Journée de présentation de l'équipe CombAlgo
Permutations en combinatoire et algorithmique

Mathilde Bouvel

LaBRI, CNRS

16 novembre 2010

Itinéraire jusqu'au LaBRI

Pendant la thèse et après

- 2006-2010 : thèse en cotutelle au LIAFA, Paris 7 (D. Rossin) et au DSI, Univ. de Florence (R. Pinzani), soutenue en décembre 2009
- janv. et fév. 2010 : séjour post-doctoral à l'Univ. d'Otago, Nouvelle-Zélande (M. Albert et M. Atkinson)
- 2007-2010 : Participation au projet ANR GAMMA (Génération Aléatoire : Méthodes, Modèles et Applications)

Avant la thèse

- 2003-2007 : département informatique de l'ÉNS de Cachan
- 2004 : Stage de Licence au DSI (R. Pinzani)
- 2005 : Stage de M1 au LORIA, Nancy (G. Kucherov)
- 2006 : Stage de M2 au LIAFA (D. Rossin)

Combinatoire et Algorithmique

Cadre de travail

- Objets d'étude = objets discrets (ex : permutations, graphes, arbres, ...)
- Notion de taille ; et nombre fini d'objets de taille n

Problématiques générales

- Algorithmique : résolution de problèmes posés sur ces objets
- Combinatoire : description de leurs propriétés
  (en particulier : caractérisation, énumération, génération, ...)

Deux approches complémentaires

- Propriétés combinatoires pour des algorithmes plus efficaces
- Algorithmes qui concrétisent des résultats combinatoires

Permutations, motifs et classes

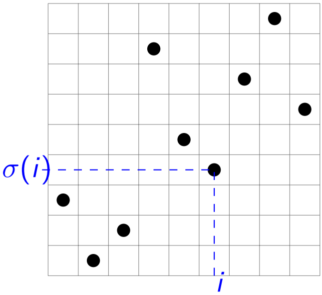
Permutations

- Objets discrets = permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour toute taille n
- Représentation par un mot : $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$, par une grille, ...

Motifs [Knuth 1973]

- Notion de sous-structure extraite/induite (ex : sous-mot)
- Motif = sous-permutation extraite, normalisée

Exemple : $2\,1\,3\,4 \preccurlyeq 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$ car $3\,2\,7\,9 \equiv 2\,1\,3\,4$



$\sigma = 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$

Permutations, motifs et classes

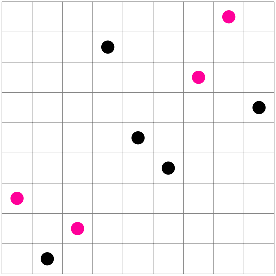
Permutations

- Objets discrets = permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour toute taille n
- Représentation par un mot : $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$, par une grille, ...

Motifs [Knuth 1973]

- Notion de sous-structure extraite/induite (ex : sous-mot)
- Motif = sous-permutation extraite, normalisée

Exemple : $2\,1\,3\,4 \preccurlyeq 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$ car $3\,2\,7\,9 \equiv 2\,1\,3\,4$



$\sigma = 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$

Permutations, motifs et classes

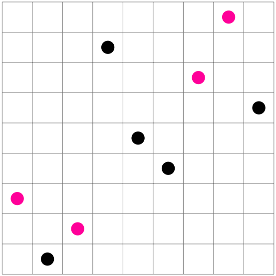
Permutations

- Objets discrets = permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour toute taille n
- Représentation par un mot : $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$, par une grille, ...

Motifs [Knuth 1973]

- Notion de sous-structure extraite/induite (ex : sous-mot)
- Motif = sous-permutation extraite, normalisée

Exemple : $2\,1\,3\,4 \preccurlyeq 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$ car $3\,2\,7\,9 \equiv 2\,1\,3\,4$



$\sigma = 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$

Permutations, motifs et classes

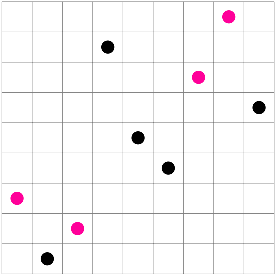
Permutations

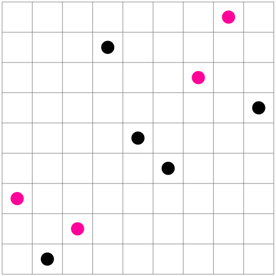
- Objets discrets = permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour toute taille n
- Représentation par un mot : $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$, par une grille, ...

Motifs [Knuth 1973]

- Notion de sous-structure extraite/induite (ex : sous-mot)
- Motif = sous-permutation extraite, normalisée

Exemple : $2\,1\,3\,4 \preccurlyeq 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$ car $3\,2\,7\,9 \equiv 2\,1\,3\,4$





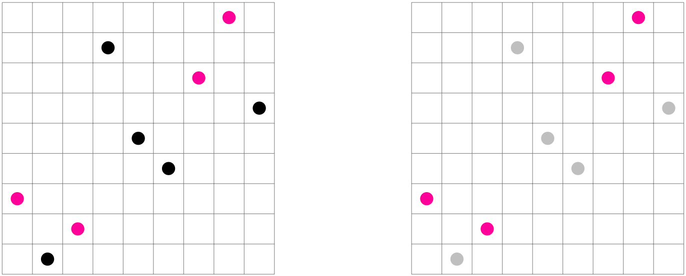
Permutations

- Objets discrets = permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour toute taille n
- Représentation par un mot : $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$, par une grille, ...

Motifs [Knuth 1973]

- Notion de sous-structure extraite/induite (ex : sous-mot)
- Motif = sous-permutation extraite, normalisée

Exemple : $2\,1\,3\,4 \preccurlyeq 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$ car $3\,2\,7\,9 \equiv 2\,1\,3\,4$



Permutations, motifs et classes

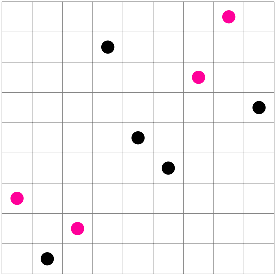
Permutations

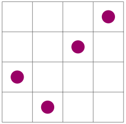
- Objets discrets = permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour toute taille n
- Représentation par un mot : $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$, par une grille, . . .

Motifs [Knuth 1973]

- Notion de sous-structure extraite/induite (ex : sous-mot)
- Motif = sous-permutation extraite, normalisée

Exemple : $2\,1\,3\,4 \preccurlyeq 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$ car $3\,2\,7\,9 \equiv 2\,1\,3\,4$





Permutations

- Objets discrets = permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour toute taille n
- Représentation par un mot : $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$, par une grille, ...

Motifs [Knuth 1973]

- Notion de sous-structure extraite/induite (ex : sous-mot)
- Motif = sous-permutation extraite, normalisée

Exemple : $2\,1\,3\,4 \preccurlyeq 3\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,9\,6$ car $3\,2\,7\,9 \equiv 2\,1\,3\,4$

Classes

- Ensemble fermé par le bas pour $\preccurlyeq$
- Caractérisation par une base de motifs interdits : $\mathcal{C} = Avoid(B)$

Problématiques

- Surtout énumération (Conjecture de Stanley-Wilf 1992, prouvée en 2004)
- Algorithmique de la recherche de motif
- Depuis 2005 : question émergente de la structure des classes

Théorie de la décomposition

Idée directrice

- Objets = Compositions d'objets indécomposables
- Exemple : Entiers = Produits de facteurs premiers

Décompositions souvent étudiées

- Décomposition modulaire des graphes
- Cadre algébrique général de Möhring et Radermacher (1984)

Permutations = nouveau cadre d'application

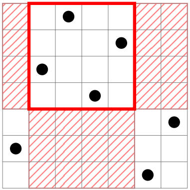
- Composition = Substitution

$\hookrightarrow$ On parle de décomposition par substitution

- Objets indécomposables = Permutations simples

Permutations simples

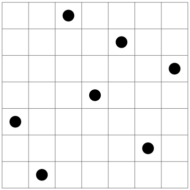
Intervalle (ou **bloc**) = ensemble d'éléments de σ dont les positions **et** les valeurs sont des intervalles d'entiers



Exemple : 5 7 4 6 est un intervalle de 2 5 7 4 6 1 3

Permutation simple = ne possède pas d'intervalle, sauf les intervalles triviaux : $1, 2, \ldots, n$ et σ

Exemple : 3 1 7 4 6 2 5 est simple.



Les plus petites simples :

1 2

2 1

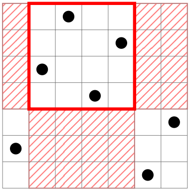
2 4 1 3, 3 1 4 2

Toutes les permutations se décrivent comme décomposition par substitution de permutations simples (avec $\oplus$ et $\ominus$) de manière unique

Permutations simples

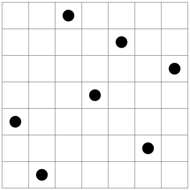
Intervalle (ou **bloc**) $=$ ensemble d'éléments de σ dont les positions **et** les valeurs sont des intervalles d'entiers

Exemple : 5 7 4 6 est un intervalle de 2 5 7 4 6 1 3



Permutation simple $=$ ne possède pas d'intervalle, sauf les intervalles triviaux : $1, 2, \ldots, n$ et σ

Exemple : 3 1 7 4 6 2 5 est simple.



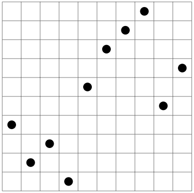
Les plus petites simples :

1 2 $\rightsquigarrow$ extension à $\oplus = \cup_{k \geq 2}\{12 \ldots k\}$

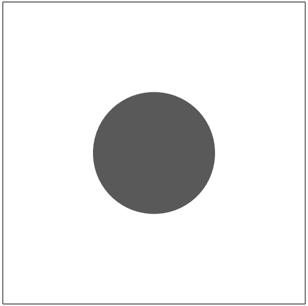
2 1 $\rightsquigarrow$ extension à $\ominus = \cup_{k \geq 2}\{k \ldots 21\}$

2 4 1 3, 3 1 4 2

Toutes les permutations se décrivent comme décomposition par substitution de permutations simples (avec $\oplus$ et $\ominus$) de manière unique

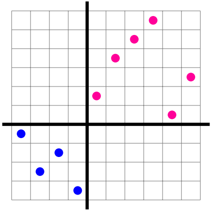
Exemple : $\sigma =$  $(= 4\,2\,3\,1\,6\,8\,9\,10\,5\,7)$

Décomposition récursive en permutations simples

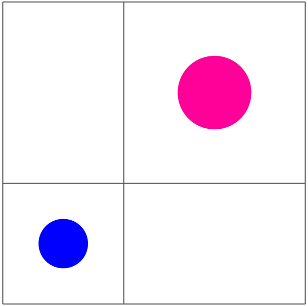


Arbre de décomposition

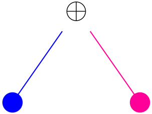
Décomposition par substitution

Exemple : $\sigma =$  $(= 4\,2\,3\,1\,6\,8\,9\,10\,5\,7)$

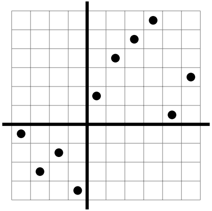
Décomposition récursive en permutations simples



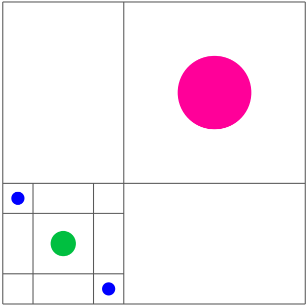
Arbre de décomposition



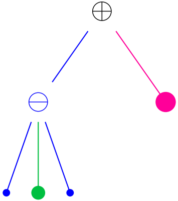
Décomposition par substitution

Exemple : $\sigma =$  $(= 4\,2\,3\,1\,6\,8\,9\,10\,5\,7)$

Décomposition récursive en permutations simples

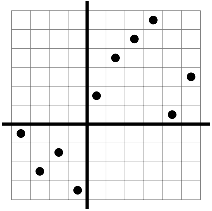


Arbre de décomposition



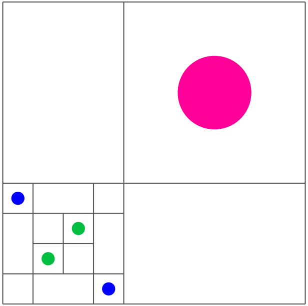
Décomposition par substitution

Exemple : $\sigma =$

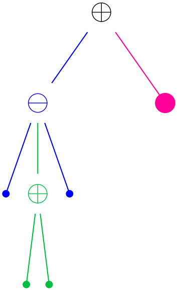


$(= 4\ 2\ 3\ 1\ 6\ 8\ 9\ 10\ 5\ 7)$

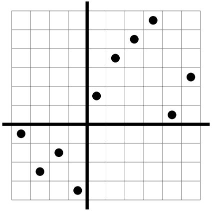
Décomposition récursive en permutations simples



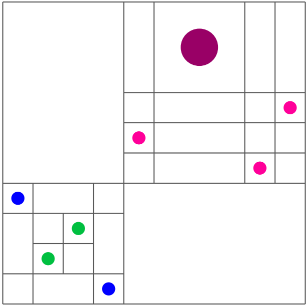
Arbre de décomposition



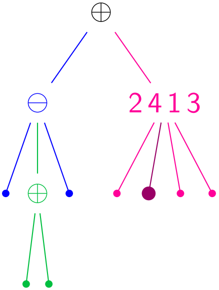
Décomposition par substitution

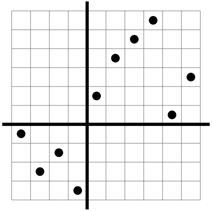
Exemple : $\sigma =$  $(= 4\,2\,3\,1\,6\,8\,9\,10\,5\,7)$

Décomposition récursive en permutations simples

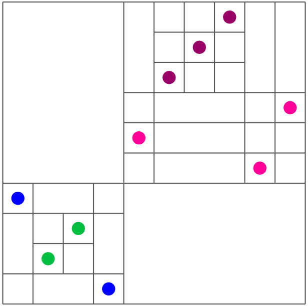


Arbre de décomposition

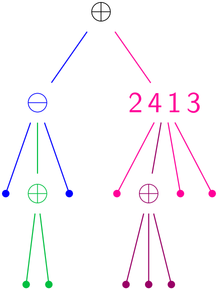


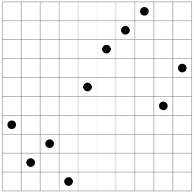
Exemple : $\sigma =$  $(= 4\,2\,3\,1\,6\,8\,9\,10\,5\,7)$

Décomposition récursive en permutations simples

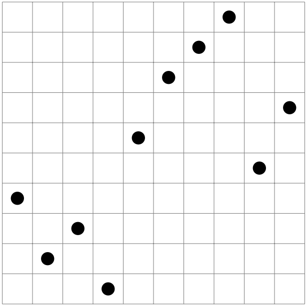


Arbre de décomposition

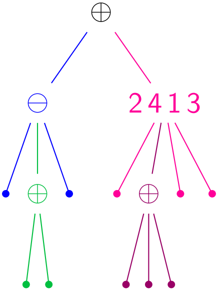


Exemple : $\sigma =$  $(= 4\,2\,3\,1\,6\,8\,9\,10\,5\,7)$

Décomposition récursive en permutations simples



Arbre de décomposition



Décomposition pour la combinatoire et l'algorithmique

Très récemment pour les permutations

- En combinatoire : Décomposition par substitution "asymétrique" (Albert et Atkinson, 2005)
- En algorithmique : Décomposition en intervalles communs (Bui Xuan, Habib et Paul, 2005 ; puis Bergeron, Chauve, Montgolfier et Raffinot, 2008)

Point de vue adopté

- Équivalence de ces deux décompositions (dans la version symétrique)
- Unification de l'existant en combinatoire et en algorithmique
- Étude de la structure combinatoire de la décomposition par substitution des permutations pour avoir des algorithmes efficaces

Travaux en collaboration avec :
F. Bassino (LIPN), C. Chauve (Vancouver), M. Mishna (Vancouver), A. Pierrot (LIAFA), D. Rossin (LIX), S. Vialette (LIGM)

Quelques résultats : algorithmique, combinatoire, bio-info

Résultats obtenus en utilisant la décomposition par substitution

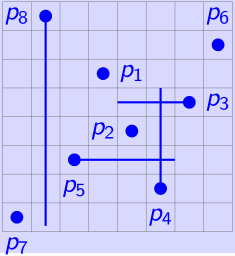
- Recherche de motif dans les permutations [B., Rossin, Vialette]
- Permutations en épingles et détection automatique de structure dans des classes de permutations [Bassino, B., Pierrot, Rossin]
- Application à l'analyse d'algorithmes pour la bio-informatique [B., Chauve, Mishna, Rossin]

- Recherche d'occurrence :
  - NP-difficile
  - Liée au test d'appartenance à une classe $\mathcal{C} = Avoid(B)$
  - Résultat : algorithme de complexité paramétrée
- Extension à la recherche de plus grand motif commun :
  - Sous hypothèse de séparabilité : algorithme polynomial
  - Cas général : algorithme de complexité paramétrée

Résultats obtenus en utilisant la décomposition par substitution

- Recherche de motif dans les permutations [B., Rossin, Vialette]
- Permutations en épingles et détection automatique de structure dans des classes de permutations [Bassino, B., Pierrot, Rossin]
- Application à l'analyse d'algorithmes pour la bio-informatique [B., Chauve, Mishna, Rossin]

- Caractérisation des permutations en épingles
- Calcul de la série génératrice, rationnelle
- Algorithme polynomial pour la finitude du nombre de simples dans $\mathcal{C}$ (condition suffisante de structure, *via* série génératrice $S(z) = \sum s_n z^n$ algébrique)

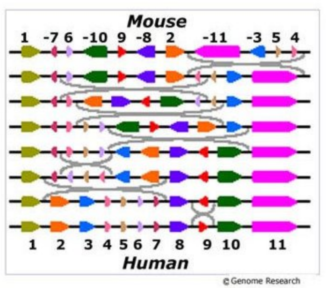


Quelques résultats : algorithmique, combinatoire, bio-info

Résultats obtenus en utilisant la décomposition par substitution

- Recherche de motif dans les permutations [B., Rossin, Vialette]
- Permutations en épingles et détection automatique de structure dans des classes de permutations [Bassino, B., Pierrot, Rossin]
- Application à l'analyse d'algorithmes pour la bio-informatique [B., Chauve, Mishna, Rossin]

- Réarrangement de génomes
- Tri parfait par renversements : NP-dur mais algorithme FPT
- Analyse : algorithme polynomial en moyenne



Quelques résultats : algorithmique, combinatoire, bio-info

Résultats obtenus en utilisant la décomposition par substitution

- Recherche de motif dans les permutations [B., Rossin, Vialette]
- Permutations en épingles et détection automatique de structure dans des classes de permutations [Bassino, B., Pierrot, Rossin]
- Application à l'analyse d'algorithmes pour la bio-informatique [B., Chauve, Mishna, Rossin]

Autres résultats jusqu'à la thèse

Algo	Limite de la recherche de motifs restreints à une classe [B., Rossin, Vialette]
Bio-info	Étude combinatoire du modèle de TDRL [B., Rossin]
Combi	Permutations minimales à d descentes [B., Ferrari, Pergola]
	Permutations à motifs exclus généralisés [Bernini, B., Ferrari]

Travaux récents ou en cours

Séjour à l'université d'Otago

- Action d'une étape de tri bulle sur les permutations appartenant à une classe [Albert, Atkinson, B., Claesson, Dukes]
- *Geometric grid classes* [Albert, Atkinson, B., Ruškuc, Vatter]

$B =$ une étape de tri bulle

- Quelles sont les permutations triables par B ?
- Par B^2 ?
- Par B^k ?

Pour $\mathcal{C}$ une classe de la forme $Avoid(\sigma)$:

- Quand $B(\mathcal{C})$ est-elle une classe ?
- Quand $B^{-1}(\mathcal{C})$ est-elle une classe ?
- Quelle est la base associée ?

Caractérisation en fonction de σ [voir exposé au GT du 3 décembre].

Travaux récents ou en cours

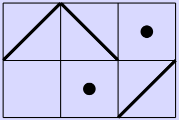
Séjour à l'université d'Otago

- Action d'une étape de tri bulle sur les permutations appartenant à une classe [Albert, Atkinson, B., Claesson, Dukes]
- *Geometric grid classes* [Albert, Atkinson, B., Ruškuc, Vatter]

Étude des *forest grid classes*

- Base finie de motifs exclus
- Série génératrice rationnelle
- Qui sont calculables à partir de M
- Sous-classes $=$ union finie de classes du même type
- Base finie et série génératrice rationnelle pour les sous-classes aussi

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \bullet \\ 0 & \bullet & 1 \end{pmatrix}$$



Travaux récents ou en cours

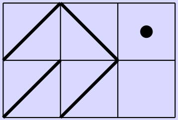
Séjour à l'université d'Otago

- Action d'une étape de tri bulle sur les permutations appartenant à une classe [Albert, Atkinson, B., Claesson, Dukes]
- *Geometric grid classes* [Albert, Atkinson, B., Ruškuc, Vatter]

Étude des *forest grid classes*, étendue aux *geometric grid classes*

- Base finie de motifs exclus
- Série génératrice rationnelle
- Qui sont calculables à partir de M
- Sous-classes = union finie de classes du même type
- Base finie et série génératrice rationnelle pour les sous-classes aussi

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \bullet \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Travaux récents ou en cours

Séjour à l'université d'Otago

- Action d'une étape de tri bulle sur les permutations appartenant à une classe [Albert, Atkinson, B., Claesson, Dukes]
- *Geometric grid classes* [Albert, Atkinson, B., Ruškuc, Vatter]

Travaux faisant suite aux résultats de thèse

- Détection algorithmique de structure combinatoire des classes ...
- ... pour aller vers la génération aléatoire (ANR MAGNUM) [Bassino, B., Pierrot, Pivoteau, Rossin]
- Analyse d'algorithmes pour la bio-info avec le point de vue de la combinatoire analytique [B., Mishna, Nicaud]

Projets

Problèmes d'énumération

- (Classes de) permutations
- Permutations simples pour l'énumération d'autres familles
- Autres objets discrets

Liens entre combinatoire et algorithmique

- Poursuivre leur développement pour l'étude des permutations
- En particulier autour de la décomposition par substitution

Liens entre décompositions de structures différentes

- Liens entre décompositions de graphes et de permutations
- Retour au cadre plus général de décomposition de structures
- Complémentarité des points de vue algorithmique et combinatoire

Interactions possibles : dans le thème CÉA, au sein de CombAlgo,
et avec les équipes MF et MABioVis