Permutations évitant des motifs : pourquoi ? comment ? combien ?

Mathilde Bouvel (CNRS, Loria, Nancy)

Visite des élèves de l'école des Mines, Décembre 2025

Un peu de contexte

- Dans cet exposé, on va parler d'informatique théorique et de mathématiques discrètes (par opposition aux mathématiques continues).
- Plus précisément, nous allons nous intéresser à la combinatoire (énumérative), la "science de compter" des objets discrets.
- Les objets au centre de cet exposé seront les permutations.

Permutations : définition et énumération

Une permutation d'un ensemble fini X est une manière d'ordonner totalement les éléments de X.

En combinatoire, on fixe souvent $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour un entier n quelconque. On parle alors de permutation de taille n.

Une permutation de taille n correspond à un tableau à n cases contenant exactement une fois chaque valeur entière entre 1 et n.

Exemple : $[3, 5, 1, 6, 2, 7, 4, 8]$ décrit une permutation de taille 8

Permutations : définition et énumération

Une permutation d'un ensemble fini X est une manière d'ordonner totalement les éléments de X.

En combinatoire, on fixe souvent $X = \{1, 2, \dots, n\}$ pour un entier n quelconque. On parle alors de permutation de taille n.

Une permutation de taille n correspond à un tableau à n cases contenant exactement une fois chaque valeur entière entre 1 et n.

Exemple : $[3, 5, 1, 6, 2, 7, 4, 8]$ décrit une permutation de taille 8

Énumération (ou comptage) : Notons a_n le nombre de permutations de taille n. On a $a_n = n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Digression : les classes combinatoires

L'ensemble des permutations (sous-entendu : d'un ensemble X de la forme $\{1, 2, \ldots, n\}$) satisfait les propriétés suivantes :

- chaque permutation a une taille (ici : le nombre d'objets permutés, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble X, ou l'entier n) ;
- pour chaque taille fixé, il y a un nombre fini d'objets de taille n (ici : on a vu que ce nombre est $n!$).

Digression : les classes combinatoires

L'ensemble des permutations (sous-entendu : d'un ensemble X de la forme $\{1, 2, \ldots, n\}$) satisfait les propriétés suivantes :

- chaque permutation a une taille (ici : le nombre d'objets permutés, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble X, ou l'entier n) ;
- pour chaque taille fixé, il y a un nombre fini d'objets de taille n (ici : on a vu que ce nombre est $n!$).

Les ensembles d'objets qui possèdent ces deux propriétés s'appellent des classes combinatoires, et sont étudiés en ... combinatoire.

Questions classiques :

- trouver une formule, ou à défaut toute l'information possible sur le nombre d'objets de taille n, pour un n générique ;
- savoir à quoi ressemble un objet typique de grande taille ;
- ...

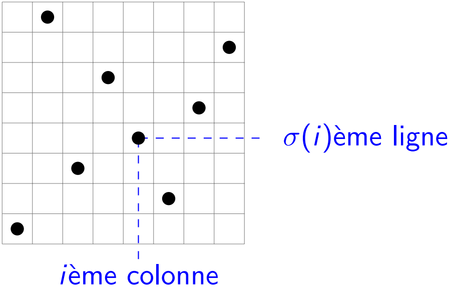
Une vision “géométrique” des permutations

Toute permutation de taille n, notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, peut être représentée par son diagramme : c'est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n, un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Une vision "géométrique" des permutations

Toute permutation de taille n, notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, peut être représentée par son diagramme : c'est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n, un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

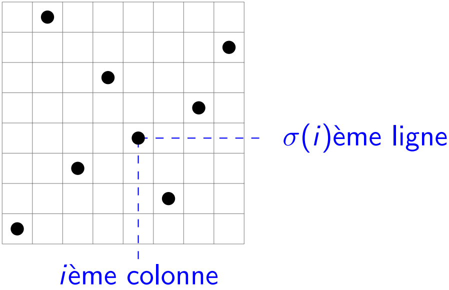
Exemple : Le diagramme de $\sigma = 1\ 8\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7$ est



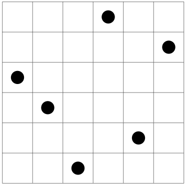
Une vision “géométrique” des permutations

Toute permutation de taille n, notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, peut être représentée par son diagramme : c'est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n, un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Exemple : Le diagramme de $\sigma = 1\ 8\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7$ est



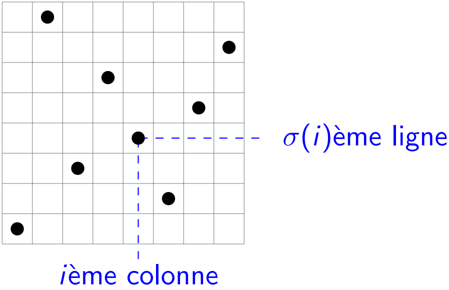
Exercice :
De quelle permutation la figure ci-dessous est-elle le diagramme ?



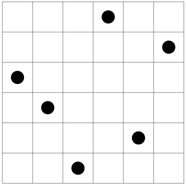
Une vision “géométrique” des permutations

Toute permutation de taille n, notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, peut être représentée par son diagramme : c'est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n, un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Exemple : Le diagramme de $\sigma = 1\ 8\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7$ est



Exercice :
De quelle permutation la figure ci-dessous est-elle le diagramme ?

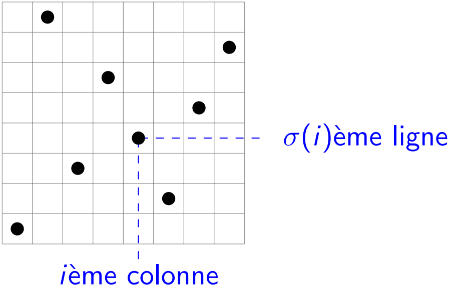


Réponse : 4 3 1 6 2 5

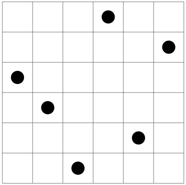
Une vision “géométrique” des permutations

Toute permutation de taille n, notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, peut être représentée par son diagramme : c’est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n, un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Exemple : Le diagramme de $\sigma = 1\ 8\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7$ est



Exercice :
De quelle permutation la figure ci-dessous est-elle le diagramme ?



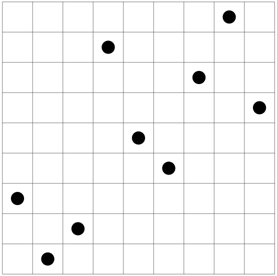
Réponse : 4 3 1 6 2 5

Remarque :
Un diagramme contient exactement un point par ligne et par colonne.

Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est motif de, ou est contenue dans, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

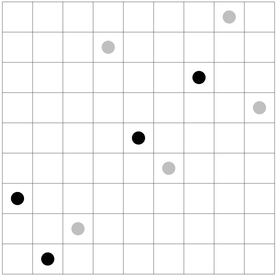
Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car



Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est motif de, ou est contenue dans, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

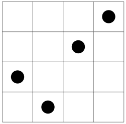
Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car



Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est motif de, ou est contenue dans, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car



Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est motif de, ou est contenue dans, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car ...
Autrement dit, car on trouve une sous-séquence de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 dont les éléments se comparent comme dans 2 1 3 4. Ici : **3 1** 2 8 **5** 4 **7** 9 6.
La sous-séquence 3 1 5 7 est appelée occurrence de 2 1 3 4.

Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est motif de, ou est contenue dans, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car ...
Autrement dit, car on trouve une sous-séquence de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 dont les éléments se comparent comme dans 2 1 3 4. Ici : **3** **1** 2 8 **5** 4 **7** 9 6.
La sous-séquence 3 1 5 7 est appelée occurrence de 2 1 3 4.

Exercice :
Est-ce que les motifs 1 2 3 et 3 2 1 apparaissent dans $\tau = 4\ 3\ 1\ 6\ 5\ 2$?

Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est motif de, ou est contenue dans, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car ...
Autrement dit, car on trouve une sous-séquence de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 dont les éléments se comparent comme dans 2 1 3 4. Ici : **3 1** 2 8 **5** 4 **7** 9 6.
La sous-séquence 3 1 5 7 est appelée occurrence de 2 1 3 4.

Exercice :
Est-ce que les motifs 1 2 3 et 3 2 1 apparaissent dans $\tau = 4\ 3\ 1\ 6\ 5\ 2$?

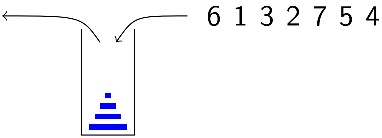
Réponse : oui pour 3 2 1 mais non pour 1 2 3.
Il y a même 3 occurrences de 3 2 1 dans τ.

Pourquoi introduire ces motifs ?

- à l'origine, pour caractériser les permutations triables par une pile (on y revient juste après) ;
- c'est une notion naturelle de sous-structure dans les permutations ;
- l'ordre partiel induit a de belles propriétés ;
- la combinatoire des familles de permutations évitant des motifs est riche, et un bon cadre pour le développement de nouvelles méthodes utiles plus largement en combinatoire ;
- les permutations évitant des motifs sont en bijection avec de nombreux autres objets discrets ;
- les motifs de permutations apparaissent aussi naturellement dans d'autres domaines (par exemple en mathématiques pour caractériser certaines propriétés des variétés de Schubert, en algorithmique et en complexité, . . .)

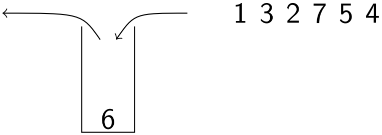
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



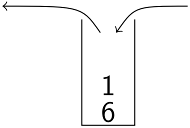
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



Tri par pile des permutations

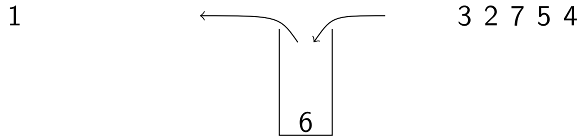
Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



3 2 7 5 4

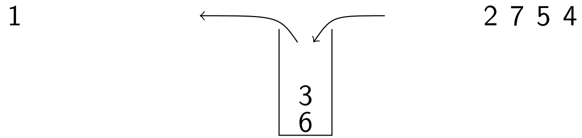
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



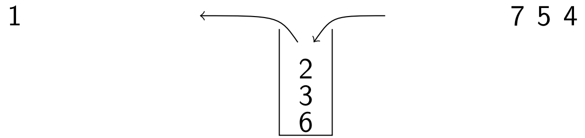
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



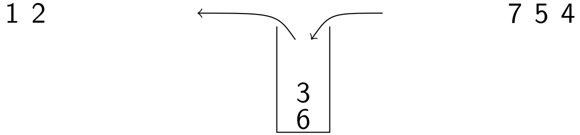
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



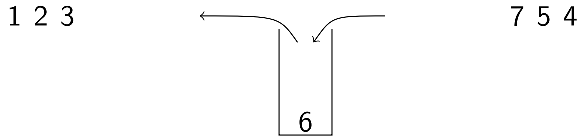
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



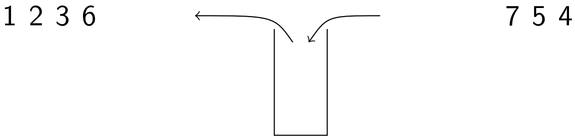
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



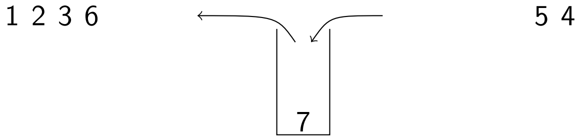
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



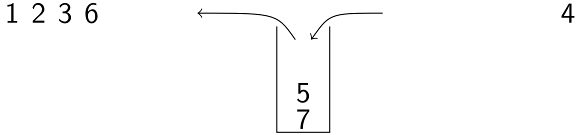
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



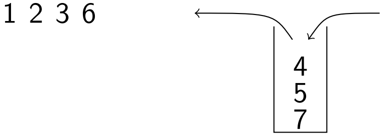
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".

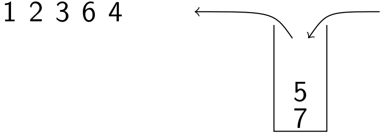


Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".

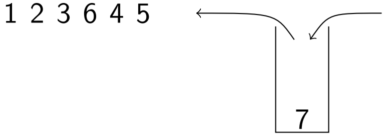


Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



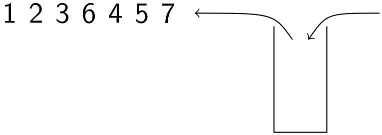
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



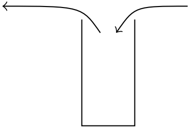
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".



Tri par pile des permutations

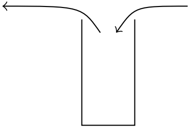
Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".

1 2 3 6 4 5 7  6 1 3 2 7 5 4

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

$\mathbf{S}(\sigma) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7$

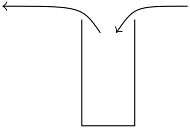


$6\ 1\ 3\ 2\ 7\ 5\ 4 = \sigma$

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".

$\mathbf{S}(\sigma) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7$

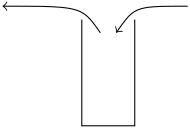


$6\ 1\ 3\ 2\ 7\ 5\ 4 = \sigma$

Exercice : Calculer $\mathbf{S}(\rho)$ pour $\rho = 2\ 1\ 3\ 7\ 6\ 4\ 5$
et $\mathbf{S}(\tau)$ pour $\tau = 2\ 1\ 3\ 6\ 7\ 4\ 5$.

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".

$\mathbf{S}(\sigma) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7$  $6\ 1\ 3\ 2\ 7\ 5\ 4 = \sigma$

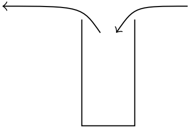
Exercice : Calculer $\mathbf{S}(\rho)$ pour $\rho = 2\ 1\ 3\ 7\ 6\ 4\ 5$
et $\mathbf{S}(\tau)$ pour $\tau = 2\ 1\ 3\ 6\ 7\ 4\ 5$.

Réponse : $\mathbf{S}(\rho) = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$ et $\mathbf{S}(\tau) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7$

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui "essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas".

$\mathbf{S}(\sigma) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7$ $\qquad$ $6\ 1\ 3\ 2\ 7\ 5\ 4 = \sigma$



Exercice : Calculer $\mathbf{S}(\rho)$ pour $\rho = 2\ 1\ 3\ 7\ 6\ 4\ 5$
et $\mathbf{S}(\tau)$ pour $\tau = 2\ 1\ 3\ 6\ 7\ 4\ 5$.

Réponse : $\mathbf{S}(\rho) = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$ et $\mathbf{S}(\tau) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7$

Définition : Une permutation σ est triable par une pile lorsque $\mathbf{S}(\sigma)$ est en ordre croissant.

Lien entre motifs et tri par pile

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

Lien entre motifs et tri par pile

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

On démontre plutôt la contraposée (qui est logiquement équivalente) :
σ n'est pas triable par une pile si et seulement si σ contient le motif 231.

Lien entre motifs et tri par pile

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

On démontre plutôt la contraposée (qui est logiquement équivalente) :
σ n'est pas triable par une pile si et seulement si σ contient le motif 231.

Élements de preuve :

- $\mathbf{S}(231) = 213$: lorsque le "3" entre dans la pile, il pousse le "2" vers la sortie, alors que le "1" est plus loin à droite.

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

On démontre plutôt la contraposée (qui est logiquement équivalente) :
σ n'est pas triable par une pile si et seulement si σ contient le motif 231.

Élements de preuve :

- $\mathbf{S}(231) = 213$: lorsque le "3" entre dans la pile, il pousse le "2" vers la sortie, alors que le "1" est plus loin à droite.

$\Leftarrow$ Lorsqu'on a une occurrence $\ldots j \ldots k \ldots i \ldots$ de 231 dans σ (avec $i < j < k$), de la même manière, le k fait sortir le j avant que le i n'entre dans la pile, donc i et j ne sont pas triés dans $\mathbf{S}(\sigma)$.

Lien entre motifs et tri par pile

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

On démontre plutôt la contraposée (qui est logiquement équivalente) :
σ n'est pas triable par une pile si et seulement si σ contient le motif 231.

Élements de preuve :

- $\mathbf{S}(231) = 213$: lorsque le "3" entre dans la pile, il pousse le "2" vers la sortie, alors que le "1" est plus loin à droite.

$\Leftarrow$ Lorsqu'on a une occurrence $\dots j \dots k \dots i \dots$ de 231 dans σ (avec $i < j < k$), de la même manière, le k fait sortir le j avant que le i n'entre dans la pile, donc i et j ne sont pas triés dans $\mathbf{S}(\sigma)$.

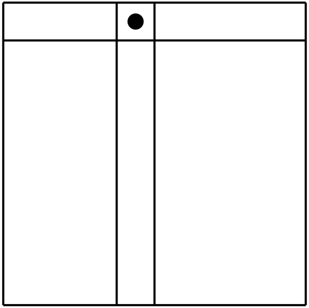
$\Rightarrow$ La situation ci-dessus est la seule qui empêche deux éléments $j > i$ apparaissant dans l'ordre $\dots j \dots i \dots$ dans σ d'être triés dans $\mathbf{S}(\sigma)$.

Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

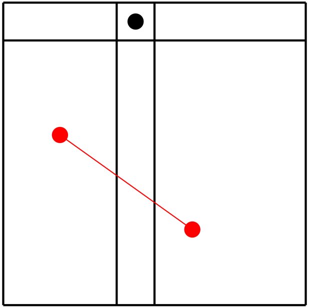
Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son maximum :



Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

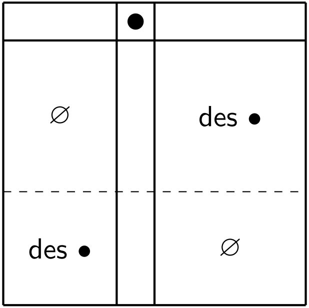
Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son maximum :



Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

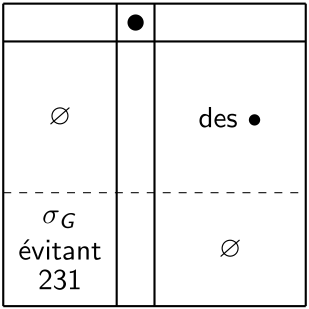
Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son maximum :



Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

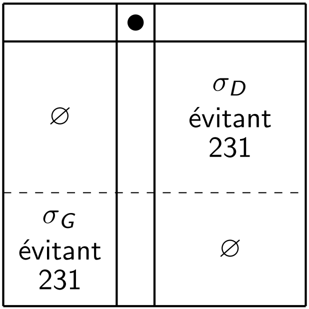
Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son maximum :



Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

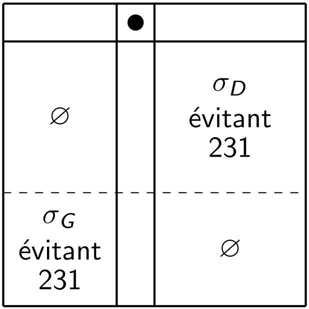
Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son maximum :



Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes. Essayons maintenant de mieux les comprendre !

Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son maximum :



Réciproquement, une telle permutation évite 231.

De la structure au comptage (ou énumération)

On a vu que toute permutation σ évitant 231 se décompose en trois :

- son maximum,
- la permutation σ_G qui évite 231,
- et la permutation σ_D qui évite 231.

Si σ est de taille n, alors la taille de σ_G est une valeur k telle que $0 \leq k \leq n-1$, et la taille de σ_D est alors $n-1-k$.

De la structure au comptage (ou énumération)

On a vu que toute permutation σ évitant 231 se décompose en trois :

- son maximum,
- la permutation σ_G qui évite 231,
- et la permutation σ_D qui évite 231.

Si σ est de taille n, alors la taille de σ_G est une valeur k telle que $0 \leq k \leq n-1$, et la taille de σ_D est alors $n-1-k$.

Si on note c_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 231, on a donc la récurrence suivante :
$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}.$$

Avec cette récurrence, sachant que $c_0 = 1$ (et aussi $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5$ si vous voulez), on peut calculer autant de c_n que l'on veut.

De la structure au comptage (ou énumération)

On a vu que toute permutation σ évitant 231 se décompose en trois :

- son maximum,
- la permutation σ_G qui évite 231,
- et la permutation σ_D qui évite 231.

Si σ est de taille n, alors la taille de σ_G est une valeur k telle que $0 \leq k \leq n-1$, et la taille de σ_D est alors $n-1-k$.

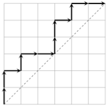
Si on note c_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 231, on a donc la récurrence suivante :
$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}.$$

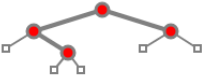
Avec cette récurrence, sachant que $c_0 = 1$ (et aussi $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5$ si vous voulez), on peut calculer autant de c_n que l'on veut.

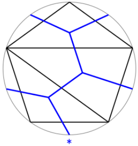
"Philosophie" : Si on sait compter des objets, c'est que l'on a compris leur structure.

Les nombres c_n définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$ sont appelés nombres de Catalan (en référence au mathématicien franco-belge Eugène Charles Catalan, 1814-1894).

Ils énumèrent les permutations qui évitent 231 mais aussi plein d'autres familles d'objets combinatoires : chemins de Dyck, arbres binaires, triangulations de polygones, ...







Le *Catalan addendum* de R. Stanley référence plus de 200 telles familles !

Mieux connaître les nombres de Catalan, et l'OEIS

Rappel : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Premières valeurs :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Mieux connaître les nombres de Catalan, et l'OEIS

Rappel : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Premières valeurs :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

OEIS : C'est l'encyclopédie en ligne des séquences d'entiers
`https://oeis.org/`

La suite des nombres de Catalan y porte l'identifiant A000108.
On trouve sur sa page énormément d'information sur ces nombres !

Mieux connaître les nombres de Catalan, et l'OEIS

Rappel : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Premières valeurs :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

OEIS : C'est l'encyclopédie en ligne des séquences d'entiers
`https://oeis.org/`

La suite des nombres de Catalan y porte l'identifiant A000108.
On trouve sur sa page énormément d'information sur ces nombres !

Et cela fonctionne pour toutes les suites d'entiers connues, qu'elles soient célèbres ou non (plus de 370 000 entrées).

Exemples : A000142 (factorielles), A000045 (Fibonacci), A093907 (table périodique des éléments !), A281784 (surprise. . .)

Nombres de Catalan : formule close

Rappel (encore) : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Théorème : Pour tout entier n, on a

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Notations :

- Factorielles : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ (convention : $0! = 1$)
- Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2 \ldots k}$

Nombres de Catalan : formule close

Rappel (encore) : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Théorème : Pour tout entier n, on a

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Notations :

- Factorielles : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ (convention : $0! = 1$)
- Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}$

Preuve "classique" : Par séries génératrices et développements limités

Nombres de Catalan : formule close

Rappel (encore) : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Théorème : Pour tout entier n, on a

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Notations :

- Factorielles : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ (convention : $0! = 1$)
- Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$

Preuve "classique" : Par séries génératrices et développements limités

Une preuve par récurrence existe, mais elle est astucieuse.

Asymptotique des nombres de Catalan

L'asymptotique d'une suite de nombres décrit sa vitesse de croissance.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	...	20
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	...	6564120420
$n! =$	1	2	6	24	120	720	75040	...	2432902008176640000

Asymptotique des nombres de Catalan

L'asymptotique d'une suite de nombres décrit sa vitesse de croissance.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	...	20
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	...	6564120420
$n! =$	1	2	6	24	120	720	75040	...	2432902008176640000

Théorème :

$$c_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}$$

Remarques :

- On peut le démontrer à partir de la formule de Stirling pour l'équivalent de la factorielle.
- En comparaison, $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$. C'est beaucoup plus rapide !

Asymptotique des nombres de Catalan

L'asymptotique d'une suite de nombres décrit sa vitesse de croissance.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	...	20
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	...	6564120420
$n! =$	1	2	6	24	120	720	75040	...	2432902008176640000

Théorème :

$$c_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}$$

Remarques :

- On peut le démontrer à partir de la formule de Stirling pour l'équivalent de la factorielle.
- En comparaison, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. C'est beaucoup plus rapide !

Théorème ([Marcus-Tardos, 2004, ex-conjecture de Stanley-Wilf]) :
Pour tout motif σ, il existe une constante c_σ telle que le nombre a_n de permutations de taille n qui évitent σ est inférieur à c_σ^n pour tout n.

Autres motifs de taille 3

Par rotation, pour tout n, on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,

Autres motifs de taille 3

Par rotation, pour tout n, on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,

Autres motifs de taille 3

Par rotation, pour tout n, on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,
- le nombre de permutations de taille n évitant 312,

Autres motifs de taille 3

Par rotation, pour tout n, on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,
- le nombre de permutations de taille n évitant 312,
- le nombre de permutations de taille n évitant 213.

Autres motifs de taille 3

Par rotation, pour tout n, on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,
- le nombre de permutations de taille n évitant 312,
- le nombre de permutations de taille n évitant 213.

Donc pour tout motif de taille 3 non-monotone, le nombre de permutations de taille n qui évitent ce motif est c_n.

Autres motifs de taille 3

Par rotation, pour tout n, on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,
- le nombre de permutations de taille n évitant 312,
- le nombre de permutations de taille n évitant 213.

Donc pour tout motif de taille 3 non-monotone, le nombre de permutations de taille n qui évitent ce motif est c_n.

Théorème :
Le nombre de permutations de taille n qui évitent un motif de taille 3 monotone (c'est-à-dire 123, ou 321) est aussi c_n.

Il existe beaucoup de preuves par bijection, dont une bonne partie utilise les chemins de Dyck comme objets intermédiaires.

Évitement de motifs plus grands

Il y a des centaines d'articles de recherche sur le sujet !

Voir, en particulier, la page Wikipédia *Enumerations of specific permutation classes*

Classes avoiding one pattern of length 3 [edit]

There are two symmetry classes and a single Wilf class for single permutations of length three.

β	sequence enumerating $Av_n(\beta)$	OEIS	type of sequence	exact enumeration reference
123 231	1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...	A000108	algebraic (nonrational) g.f. Catalan numbers	MacMahon (1916) Knuth (1968)

Classes avoiding one pattern of length 4 [edit]

There are seven symmetry classes and three Wilf classes for single permutations of length four.

β	sequence enumerating $Av_n(\beta)$	OEIS	type of sequence	exact enumeration reference
1342 2413	1, 2, 6, 23, 103, 512, 2740, 15485, ...	A022558	algebraic (nonrational) g.f.	Bóna (1997)
1234 1243 1432 2143	1, 2, 6, 23, 103, 513, 2761, 15767, ...	A005802	holonomic (nonalgebraic) g.f.	Gessel (1990)
1324	1, 2, 6, 23, 103, 513, 2762, 15793, ...	A061552		

Un problème ouvert

Comment sont énumérées les permutations évitant le motif 1324 ???

Notons a_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 1324.

Un problème ouvert

Comment sont énumérées les permutations évitant le motif 1324 ???

Notons a_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 1324.

- On connaît la valeur de a_n seulement jusqu'à $n = 50$ (et avant 2018, c'était seulement jusqu'à $n = 36$).
  Pour les obtenir, il a fallu concevoir un algorithme très malin.

Un problème ouvert

Comment sont énumérées les permutations évitant le motif 1324 ???

Notons a_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 1324.

- On connaît la valeur de a_n seulement jusqu'à $n = 50$ (et avant 2018, c'était seulement jusqu'à $n = 36$).
  Pour les obtenir, il a fallu concevoir un algorithme très malin.
- On sait qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que

$$c_1 \times (10.271)^n \leq a_n \leq c_3 \times (13.5)^n$$

  (et ces bornes étaient moins bonnes avant 2017).

Un problème ouvert

Comment sont énumérées les permutations évitant le motif 1324 ???

Notons a_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 1324.

- On connaît la valeur de a_n seulement jusqu'à $n = 50$ (et avant 2018, c'était seulement jusqu'à $n = 36$).
  Pour les obtenir, il a fallu concevoir un algorithme très malin.
- On sait qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que

$$c_1 \times (10.271)^n \leq a_n \leq c_3 \times (13.5)^n$$

  (et ces bornes étaient moins bonnes avant 2017).
- On ne connaît pas l'asymptotique de a_n, mais on conjecture (2018) que

$$a_n \sim c_3 \times \mu^n \times \mu_1^{\sqrt{n}} \times n^g$$

  où $\mu \approx 11.600 \pm 0.003$, $\mu_1 \approx 0.0400 \pm 0.0005$ et $g = -1.1 \pm 0.1$.

Merci de votre écoute !

Ce qu'on a vu :

- Comprendre et compter les permutations évitant 231 est facile (pour un problème de recherche !).
- Comprendre et compter les permutations évitant 1324 est extrêmement difficile.

Plus généralement, cet exposé illustre ce que peut être la recherche en combinatoire, un des domaines à la frontière math-info.

Merci de votre écoute !

Ce qu'on a vu :

- Comprendre et compter les permutations évitant 231 est facile (pour un problème de recherche !).
- Comprendre et compter les permutations évitant 1324 est extrêmement difficile.

Plus généralement, cet exposé illustre ce que peut être la recherche en combinatoire, un des domaines à la frontière math-info.

N'hésitez pas à me poser (tout de suite, ou plus tard) :

- des questions générales sur ma recherche, mon métier, mes études, ... ou tout autre sujet lié ;
- des questions "techniques" sur le contenu de l'exposé ou plus généralement les permutations.