

Permutations évitant des motifs : pourquoi ? comment ? combien ?

Mathilde Bouvel (CNRS, Loria, Nancy)

TFJM², 14 avril 2024



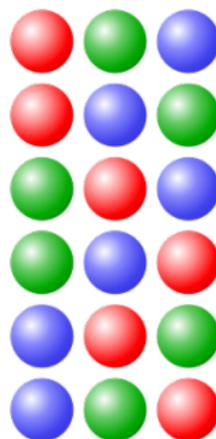
Un peu de contexte

- Dans cet exposé, on va parler de mathématiques **discrètes** (par opposition aux mathématiques **continues**).
- Plus précisément, nous allons nous intéresser à la **combinatoire (énumérative)**, la “science de compter” des objets mathématiques discrets.
- Les objets au centre de cet exposé seront les **permutations**.

Qu'est ce qu'une permutation ?

Extraits de Wikipédia :

- En mathématiques, la notion de permutation exprime l'idée de **réarrangement d'objets discernables**. Une permutation d'objets distincts rangés dans un certain ordre correspond à un changement de l'ordre de succession de ces objets.
- Une permutation d'un ensemble X est une bijection de X sur lui-même.



Chaque rangée est une permutation des trois billes de couleur.

Qu'est ce qu'une permutation ?

Autrement dit :

Une permutation d'un ensemble X est **une manière d'ordonner totalement** les éléments de X .

En combinatoire, on fixe souvent $X = \{1, 2, \dots, n\}$ pour un entier n quelconque. On parle alors de permutation **de taille n** .

Exercice : Quelles sont les permutations de taille 3 ?

Qu'est ce qu'une permutation ?

Autrement dit :

Une permutation d'un ensemble X est **une manière d'ordonner totalement** les éléments de X .

En combinatoire, on fixe souvent $X = \{1, 2, \dots, n\}$ pour un entier n quelconque. On parle alors de permutation **de taille n** .

Exercice : Quelles sont les permutations de taille 3 ?

Réponse : Il y en a 6, qui sont 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Qu'est ce qu'une permutation ?

Autrement dit :

Une permutation d'un ensemble X est **une manière d'ordonner totalement** les éléments de X .

En combinatoire, on fixe souvent $X = \{1, 2, \dots, n\}$ pour un entier n quelconque. On parle alors de permutation **de taille n** .

Exercice : Quelles sont les permutations de taille 3 ?

Réponse : Il y en a 6, qui sont 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Exercice : Quelles sont les permutations de taille 4 ?

Qu'est ce qu'une permutation ?

Autrement dit :

Une permutation d'un ensemble X est **une manière d'ordonner totalement** les éléments de X .

En combinatoire, on fixe souvent $X = \{1, 2, \dots, n\}$ pour un entier n quelconque. On parle alors de permutation **de taille n** .

Exercice : Quelles sont les permutations de taille 3 ?

Réponse : Il y en a 6, qui sont 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Exercice : Quelles sont les permutations de taille 4 ?

Réponse : Il y en a 24, qui sont 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2134, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Combien y a-t-il de permutations ?

- Nombre (noté a_n) de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ pour les petites

valeurs de n :

$n =$	1	2	3	4
$a_n =$	1	2	6	24

- Peut-on trouver une formule pour a_n , comme fonction de n ?

Combien y a-t-il de permutations ?

- Nombre (noté a_n) de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ pour les petites

valeurs de n :

$n =$	1	2	3	4
$a_n =$	1	2	6	24

- Peut-on trouver une formule pour a_n , comme fonction de n ?

Remarque : Si X est un ensemble de n éléments, alors le nombre de permutations de X est aussi a_n .

Combien y a-t-il de permutations ?

- Nombre (noté a_n) de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ pour les petites

valeurs de n :

$n =$	1	2	3	4
$a_n =$	1	2	6	24

- Peut-on trouver une formule pour a_n , comme fonction de n ?

Remarque : Si X est un ensemble de n éléments, alors le nombre de permutations de X est aussi a_n .

Récurrence : Les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ sont toutes décrites de la manière suivante :

- un premier élément i , choisi parmi $\{1, 2, \dots, n\}$ n choix possibles
- puis une permutation de $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ a_{n-1} choix possibles

Donc $a_n = n \times a_{n-1}$.

Combien y a-t-il de permutations ?

- Nombre (noté a_n) de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ pour les petites

valeurs de n :

$n =$	1	2	3	4
$a_n =$	1	2	6	24

- Peut-on trouver une formule pour a_n , comme fonction de n ?

Remarque : Si X est un ensemble de n éléments, alors le nombre de permutations de X est aussi a_n .

Récurrence : Les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ sont toutes décrites de la manière suivante :

- un premier élément i , choisi parmi $\{1, 2, \dots, n\}$ n choix possibles
- puis une permutation de $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ a_{n-1} choix possibles

Donc $a_n = n \times a_{n-1}$.

Théorème : \uparrow lire "factorielle n "

Le nombre de permutations de taille n est $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$.

Digression : les classes combinatoires

L'ensemble des permutations (sous-entendu : d'un ensemble X de la forme $\{1, 2, \dots, n\}$) satisfait les propriétés suivantes :

- chaque permutation a une **taille** (ici : le nombre d'objets permutés, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble X , ou l'entier n) ;
- pour chaque taille fixé, il y a un **nombre fini** d'objets de taille n (ici : on a vu que ce nombre est $n!$).

Digression : les classes combinatoires

L'ensemble des permutations (sous-entendu : d'un ensemble X de la forme $\{1, 2, \dots, n\}$) satisfait les propriétés suivantes :

- chaque permutation a une **taille** (ici : le nombre d'objets permutés, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble X , ou l'entier n) ;
- pour chaque taille fixé, il y a un **nombre fini** d'objets de taille n (ici : on a vu que ce nombre est $n!$).

Les ensembles d'objets qui possèdent ces deux propriétés s'appellent des **classes combinatoires**, et sont étudiés en ... combinatoire.

Questions classiques :

- trouver une formule, ou à défaut toute l'information possible sur le nombre d'objets de taille n , pour un n générique ;
- savoir à quoi ressemble un objet typique de grande taille ;
- ...

Une vision “géométrique” des permutations

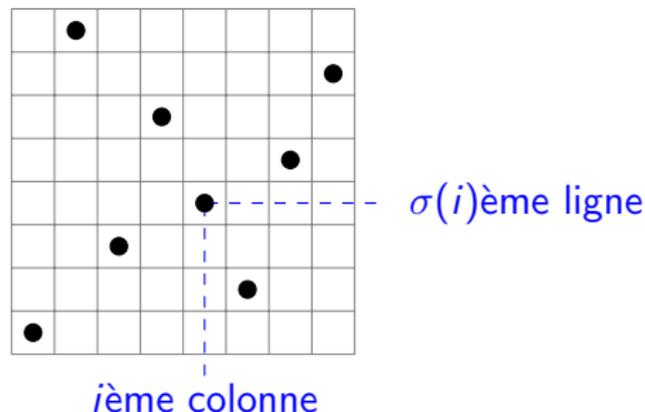
Toute permutation de taille n , notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$, peut être représentée par son **diagramme** : c'est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n , un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Une vision “géométrique” des permutations

Toute permutation de taille n , notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$, peut être représentée par son **diagramme** : c’est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n , un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Exemple : Le diagramme de

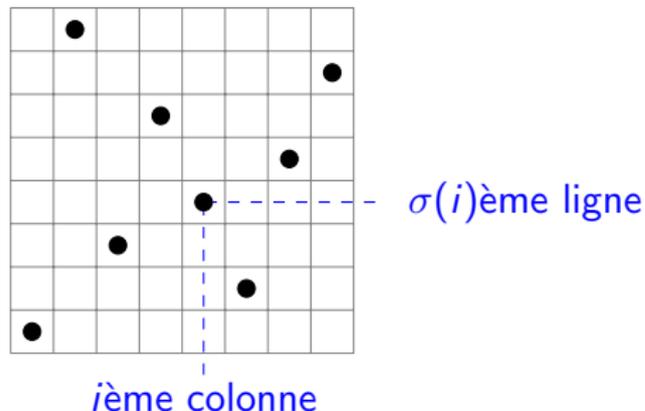
$\sigma = 1\ 8\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7$ est



Une vision “géométrique” des permutations

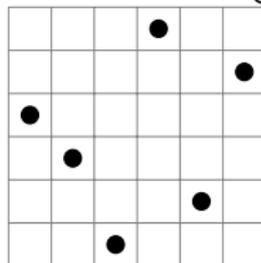
Toute permutation de taille n , notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$, peut être représentée par son **diagramme** : c’est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n , un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Exemple : Le diagramme de $\sigma = 1\ 8\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7$ est



Exercice :

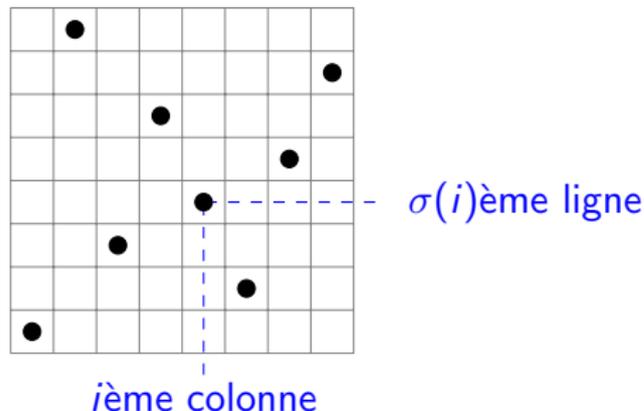
De quelle permutation la figure ci-dessous est-elle le diagramme ?



Une vision “géométrique” des permutations

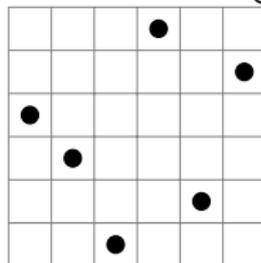
Toute permutation de taille n , notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$, peut être représentée par son **diagramme** : c’est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n , un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Exemple : Le diagramme de $\sigma = 1\ 8\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7$ est



Exercice :

De quelle permutation la figure ci-dessous est-elle le diagramme ?

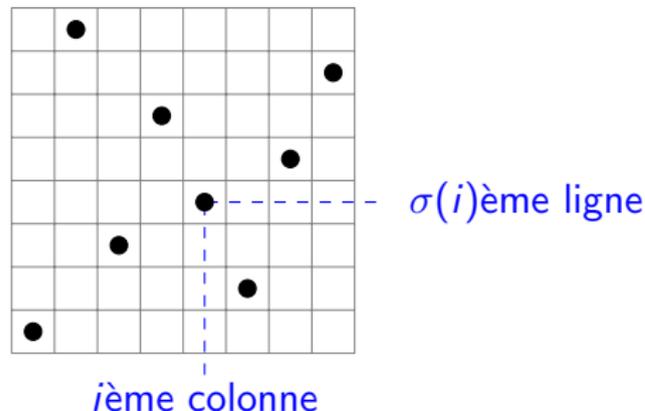


Réponse : 4 3 1 6 2 5

Une vision “géométrique” des permutations

Toute permutation de taille n , notée $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$, peut être représentée par son **diagramme** : c’est la grille $n \times n$ où on place, pour chaque i de 1 à n , un point dans la case de coordonnées $(i, \sigma(i))$.

Exemple : Le diagramme de $\sigma = 1\ 8\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5\ 7$ est

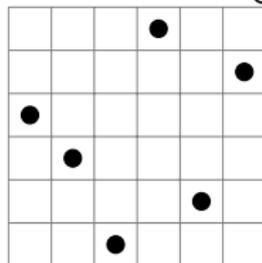


Remarque :

Un diagramme contient exactement un point par ligne et par colonne.

Exercice :

De quelle permutation la figure ci-dessous est-elle le diagramme ?

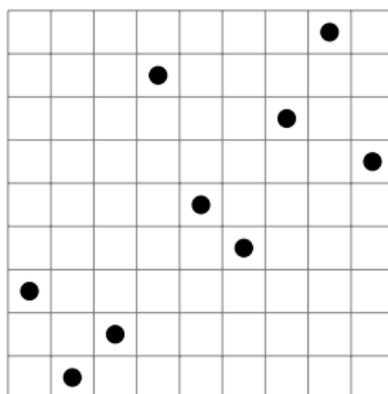


Réponse : 4 3 1 6 2 5

Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est **motif de**, ou est **contenue dans**, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

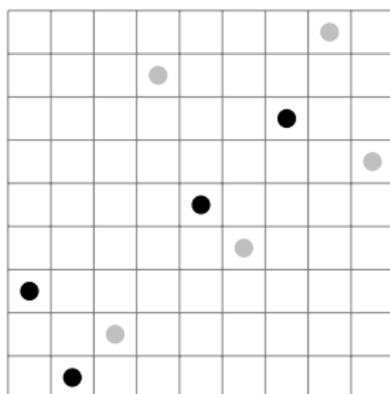
Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car



Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est **motif de**, ou est **contenue dans**, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

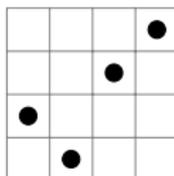
Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car



Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est **motif de**, ou est **contenue dans**, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car



Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est **motif de**, ou est **contenue dans**, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car ...

Autrement dit, car on trouve une sous-séquence de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 dont les éléments **se comparent comme** dans 2 1 3 4. Ici : **3 1 2 8 5 4 7 9 6**.

La sous-séquence 3 1 5 7 est appelée **occurrence** de 2 1 3 4.

Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est **motif de**, ou est **contenue dans**, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car ...

Autrement dit, car on trouve une sous-séquence de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 dont les éléments **se comparent comme** dans 2 1 3 4. Ici : **3 1 2 8 5 4 7 9 6**. La sous-séquence 3 1 5 7 est appelée **occurrence** de 2 1 3 4.

Exercice :

Est-ce que les motifs 1 2 3 et 3 2 1 apparaissent dans $\tau = 4 3 1 6 5 2$?

Motifs dans les permutations

On dit qu'une (petite) permutation σ est **motif de**, ou est **contenue dans**, une (grande) permutation τ lorsque l'on peut obtenir le diagramme de σ à partir de celui de τ en effaçant des points (ainsi que les lignes et les colonnes qui se retrouvent vides).

Exemple : 2 1 3 4 est motif de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 car ...

Autrement dit, car on trouve une sous-séquence de 3 1 2 8 5 4 7 9 6 dont les éléments **se comparent comme** dans 2 1 3 4. Ici : **3 1 2 8 5 4 7 9 6**.

La sous-séquence 3 1 5 7 est appelée **occurrence** de 2 1 3 4.

Exercice :

Est-ce que les motifs 1 2 3 et 3 2 1 apparaissent dans $\tau = 4 3 1 6 5 2$?

Réponse : oui pour 3 2 1 mais non pour 1 2 3.

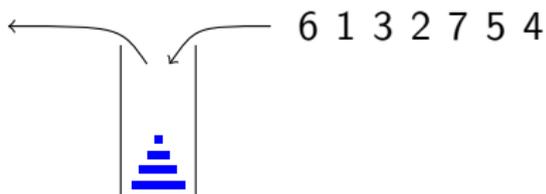
Il y a même 3 occurrences de 3 2 1 dans τ .

Pourquoi introduire ces motifs ?

- à l'origine, pour caractériser les **permutations triables par une pile** (on y revient juste après) ;
- c'est une notion naturelle de **sous-structure** dans les permutations ;
- l'**ordre partiel** induit a de belles propriétés ;
- la combinatoire des familles de permutations évitant des motifs est riche, et un bon cadre pour le **développement de nouvelles méthodes** utiles plus largement en combinatoire ;
- les permutations évitant des motifs sont en **bijection** avec de nombreux autres objets discrets ;
- les motifs de permutations apparaissent aussi naturellement **dans d'autres domaines** des maths (pour caractériser certaines propriétés des variétés de Schubert)

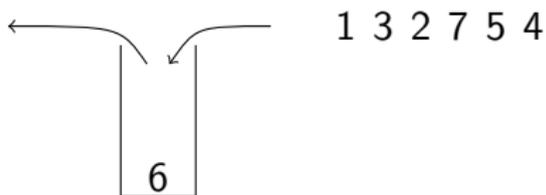
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



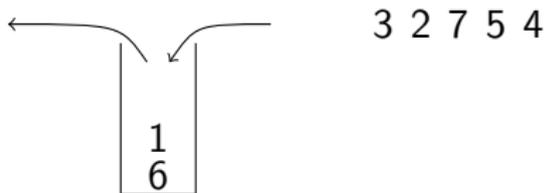
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



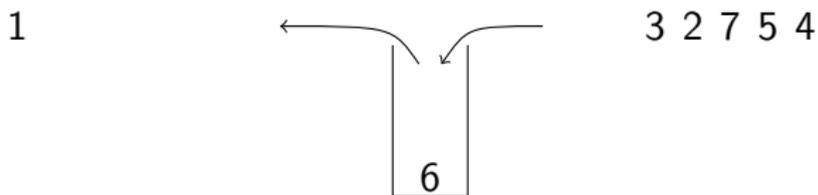
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



Tri par pile des permutations

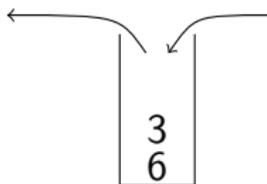
Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

1

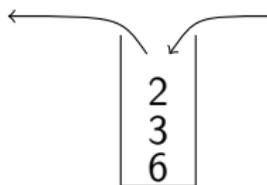


2 7 5 4

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

1

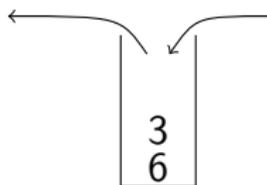


7 5 4

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

1 2

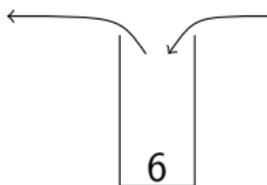


7 5 4

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

1 2 3

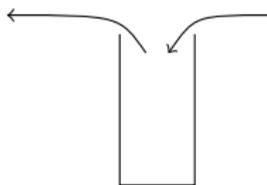


7 5 4

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction S qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

1 2 3 6

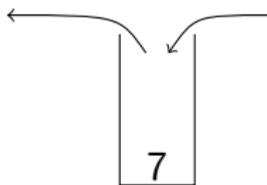


7 5 4

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

1 2 3 6

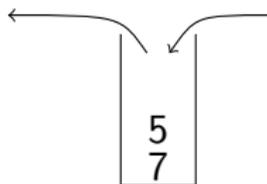


5 4

Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

1 2 3 6

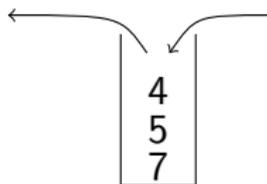


4

Tri par pile des permutations

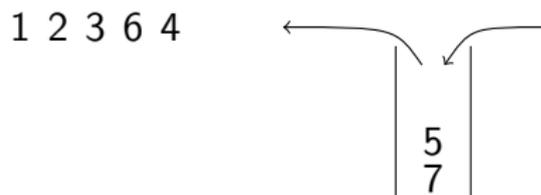
Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

1 2 3 6



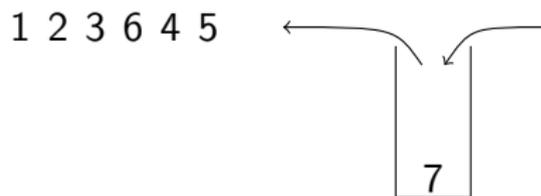
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



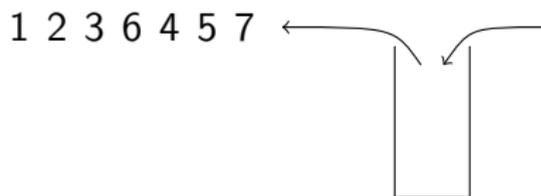
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



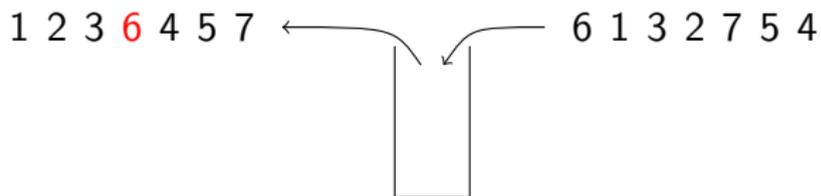
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction S qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



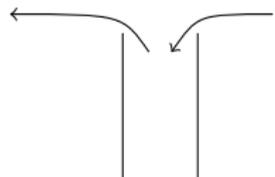
Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction **S** qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.



Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction \mathbf{S} qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

$$\mathbf{S}(\sigma) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7 \quad \leftarrow \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad 6\ 1\ 3\ 2\ 7\ 5\ 4 = \sigma$$


Tri par pile des permutations

Le tri par pile est la fonction \mathbf{S} qui “essaie de trier une permutation en utilisant une pile dont les valeurs doivent rester croissantes de haut en bas”.

$$\mathbf{S}(\sigma) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7 \quad \leftarrow \quad \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \square \end{array} \quad 6\ 1\ 3\ 2\ 7\ 5\ 4 = \sigma$$

Exercice : Calculer $\mathbf{S}(\rho)$ pour $\rho = 2\ 1\ 3\ 7\ 6\ 4\ 5$
et $\mathbf{S}(\tau)$ pour $\tau = 2\ 1\ 3\ 6\ 7\ 4\ 5$.

Réponse : $\mathbf{S}(\rho) = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$ et $\mathbf{S}(\tau) = 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 5\ 7$

Définition : Une permutation σ est **triable par une pile** lorsque $\mathbf{S}(\sigma)$ est en ordre croissant.

Lien entre motifs et tri par pile

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
 σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

Lien entre motifs et tri par pile

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
 σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

On démontre plutôt la **contraposée** (qui est logiquement équivalente) :
 σ n'est pas triable par une pile si et seulement si σ contient le motif 231.

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
 σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

On démontre plutôt la **contraposée** (qui est logiquement équivalente) :
 σ n'est pas triable par une pile si et seulement si σ contient le motif 231.

Éléments de preuve :

- **S(231) = 213** : lorsque le “3” entre dans la pile, il pousse le “2” vers la sortie, alors que le “1” est plus loin à droite.

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
 σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

On démontre plutôt la **contraposée** (qui est logiquement équivalente) :
 σ n'est pas triable par une pile si et seulement si σ contient le motif 231.

Éléments de preuve :

- $\mathbf{S}(231) = 213$: lorsque le “3” entre dans la pile, il pousse le “2” vers la sortie, alors que le “1” est plus loin à droite.
- ⇐ Lorsqu'on a une occurrence $\dots j \dots k \dots i \dots$ de 231 dans σ (avec $i < j < k$), de la même manière, le k fait sortir le j avant que le i n'entre dans la pile, donc i et j ne sont pas triés dans $\mathbf{S}(\sigma)$.

Théorème ([Knuth, *The Art of Computer Programming* (vol. 1), 1968]) :
 σ est triable par une pile si et seulement si σ évite le motif 231.

On démontre plutôt la **contraposée** (qui est logiquement équivalente) :
 σ n'est pas triable par une pile si et seulement si σ contient le motif 231.

Éléments de preuve :

- $\mathbf{S}(231) = 213$: lorsque le “3” entre dans la pile, il pousse le “2” vers la sortie, alors que le “1” est plus loin à droite.
- ⇐ Lorsqu'on a une occurrence $\dots j \dots k \dots i \dots$ de 231 dans σ (avec $i < j < k$), de la même manière, le k fait sortir le j avant que le i n'entre dans la pile, donc i et j ne sont pas triés dans $\mathbf{S}(\sigma)$.
- ⇒ La situation ci-dessus est la seule qui empêche deux éléments $j > i$ apparaissant dans l'ordre $\dots j \dots i \dots$ dans σ d'être triés dans $\mathbf{S}(\sigma)$.

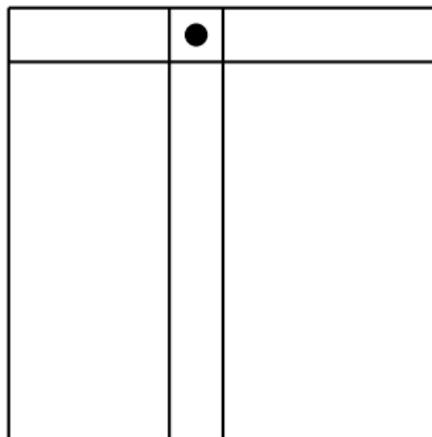
Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

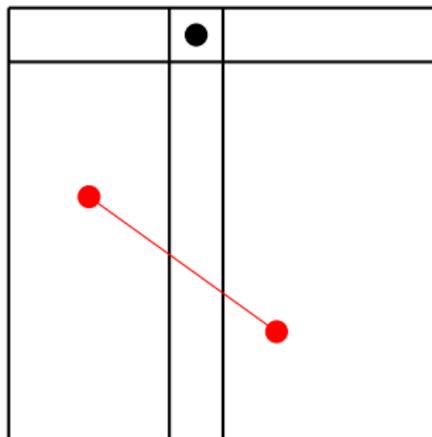
Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son **maximum** :



Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

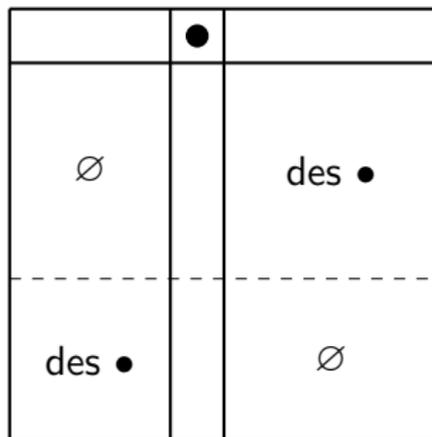
Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son **maximum** :



Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son **maximum** :



Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son **maximum** :

	●	
\emptyset		des ●
σ_G évitant 231		\emptyset

Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son **maximum** :

	●	
\emptyset		σ_D évitant 231
σ_G évitant 231		\emptyset

Description des permutations évitant 231

Bilan jusqu'ici : Les permutations évitant 231 sont intéressantes.
Essayons maintenant de mieux les comprendre !

Décomposons une permutation évitant 231 en isolant son **maximum** :

	●	
\emptyset		σ_D évitant 231
σ_G évitant 231		\emptyset

Réciproquement, une telle permutation évite 231.

De la structure au comptage (ou énumération)

On a vu que toute permutation σ évitant 231 se **décompose en trois** :

- son maximum,
- la permutation σ_G qui évite 231,
- et la permutation σ_D qui évite 231.

Si σ est de taille n , alors la taille de σ_G est une valeur k telle que $0 \leq k \leq n - 1$, et la taille de σ_D est alors $n - 1 - k$.

De la structure au comptage (ou énumération)

On a vu que toute permutation σ évitant 231 se **décompose en trois** :

- son maximum,
- la permutation σ_G qui évite 231,
- et la permutation σ_D qui évite 231.

Si σ est de taille n , alors la taille de σ_G est une valeur k telle que $0 \leq k \leq n-1$, et la taille de σ_D est alors $n-1-k$.

Si on note c_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 231, on a donc la **réurrence** suivante :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}.$$

Avec cette récurrence, sachant que $c_0 = 1$ (et aussi $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5$ si vous voulez), on peut calculer autant de c_n que l'on veut.

De la structure au comptage (ou énumération)

On a vu que toute permutation σ évitant 231 se **décompose en trois** :

- son maximum,
- la permutation σ_G qui évite 231,
- et la permutation σ_D qui évite 231.

Si σ est de taille n , alors la taille de σ_G est une valeur k telle que $0 \leq k \leq n-1$, et la taille de σ_D est alors $n-1-k$.

Si on note c_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 231, on a donc la **réurrence** suivante :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}.$$

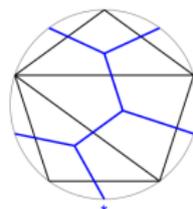
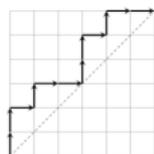
Avec cette récurrence, sachant que $c_0 = 1$ (et aussi $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5$ si vous voulez), on peut calculer autant de c_n que l'on veut.

“Philosophie” : Si on sait compter des objets, c’est que l’on a compris leur structure.

Nombres de Catalan : contexte

Les nombres c_n définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$ sont appelés **nombres de Catalan** (en référence au mathématicien franco-belge Eugène Charles Catalan, 1814-1894).

Ils énumèrent les permutations qui évitent 231 mais aussi **plein d'autres familles** d'objets combinatoires : chemins de Dyck, arbres binaires, triangulations de polygones, ...



Le *Catalan addendum* de R. Stanley référence plus de 200 telles familles !

Mieux connaître les nombres de Catalan, et l'OEIS

Rappel : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}.$$

Premières valeurs :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Mieux connaître les nombres de Catalan, et l'OEIS

Rappel : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}.$$

Premières valeurs :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

OEIS : C'est l'encyclopédie en ligne des séquences d'entiers

<https://oeis.org/>

La suite des nombres de Catalan y porte l'identifiant A000108.

On trouve sur sa page **énormément** d'information sur ces nombres !

Mieux connaître les nombres de Catalan, et l'OEIS

Rappel : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence
$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}.$$

Premières valeurs :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

OEIS : C'est l'encyclopédie en ligne des séquences d'entiers

<https://oeis.org/>

La suite des nombres de Catalan y porte l'identifiant A000108.

On trouve sur sa page **énormément** d'information sur ces nombres !

Et cela fonctionne pour **toutes les suites d'entiers connues**, qu'elles soient célèbres ou non (plus de 370 000 entrées).

Exemples : A000142 (factorielles), A000045 (Fibonacci), A093907 (table périodique des éléments !), A281784 (surprise...)

Nombres de Catalan : formule close

Rappel (encore) : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Théorème : Pour tout entier n , on a

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Notations :

- Factorielles : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ (convention : $0! = 1$)
- Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$

Nombres de Catalan : formule close

Rappel (encore) : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Théorème : Pour tout entier n , on a

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Notations :

- Factorielles : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ (convention : $0! = 1$)
- Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$

Preuve "classique" : Par séries génératrices et développements limités

Nombres de Catalan : formule close

Rappel (encore) : Les nombres de Catalan sont définis par $c_0 = 1$ et la récurrence $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$.

Théorème : Pour tout entier n , on a

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Notations :

- Factorielles : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ (convention : $0! = 1$)
- Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$

Preuve "classique" : Par séries génératrices et développements limités

Une **preuve par récurrence** existe, mais elle est **très** astucieuse.

Asymptotique des nombres de Catalan

L'asymptotique d'une suite de nombres décrit sa vitesse de croissance.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	...	20
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	...	6564120420
$n! =$	1	2	6	24	120	720	75040	...	2432902008176640000

Asymptotique des nombres de Catalan

L'**asymptotique** d'une suite de nombres décrit sa **vitesse de croissance**.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	...	20
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	...	6564120420
$n! =$	1	2	6	24	120	720	75040	...	2432902008176640000

Théorème :

$$c_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}$$

Remarques :

- On peut le démontrer à partir de la formule de Stirling pour l'équivalent de la factorielle.
- En comparaison, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. C'est **beaucoup** plus rapide !

Asymptotique des nombres de Catalan

L'asymptotique d'une suite de nombres décrit sa vitesse de croissance.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	...	20
$c_n =$	1	2	5	14	42	132	429	...	6564120420
$n! =$	1	2	6	24	120	720	75040	...	2432902008176640000

Théorème :

$$c_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}$$

Remarques :

- On peut le démontrer à partir de la formule de Stirling pour l'équivalent de la factorielle.
- En comparaison, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. C'est **beaucoup** plus rapide !

Théorème ([Marcus-Tardos, 2004, ex-conjecture de Stanley-Wilf]) :

Pour tout motif σ , il existe une constante c_σ telle que le nombre a_n de permutations de taille n qui évitent σ est **inférieur à c_σ^n** pour tout n .

Autres motifs de taille 3

Par **rotation**, pour tout n , on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,

Autres motifs de taille 3

Par **rotation**, pour tout n , on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,

Autres motifs de taille 3

Par **rotation**, pour tout n , on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,
- le nombre de permutations de taille n évitant 312,

Autres motifs de taille 3

Par **rotation**, pour tout n , on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,
- le nombre de permutations de taille n évitant 312,
- le nombre de permutations de taille n évitant 213.

Autres motifs de taille 3

Par **rotation**, pour tout n , on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,
- le nombre de permutations de taille n évitant 312,
- le nombre de permutations de taille n évitant 213.

Donc pour tout **motif de taille 3 non-monotone**, le nombre de permutations de taille n qui évitent ce motif est c_n .

Autres motifs de taille 3

Par **rotation**, pour tout n , on a égalité entre

- le nombre de permutations de taille n évitant 231,
- le nombre de permutations de taille n évitant 132,
- le nombre de permutations de taille n évitant 312,
- le nombre de permutations de taille n évitant 213.

Donc pour tout **motif de taille 3 non-monotone**, le nombre de permutations de taille n qui évitent ce motif est c_n .

Théorème :

Le nombre de permutations de taille n qui évitent un **motif de taille 3 monotone** (c'est-à-dire 123, ou 321) est **aussi** c_n .

Il existe beaucoup de preuves par **bijection**, dont une bonne partie utilise les **chemins de Dyck** comme objets intermédiaires.

Évitement de motifs plus grands

Il y a **des centaines** d'articles de recherche sur le sujet !

Voir, en particulier, la page Wikipédia

Enumerations of specific permutation classes

Classes avoiding one pattern of length 3 [\[edit \]](#)

There are two symmetry classes and a single Wilf class for single permutations of length three.

β	sequence enumerating $Av_n(\beta)$	OEIS	type of sequence	exact enumeration reference
123 231	1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...	A000108	algebraic (nonrational) g.f. Catalan numbers	MacMahon (1916) Knuth (1968)

Classes avoiding one pattern of length 4 [\[edit \]](#)

There are seven symmetry classes and three Wilf classes for single permutations of length four.

β	sequence enumerating $Av_n(\beta)$	OEIS	type of sequence	exact enumeration reference
1342 2413	1, 2, 6, 23, 103, 512, 2740, 15485, ...	A022558	algebraic (nonrational) g.f.	Bóna (1997)
1234 1243 1432 2143	1, 2, 6, 23, 103, 513, 2761, 15767, ...	A005802	holonomic (nonalgebraic) g.f.	Gessel (1990)
1324	1, 2, 6, 23, 103, 513, 2762, 15793, ...	A061552		

Un problème ouvert

Comment sont énumérées les permutations évitant le motif 1324 ???

Notons a_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 1324.

Un problème ouvert

Comment sont énumérées les permutations évitant le motif 1324 ???

Notons a_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 1324.

- On connaît la valeur de a_n seulement jusqu'à $n = 50$ (et avant 2018, c'était seulement jusqu'à $n = 36$).

Pour les obtenir, il a fallu concevoir un algorithme très malin.

Un problème ouvert

Comment sont énumérées les permutations évitant le motif 1324 ???

Notons a_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 1324.

- On connaît la valeur de a_n seulement jusqu'à $n = 50$ (et avant 2018, c'était seulement jusqu'à $n = 36$).
Pour les obtenir, il a fallu concevoir un algorithme très malin.
- On sait qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que

$$c_1 \times (10.271)^n \leq a_n \leq c_2 \times (13.5)^n$$

(et ces bornes étaient moins bonnes avant 2017).

Un problème ouvert

Comment sont énumérées les permutations évitant le motif 1324 ???

Notons a_n le nombre de permutations de taille n qui évitent 1324.

- On connaît la valeur de a_n seulement jusqu'à $n = 50$ (et avant 2018, c'était seulement jusqu'à $n = 36$).

Pour les obtenir, il a fallu concevoir un algorithme très malin.

- On sait qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que

$$c_1 \times (10.271)^n \leq a_n \leq c_2 \times (13.5)^n$$

(et ces bornes étaient moins bonnes avant 2017).

- On ne connaît pas l'asymptotique de a_n , mais on conjecture (2018) que

$$a_n \sim c_3 \times \mu^n \times \mu_1^{\sqrt{n}} \times n^g$$

où $\mu \approx 11.600 \pm 0.003$, $\mu_1 \approx 0.0400 \pm 0.0005$ et $g = -1.1 \pm 0.1$.

Merci de votre écoute !

Ce qu'on a vu :

- Comprendre et compter les permutations évitant 231 est facile (pour un problème de recherche !).
- Comprendre et compter les permutations évitant 1324 est extrêmement difficile.

Merci de votre écoute !

Ce qu'on a vu :

- Comprendre et compter les permutations évitant 231 est facile (pour un problème de recherche !).
- Comprendre et compter les permutations évitant 1324 est extrêmement difficile.

Maintenant, si on a encore le temps, on peut, par exemple :

- discuter, n'hésitez pas à me poser des questions, sur les permutations, ma recherche, mon métier, mes études, . . . ou tout autre sujet lié ;
- présenter une bijection entre permutations évitant 321, chemins de Dyck, et permutations évitant 231 ;
- démontrer par récurrence la formule close pour les nombres de Catalan, si on a le courage !