceau de motif $\overline{23}$. Pour éviter $14\overline{23}$, on doit vérifier qu'aucune paire d'éléments de σ ne puissent jouer les rôles de 1 et de 4.

On commence par prouver la propriété suivante :

Proposition 4.2. *Soit $\sigma \in S_n$. On a l'équivalence suivante : σ contient $14\overline{23}$ \iff il existe une occurrence de $14\overline{23}$ dans σ où le rôle du 1 est joué par un LtoRmin de σ .*

Démonstration. \Leftarrow : Immédiat.

\Rightarrow : on suppose qu'il existe une occurrence de $14\overline{23}$ dans σ , notée $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$. Montrons que σ contient une occurrence de $14\overline{23}$ avec un LtoRmin de σ qui joue le rôle du 1.

- Si π_1 est un LtoRmin : immédiat.
- Si π_1 n'est pas un LtoRmin : il existe à gauche de π_1 un élément plus petit que π_1 . En particulier, il y a un LtoRmin plus petit que π_1 à sa gauche, qu'on note l . On a alors que $l\pi_2\pi_3\pi_4$ est une occurrence de $14\overline{23}$. \square

Ainsi, pour vérifier qu'aucun élément de σ ne puisse jouer le rôle de 1 dans une occurrence $14\overline{23}$, il suffit de vérifier qu'aucun des LtoRmins ne le puisse. Comme on veut former $14\overline{23}$ à partir du morceau de motif $\sigma_n a$, on va s'intéresser uniquement aux LtoRmins plus petits que σ_n .

Soit l un LtoRmin de σ plus petit que σ_n , on définit $\max_l = \max\{\sigma_j \in \sigma / j > i\}$.

Proposition 4.3. Soit $\sigma' = \sigma \cdot a$ avec $\sigma \in Av_n(14\overline{23})$, $a > \sigma_n$ et $l < \sigma_n$ un LtoRmin de σ .

σ' ne contient pas d'occurrence de $14\overline{23}$ avec l qui joue le rôle de 1 et $\sigma_n a$ qui jouent le rôle de $\overline{23}$ $\iff \max l < a$.

Démonstration. \Rightarrow : par contraposée : on suppose que $\max l \geq a$. Dans ce cas, on forme bien une occurrence de $14\overline{23}$ avec l qui joue le rôle de 1 et $\sigma_n a$ qui jouent le rôle de $\overline{23}$

\Leftarrow : immédiat par définition d'un motif □

Remarque. Si σ_n et l sont confondus, la propriété reste vraie : si $l = \sigma_n$, l ne peut pas jouer le rôle du 1 dans une occurrence de $14\overline{23}$.

Soit l_1, \dots, l_k les LtoRmin de σ plus petits que σ_n . On remarque alors que si $a > \max\{\max l_i\}$, $\sigma' = \sigma \cdot a \in Av_{n+1}(14\overline{23})$. On pose alors $m = \max\{\max l_i\}$ et l le LtoRmax tel que $m = \max l$ (s'il existe plusieurs LtoRmins l_a, \dots, l_b tels que $\max l_a = \dots = \max l_b$, on prend pour l le plus petit). On a alors que les sites actifs de σ sont les a tels que $a > m$ ou $a \leq \sigma_n$ (voir Figure 4.1)

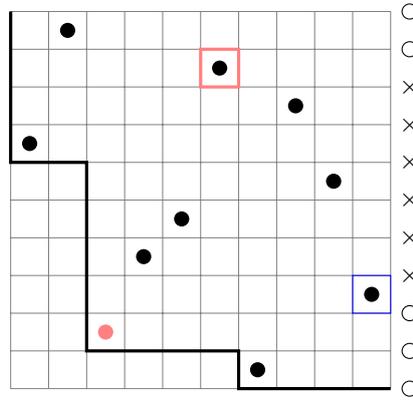


FIGURE 4.1 – $\sigma = 71024591863$. Les sites actifs sont représentés par des cercles, les sites inactifs par des croix. On a $l = 2$ en rouge, $m = 9$ encadré en rouge et $\sigma_{10} = 3$ encadré en bleu.

Ainsi, on a trouvé une méthode pour générer les permutations de $Av_{n+1}(14\overline{23})$ à partir des permutations de $Av_n(14\overline{23})$. On peut alors définir le label de σ comme (l, m, σ_n)

4.2 Difficultés pour la transmission du label

Grâce à la section précédente, on peut générer les permutations de $Av_{n+1}(14\overline{23})$ à partir des permutations de $Av_n(14\overline{23})$. Cependant, pour que la méthode par arbres de génération fonctionne, il faut également pouvoir caractériser les sites actifs d'une permutation σ' obtenue en ajoutant un élément a à la fin de σ .

Soit $\sigma' \in Av_{n+1}(14\overline{23})$ obtenue en ajoutant a à la fin de $\sigma \in Av_n(14\overline{23})$. Soit (l, m, σ_n) le label de σ . Grâce à la section précédente, on sait que les sites actifs de σ sont les a tels que $a > m$ ou $a \leq \sigma_n$. On cherche à déterminer le label de σ' (voir Figure 4.2 pour un exemple) :

- cas $a \leq l$: comme a est plus petit que l , l ne remplit plus la condition d'être un LtoRmin plus petit que $\sigma'_{n+1} = a$: on doit utiliser un nouveau LtoRmin, qu'on ne peut pas connaître à partir du label (l, m, σ_n)
- cas $l < a \leq \sigma_n$: comme les conditions $l < a$ et $m \geq a$ sont vérifiées, on peut continuer à utiliser l et m . Le nouveau label est $(l, m + 1, a)$

- cas $a \geq m$: comme a est plus grand que m , m ne remplit plus la condition d'être le plus grand élément à droite de l et plus grand que $\sigma'_{n+1} = a$. On doit donc utiliser un nouveau m , qu'on ne peut pas connaître à partir du label (l, m, σ_n)

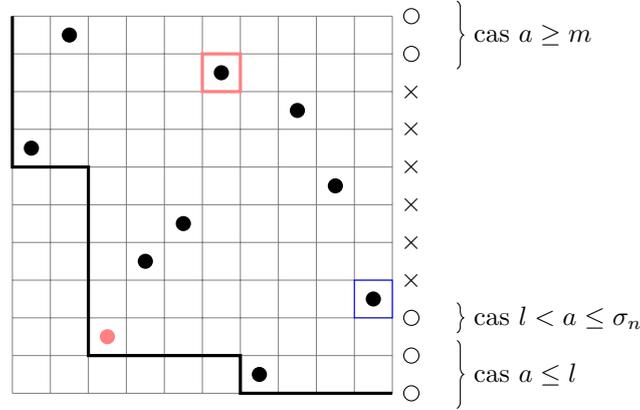


FIGURE 4.2 – $\sigma = 71024591863$. Les sites actifs sont représentés par des cercles, les sites inactifs par des croix. On a $l = 2$ en rouge, $m = 9$ encadré en rouge et $\sigma_{10} = 3$ encadré en bleu. On distingue les trois cas possibles en fonction de la position des sites actifs.

Pour comprendre comment le label de σ' est affecté par la position du site actif, on va présenter trois exemples à partir de la permutation $\sigma = 71024591863$ de label $(2, 9, 3)$ (voir Figure 4.2).

- cas $a = 2$: On a $\sigma' = 8113561019742$. $\sigma'_{n+1} = 2$, le seul LtoRmin inférieur à σ'_{n+1} est 1, et $max_1 = 9$. Le nouveau label est $(1, 9, 2)$
- cas $a = 3$: on a $\sigma' = 8112561019743$. Dans ce cas $l < a \leq \sigma_n$, donc le nouveau label est $(l, m + 1, a)$, c'est-à-dire $(2, 10, 3)$ ici.
- cas $a = 10$: on a $\sigma' = 7112459186310$. Dans ce cas, les LtoRmins $\sigma'_1 = 7, \sigma'_3 = 2, \sigma'_7 = 1$ sont inférieurs à σ'_{n+1} et $m = \max\{\max_{\sigma'_1}, \max_{\sigma'_3}, \max_{\sigma'_7}\} = 11$. Le label de σ' est donc $(7, 11, 10)$.

On voit alors qu'il n'est pas possible de déterminer le label de σ' à partir du label de σ . Pour pouvoir déterminer les sites actifs de σ' , il faut connaître les couples (l_i, max_{l_i}) pour tous les l_1, \dots, l_k LtoRmins de σ . Ainsi, le label de $\sigma = 71024591863$ deviendrait : $((7, 10), (2, 9), (1, 8), 3)$. A partir de ce label, avec la valeur de a , on peut déduire le label de σ' .

Cependant, ce label est beaucoup plus complexe que le précédent. Il paraît peu probable d'obtenir une règle de succession permettant de résoudre une équation fonctionnelle à partir de ce label.

5 Génération à partir des permutations évitant 132

Comme on l'a vu dans la section précédente, une approche classique par arbres de génération ne semble pas fonctionner. On va donc essayer avec une méthode de génération différente.

5.1 Idée de la méthode

On remarque qu'on peut diviser les permutations de $Av(14\underline{23})$ en deux catégories : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Av_n(14\underline{23}) = Av_n(132) \cup \{\text{permutations de taille } n \text{ qui contiennent } 132 \text{ mais pas } 14\underline{23}\}$

Or on sait que $Av(132)$ est énuméré par les nombres de Catalan qui admettent la règle de succession suivante :

$$\Omega_{cat} = \begin{cases} (1) \\ (k) \end{cases} \rightarrow (1), (2), \dots, (k), (k+1)$$

Cette règle semble être différente de celle introduite dans la partie 3. Néanmoins, il s'agit bien de la même règle de succession avec un codage différent : on décale de 1 la valeur du label : une permutation avec un label k selon la règle de succession de la partie 3 a maintenant un label $k-1$.

De plus, on cherche à prouver que $Av(14\underline{23})$ est énuméré par la séquence A113227, aussi appelée séquence des *powered Catalan numbers*. Une des règles de succession associée cette séquence est très proche de Ω_{cat} :

$$\Omega_{pcat} = \begin{cases} (1) \\ (k) \end{cases} \rightarrow (1), (2)^2, \dots, (k)^k, (k+1)$$

Les objets créés sont de même label, seule leur multiplicité varie.

Ainsi, on peut mettre au point une approche pour prouver que $Av(14\underline{23})$ est énuméré par la séquence des *powered Catalan numbers* :

- on utilise la méthode de génération sous-jacente à Ω_{cat} pour générer des permutations sans créer de nouveaux motifs 132.
- pour chacune de ces permutations obtenues, les faire muter pour former des permutations contenant des nouvelles occurrences de 132 mais pas $14\underline{23}$. Le nombre de permutations obtenues par mutation doit permettre d'obtenir Ω_{pcat} .

5.2 Mise en place de la méthode

On va d'abord détailler la méthode pour construire les permutations évitant 132.

5.2.1 Formation des permutations évitant 132

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour toute permutation $\sigma \in Av_n(132)$, on cherche à construire les permutations de $Av_{n+1}(132)$ en ajoutant un élément à droite de σ .

On peut alors montrer la propriété suivante :

Proposition 5.1. *Soit $\sigma \in Av_n(132)$. Les sites actifs de σ sont les $a \in \{1\} \cup \{l + 1 \mid l = \text{RtoLmax de } \sigma\}$*

Démonstration. On remarque que si on forme une occurrence de 132 dans $\sigma \cdot a$ en insérant un nouvel élément à droite, cet élément joue le rôle du 2. Ainsi, on a bien que 1 est toujours un site actif de σ .

Montrons maintenant qu'en insérant un nouvel élément à la position $a = 1 + l$ avec l RtoLmax de σ , on ne crée pas une occurrence du motif 132. Par l'absurde, on suppose qu'on crée le motif 132. Comme l est un RtoLmax, l'élément qui joue le rôle du 3 est à la gauche de l . L'élément qui joue le rôle du 1 est à la gauche de celui qui joue le rôle du 3. Il est strictement inférieur à $a = l + 1$ et différent de l , donc strictement inférieur à l . On trouve donc que l'élément qui joue le rôle du 3, l'élément qui joue le rôle du 1 et l forment une occurrence de 132 dans σ , absurde.

Montrons que ce sont les seuls sites actifs de σ . Par l'absurde, on suppose qu'il existe un site actif a qui n'est pas 1 et qui n'est pas de la forme $a = l + 1$ avec l RtoLmax. On remarque qu'il existe un RtoLmax à la gauche de a (car $a \neq n + 1$ puisque n est un RtoLmax). Pour ne pas former une occurrence de 132, tous les éléments plus petits que a doivent être à la droite de tous les éléments plus grands que a . Donc l'élément $a - 1$ n'a aucun élément plus grand à sa droite : c'est un RtoLmax, absurde. \square

Proposition 5.2. *Soit $\sigma \in Av_n(132)$. On note k son nombre de RtoLmax. Les permutations créées en insérant des éléments dans les sites actifs ont respectivement $1, 2, \dots, k, k + 1$ RtoLmax.*

Démonstration. Comme σ a k RtoLmax, on sait que σ a $k + 1$ sites actifs (car 1 est toujours un site actif). Soit $a_1 > \dots > a_{k+1} = 1$ les sites actifs de σ . Si on place un élément dans le site a_j , les sites actifs situés en dessous deviennent inactifs sauf $a_{k+1} = 1$. La permutation créée a donc $j + 1$ sites actifs, et j RtoLmax (car 1 est toujours un site actif). Les $k + 1$ permutations créées ont donc $1, \dots, k + 1$ RtoLmax. \square

A partir de ces deux propositions on peut montrer que cette méthode de construction permet bien de générer $Av(132)$ et que la règle de succession associée est bien Ω_{cat} si on prend le nombre de RtoLmax comme label.

5.2.2 Méthode des colonnes

Maintenant, on cherche un moyen de faire muter les permutations générées par insertion d'un minimum ou d'un élément juste au dessus d'un RtoLmax pour les transformer en permutations qui évitent 1423 mais contiennent de nouvelles occurrences de 132. Pour cela, on va mettre en place la méthode des colonnes, qu'on va illustrer avec un exemple.

Dans toute la suite, on considèrera que le label d'une permutation est son nombre de RtoLmax.

Soit $\sigma = 53412 \in Av(132)$. σ est de label 3, label qui apparait avec une multiplicité 3 dans la deuxième ligne de Ω_{pcat} , donc on doit créer deux nouvelles permutations par mutation. On applique la méthode des colonnes :

Soit $\sigma_1 = 5$, $\sigma_3 = 4$, $\sigma_5 = 2$ les RtoLmax de σ . On considère le RtoLmax le plus à droite dont l'élément à sa droite n'est pas un RtoLmax (l'élément dans la dernière colonne ne remplit

pas cette condition). Ici, il s'agit de $\sigma_3 = 4$. On va venir décaler sa colonne vers la droite jusqu'à ce qu'il soit dans la colonne adjacente à celle du RtoLmax situé à sa droite. On crée ainsi la permutation $\sigma' = 53142$. On réitère l'opération avec le RtoLmax le plus à droite dont l'élément de droite n'est pas un RtoLmin, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de RtoLmax à considérer. Cette méthode permet de générer deux permutations : $\sigma' = 53142$ et $\sigma'' = 31542$ (voir Figure 5.1).

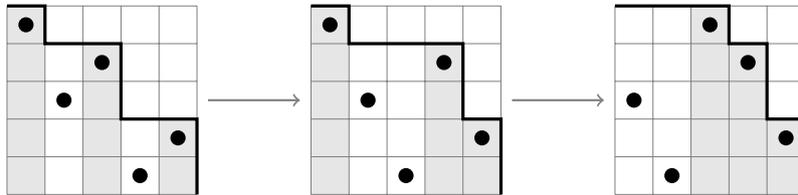


FIGURE 5.1 – Méthode des colonnes appliquée à $\sigma = 53412$. On crée les permutations $\sigma' = 53142$ et $\sigma'' = 31542$ en déplaçant les colonnes contenant des RtoLmax vers la droite

Proposition 5.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\sigma \in Av_n(132)$. Montrons que les permutations générées à partir de σ en appliquant la méthode des colonnes contiennent bien des occurrences de 132 mais évitent $14\overline{23}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que ces permutations contiennent une occurrence de 132. Soient $l_1 > \dots > l_k$ les k RtoLmax de σ . Par définition des RtoLmax, pour tout $i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$, les éléments de σ situés entre l_i et l_{i+1} sont plus petits que l_{i+1} . Donc, lorsque on déplace la colonne de l_i pour la placer directement à la gauche de celle de l_{i+1} , on forme bien un occurrence de 132 avec $l_i l_{i+1}$ qui forment le motif 21 et les éléments entre l_i et l_{i+1} qui joue le rôle du 1.

Ensuite, montrons que ces permutations évitent $14\overline{23}$. Par l'absurde, on suppose qu'elles contiennent $14\overline{23}$. On a alors deux possibilités :

- l'élément qui joue le rôle du 4 est un RtoLmax : on sait que l'élément qui joue le rôle du 2 n'est pas un RtoLmax, et il est à la droite de l'élément qui joue le rôle du 4. La méthode des colonnes garantit alors que la colonne de l'élément qui joue le rôle du 4 n'a pas encore été déplacée car sinon l'élément qui joue le rôle du 4 n'aurait que des RtoLmax à sa droite. Comme on ne forme pas de morceau de motif $\overline{23}$ par la méthode des colonnes, ce morceau de motif était déjà présent dans σ avant qu'on applique la méthode des colonnes : σ contient $14\overline{23}$, absurde.
- l'élément qui joue le rôle du 4 n'est pas un RtoLmax : il existe un RtoLmax plus grand que lui à sa droite. Si ce RtoLmax est situé à la gauche de l'élément qui joue le rôle du 2, on peut se ramener au cas précédent. Si ce RtoLmax est situé à droite de l'élément qui joue le rôle du 3, on a que le morceau de motif $4\overline{23}$ de cette occurrence est complètement comprise dans un bloc situé entre deux RtoLmax (ou à la gauche du RtoLmax le plus à gauche). Comme l'ordre de gauche à droite de ces éléments ne change pas par la méthode des colonnes, on a que avant l'application de la méthode, σ contenait $14\overline{23}$: absurde. \square

Proposition 5.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\sigma \in Av_n(132)$ de label k . La méthode des colonnes appliquée à σ génère des permutations dont le nombre et le label respectif vérifie Ω_{pcat} .*

Démonstration. D'après Ω_{pcat} , une permutation de label k doit générer les permutations suivantes : une permutation de label 1, deux permutations de label 2, \dots , k permutations de label k et

une permutation de label $k + 1$. La méthode de génération des permutations de $Av(132)$ permet de construire une permutation de chaque label. On observe que la permutation de label $k + 1$ est construite en ajoutant un nouveau 1 à σ . Les permutations de label $p > 1$ sont construite en ajoutant le nouvel élément au dessus d'un RtoLmax. En particulier, les permutations ainsi construites vérifient que l'élément de la dernière colonne est plus grand que celui situé dans sa colonne de gauche. Ainsi, on peut bien décaler les colonnes des RtoLmax vers la droite afin de réaliser la méthode des colonnes. Comme la permutation est de label p , on déplace $p - 1$ colonnes, et on crée bien $p - 1$ nouvelles permutations. Au final, on aura bien p permutations de label p , car la méthode des colonnes ne change pas le nombre de RtoLmax. \square

5.3 Problèmes rencontrés

Dans la section précédente, on a montré que l'on sait appliquer la méthode de croissance aux permutations de $Av(132)$ et les faire muter pour obtenir des permutations qui évitent $14\overline{23}$ mais contiennent une occurrence de 132 . Pour que la méthode soit complète, il faudrait également prouver que les permutations ainsi créées soient distinctes. De plus, il faut également pouvoir appliquer la méthode de croissance aux permutations qui évitent $14\overline{23}$ et contiennent une occurrence de 132 . Malheureusement, nous n'avons pas pu trouver une manière évidente de générer ces permutations.

Nous avons aussi fait face à un autre problème. Pour mieux comprendre le fonctionnement de la méthode, on a étudié l'ensemble des permutations de $Av_5(14\overline{23})$ en essayant de les relier aux permutations de $Av_4(14\overline{23})$. D'après Ω_{pcat} , on devrait avoir 16 permutations de $Av_5(14\overline{23})$ de label 2 et 9 de label 3. Cependant, en étudiant les permutations de $Av_5(14\overline{23})$, on a observé qu'il y avait 8 permutations avec 3 RtoLmax et 17 permutations avec 2 RtoLmax.

Il apparait donc que cette méthode, en définissant le label dans $Av(14\overline{23})$ comme le nombre de RtoLmax, ne permet pas de générer $Av(14\overline{23})$ car elle ne vérifie pas Ω_{pcat}

Conclusion

Ainsi, il apparait qu'aucune des méthodes utilisées n'ont pu prouver la conjecture. Le motif $14\overline{23}$ semble être plus complexe que ce qu'on pouvait espérer. En effet, des approches classiques pour énumérer $Av(14\overline{23})$ avaient déjà été essayées, mais sans succès : la méthode par arbres de génération a été essayé dans [4], ainsi que la méthode par *enumeration schemes* dans [3]. Cependant, le travail que nous avons effectué a tout de même pu ouvrir quelques pistes qui pourraient permettre de prouver la conjecture.

Pour la méthode par reformulation de la bijection de Reifegerste, nous n'avions pas réussi à adapter la bijection aux *valley marked Dyck paths* et aux permutations évitant $14\overline{23}$. Cependant, il serait possible de continuer à chercher une bijection entre ces deux familles d'objets en généralisant un peu plus la bijection, par exemple en n'utilisant pas uniquement les *LtoRmin* pour associer une permutation à un *valley marked Dyck path*.

Concernant la méthode de génération par insertion sur la droite, nous avons vu que la règle de succession obtenue était trop complexe pour être manipulée. Cependant, il serait possible d'étudier une famille d'objets énumérés par la séquence qui nous intéresse, et essayer d'explicitier une règle de succession pour cette famille qui serait la même que celle que nous avons trouvé pour $Av(14\overline{23})$. Cela permettrait alors de prouver la conjecture.

Enfin, nous avons vu que la méthode de génération à partir des permutations évitant 132 ne fonctionnait pas quand on prenait le nombre de *RtoLmax* comme label. Cependant, on pourrait essayer d'appliquer la même méthode avec un label différent, qui serait confondu avec le nombre de *RtoLmax* pour les permutations évitant 132 mais différent pour les permutations évitant $14\overline{23}$, et qui vérifierait Ω_{pcat} .

Bibliographie

- [1] M. ALBERT, M. ELDER, A. RECHNITZER, P. WESTCOTT & M. ZABROCKI – « On the Stanley–Wilf limit of 4231-avoiding permutations and a conjecture of Arratia », *Advances in Applied Mathematics* **36** (2006), no. 2, p. 96–105.
- [2] E. BABSON & E. STEINGRÍMSSON – « Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics. », *Séminaire Lotharingien de Combinatoire [electronic only]* **44** (2000), p. B44b, 18 p.–B44b, 18 p.
- [3] A. M. BAXTER & L. K. PUDWELL – « Enumeration schemes for vincular patterns », *Discrete Mathematics* **312** (2012), no. 10, p. 1699–1712.
- [4] N. R. BEATON, M. BOUVEL, V. GUERRINI & S. RINALDI – « Enumerating five families of pattern-avoiding inversion sequences; and introducing the powered catalan numbers », *Theoretical Computer Science* **777** (2019), p. 69–92.
- [5] D. BEVAN, R. BRIGNALL, A. ELVEY PRICE & J. PANTONE – « A structural characterisation of $\text{Av}(1324)$ and new bounds on its growth rate », *European Journal of Combinatorics* **88** (2020), p. 103115, Selected papers of EuroComb17.
- [6] M. BÓNA – « Exact enumeration of 1342-avoiding permutations : A close link with labeled trees and planar maps », *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **80** (1997), p. 257–272.
- [7] D. CALLAN – « A bijection to count (1-23-4)-avoiding permutations », *arXiv : Combinatorics* (2010).
- [8] A. CLAEISSON – « Generalized pattern avoidance », *European Journal of Combinatorics* **22** (2001), no. 7, p. 961–971.
- [9] A. CLAEISSON & S. KITAEV – « Classification of bijections between 321- and 132-avoiding permutations », 2008.
- [10] D. KNUTH – *The Art of Computer Programming*, vol. 1, Addison-Wesley, 1968.
- [11] M. LABALETTE, P. MARTY & T. PESCE – « Permutations évitant les motifs : Rapport en vue de la validation de l’UE initiation à la recherche », (2022).
- [12] P. MACMAHON – *Combinatory analysis*, vol. 1, Cambridge University Press, 1915.
- [13] A. REIFEGERSTE – « A Generalization of Simion-Schmidt’s bijection for restricted permutations », *The Electronic Journal of Combinatorics* **9** (2003), no. 2.