

# Énumération des permutations à motif exclu : rapport de stage\*

Mathilde Bouvel

## 1 Introduction

L'énumération des permutations à motif(s) exclu(s), classique(s) ou généralisé(s), est un sujet qui a été déjà longuement étudié car il constitue un atout précieux dans l'étude des statistiques mahoniennes des permutations. Ici, nous aborderons ce problème sous l'angle de la *méthode ECO*, avec une *représentation* des permutations *en portée*. Après avoir donné quelques définitions, nous présenterons le sujet particulier étudié au cours de ce stage : celui des permutations à motif exclu *de longueur fixée*, et nous verrons comment cette étude nous a menés à la découverte d'une nouvelle statistique sur les permutations évitant un motif généralisé de type  $(1,2)$  ou  $(2,1)$ .

---

\*Stage effectué au Dipartimento di sistemi e informatica de l'université de Florence, Italie, sous la direction de Monsieur le professeur Renzo Pinzani.

## 2 Méthode ECO et énumération de certains types de permutations.

Pour énumérer une classe d'objets combinatoires, il est naturel de se donner un paramètre et de voir comment le nombre d'objets évolue avec les valeurs possibles du paramètre. Cela peut parfois faire apparaître une construction récursive des objets à énumérer, qui présente de nombreux avantages comme nous le verrons plus loin. Cette philosophie d'énumération est souvent utilisée, notamment par des méthodes générales d'énumération telles que la méthode ECO (Methodology for the Enumeration of Combinatorial Objects).

### 2.1 Présentation de la méthode ECO.

Le contenu de cette sous-section présente un bref aperçu de l'article [2] où la méthode ECO a été introduite.

#### 2.1.1 Aspects théoriques.

L'idée utilisée par la méthode ECO est la suivante : dans l'étude d'une certaine classe d'objets combinatoires munie d'un paramètre, on va construire tous les objets ayant pour valeur du paramètre  $n+1$  à partir des objets ayant pour valeur du paramètre  $n$ , et ceci en évitant l'apparition de doublons au cours de cette construction. En général, cette construction passe par l'insertion d'un « petit bloc d'objet » en certains points des objets ayant un paramètre  $n$ . Ces points particuliers sont appelés *sites actifs* et leur ensemble constitue la *frontière*. Le plus souvent, on appelle *taille* le paramètre utilisé, car il mesure d'une certaine manière la taille des objets de  $S$ .

De manière plus formelle, donnons-nous un ensemble  $S$  d'objets combinatoires et un paramètre  $p$  de  $S$ . Considérons ensuite les ensembles  $S_n = \{x \in S \mid p(x) = n\}$ . Le point essentiel est alors de trouver un opérateur  $\theta : S_n \rightarrow 2^{S_{n+1}}$  tel que

- pour tout  $Y \in S_{n+1}$ , il existe  $X \in S_n$  tel que  $Y \in \theta(X)$ ,
- pour tous  $X_1, X_2 \in S_n$ , si  $X_1 \neq X_2$ , alors  $\theta(X_1) \cap \theta(X_2) = \emptyset$ .

Chaque objet de  $S_{n+1}$  étant alors obtenu à partir d'un unique objet de  $S_n$ , cet opérateur  $\theta$  permet une description récursive de la classe  $S$ , qui conduit dans certains cas à une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction génératrice de  $S$ .<sup>1</sup> Ce passage s'effectue au moyen d'arbre de génération et de règle(s) de réécriture.

En supposant qu'il y ait un seul élément de taille minimale dans  $S$ , l'arbre de génération est construit comme suit : la racine représente l'élément de

---

<sup>1</sup>La fonction génératrice de  $S$  est la série formelle  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , où  $a_n$  est le nombre d'objets de la classe  $S$  dont la valeur du paramètre  $p$  est  $n$ .

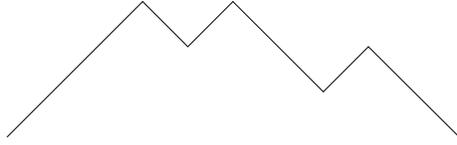


FIG. 1 – Un chemin de Dyck

taille minimale dans  $S$ , puis chaque sommet représentant l'élément  $X$  de  $S$  a pour fils tous les éléments de  $\theta(X)$ . Quant à la règle de réécriture, elle est de la forme  $(m) \rightarrow (f_1)(f_2) \cdots (f_k)$  où  $m$  est une étiquette d'un noeud et  $f_1, f_2 \cdots f_k$  les étiquettes de ses fils. L'étiquetage des noeuds doit avoir la propriété que pour chaque noeud  $X$  possédant l'étiquette  $m$ , la seule donnée de  $m$  permet de connaître le nombre de fils de  $X$ . Ainsi, le plus souvent, un noeud  $X$  sera étiqueté par la cardinalité de  $\theta(X)$ , qui est le nombre de ses fils. Remarquons que parfois plusieurs règles de réécriture sont nécessaires pour décrire une classe d'objets combinatoires. Nous donnons dans la suite un exemple simple pour mieux comprendre le fonctionnement de cette méthode.

### 2.1.2 Un exemple : les chemins de Dyck.

Commençons par quelques définitions.

- Un *chemin* est une séquence de points de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .
- Un *pas* dans un chemin est une paire de deux points consécutifs dans ce chemin.
- Un *chemin de Dyck* est un chemin  $P = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$  tel que  $s_0 = (0, 0)$  et  $s_{2n} = (0, 2n)$ , et ayant des pas de direction nord-est ( $s_i = (x, y), s_{i+1} = (x+1, y+1)$ ) ou sud-est ( $s_i = (x, y), s_{i+1} = (x+1, y-1)$ ) exclusivement. (voir Figure 1)
- Un *pic* est un point  $s_i$  tel que  $(s_{i-1}, s_i)$  est de direction nord-est et  $(s_i, s_{i+1})$  de direction sud-est.
- Une *vallée* est un point  $s_i$  tel que  $(s_{i-1}, s_i)$  est de direction sud-est et  $(s_i, s_{i+1})$  de direction nord-est.

Remarquons que le nombre de pas de direction nord-est est égal au nombre de pas de direction sud-est. Le nombre total de pas d'un chemin de Dyck est appelé sa *longueur*. Le paramètre utilisé pour mesurer la taille d'un chemin de Dyck est sa *demi-longueur*, soit le nombre de pas de direction nord-est, soit encore le nombre de pas de direction sud-est. Enfin on appelle *dernière descente* la dernière séquence de pas de direction sud-est.

Ayant défini notre paramètre, notons  $D_n$  l'ensemble des chemins de Dyck ayant pour longueur  $2n$ . L'opérateur  $\theta$  qui convient ici est le suivant :

Pour tout chemin  $d \in D_n$ ,  $\theta(d)$  est défini comme l'ensemble de chemins de Dyck obtenus en insérant un pic dans chacun des

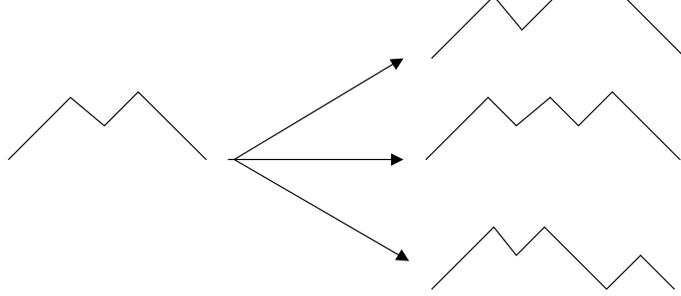


FIG. 2 – L'image par  $\theta$  d'un chemin de Dyck

points de la dernière descente de  $d$ . Ces points sont appelés les sites actifs de  $d$ .

On peut voir en Figure 2 un exemple de construction de l'image par  $\theta$  d'un chemin de Dyck. Il est aisé de vérifier que  $\theta$  satisfait bien les deux contraintes exposées en section 2.1.1. La Figure 3 présente l'arbre de génération qui illustre la construction récursive des chemins de Dyck. La racine en est l'unique chemin de Dyck de demi-longueur 1, qui est réduit à un pic, et possède donc deux points sur sa dernière descente.

Déterminons à présent la règle de réécriture associée à cet arbre de génération. Soit  $d$  un chemin de Dyck, et notons  $k$  le nombre de points de sa dernière descente. Pour le chemin  $d$ , le nombre de sites actifs est donc  $k$ . Ainsi,  $\theta(d)$  contient  $k$  chemins de Dyck, que l'on peut appeler  $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$  et  $d_k$  ( $d_i$  est obtenu à partir de  $d$  en insérant un pic au niveau de site actif de  $d$  d'ordonnée  $i - 1$ ). Ce sont les fils de  $d$  dans l'arbre de génération. Les dernières descentes des  $d_i$  sont respectivement de longueur 2, 3,  $\dots$ ,  $k$  et  $k + 1$ . Ces nouveaux chemins de Dyck possèdent donc respectivement 2, 3,  $\dots$ ,  $k$  et  $k + 1$  fils. En étiquetant les noeuds de l'arbre de génération par le nombre de leurs fils, on obtient donc la règle de réécriture suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2) \\ (k) \rightsquigarrow (2)(3) \cdots (k)(k+1) \end{array} \right.$$

Voyons à présent comment passer de cette règle de réécriture à la fonction génératrice associée aux chemins de Dyck. Nous l'appellerons  $T(x, y)$ . On notera aussi, pour tout chemin  $d$ ,  $n(d)$  la demi-longueur de  $d$ , et  $f(d)$  la cardinalité de la frontière de  $d$ , c'est-à-dire le nombre de sites actifs de  $d$ . Alors par définition,

$$T(x, y) = \sum_{d \in D} x^{n(d)} y^{f(d)}$$

Comme nous sommes intéressés par une énumération des chemins de Dyck selon la demi-longueur seulement, nous cherchons en fait  $T(x, 1)$ . Considérons alors qu'un chemin de Dyck est soit le chemin réduit à un pic (de demi-longueur 1 et de frontière de cardinalité 2), soit il provient d'un autre chemin de Dyck, de demi-longueur inférieure de 1 à la sienne, par la construction récursive expliquée plus haut. Ainsi :

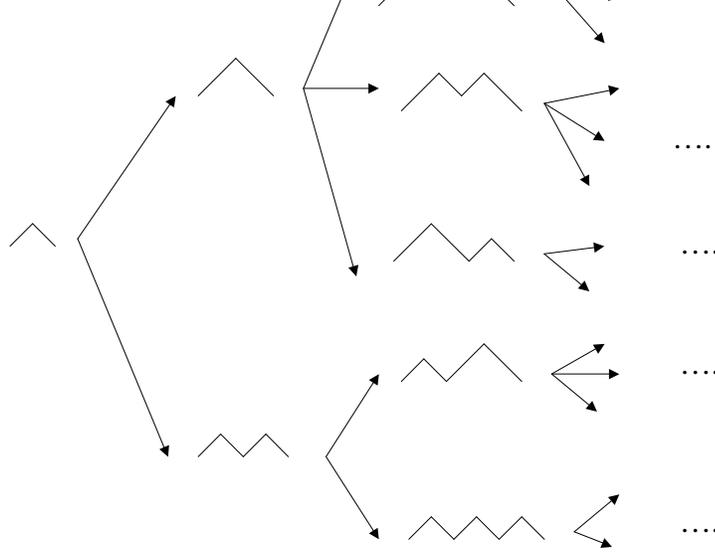


FIG. 3 – L’arbre de génération associé à la construction récursive des chemins de Dyck

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= \sum_{d \in D} x^{n(d)} y^{f(d)} \\
&= xy^2 + \sum_{d \in D} \sum_{i=2}^{f(d)+1} x^{n(d)+1} y^i \\
&= xy^2 + \sum_{d \in D} x^{n(d)+1} \frac{y^{f(d)+2} - y^2}{y-1} \\
&= xy^2 + \frac{xy^2}{y-1} \sum_{d \in D} x^{n(d)} y^{f(d)} - \frac{xy^2}{y-1} \sum_{d \in D} x^{n(d)} \\
&= xy^2 + \frac{xy^2}{y-1} T(x, y) - \frac{xy^2}{y-1} T(x, 1).
\end{aligned}$$

Donc

$$T(x, y)(y - 1 - xy^2) = xy^2(y - 1) - xy^2 T(x, 1).$$

Une racine de l’équation  $y - 1 - xy^2 = 0$  est  $y_0(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ . Si  $y = y_0$  nous obtenons  $T(x, 1) = y_0(x) - 1$ , c’est-à-dire finalement :

$$T(x, 1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} - 1.$$

La limite quand  $x$  tend vers 0 de cette fonction est 0, ce qui coïncide avec le nombre de chemins de Dyck de longueur 0.<sup>2</sup> Avec un peu de connaissances dans le domaine, on s’aperçoit que c’est la fonction génératrice des nombres de Catalan. Par conséquent, nous avons démontré le résultat suivant :

---

<sup>2</sup>Remarquons que le choix de l’autre racine de  $y - 1 - xy^2 = 0$  conduit à une fonction dont la limite en 0 est infinie, ce qui ne convient pas, puisque la valeur de  $T(0, 1)$  est le nombre de chemin de Dyck de longueur 0 c’est-à-dire 0.

Le nombre de chemins de Dyck de longueur  $2n$  est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

## 2.2 Les permutations à motif(s) exclu(s) : définitions et quelques résultats.

Après avoir exposé le fonctionnement général de la méthode ECO, et afin de pouvoir l'appliquer à notre problème des permutations à motif exclu de longueur fixée, il nous faut introduire des définitions, et quelques résultats déjà connus, concernant les permutations à motif(s) exclu(s) classiques ou généralisés.

Précisons le mode de représentation des permutations dans cette section. Nous écrirons 145326 la permutation de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  qui à 1 associe 1, à 2 associe 4, à 3, 5, à 4, 3, à 5, 2 et à 6, 6. Cette représentation permet d'employer certains concepts généralement associés aux *mots*, comme les sous-séquences ou sous-mots. Précisons aussi que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous notons  $S_n$  l'ensemble des permutations de  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  et  $S = \cup_{n \geq 1} S_n$ .

Soient  $\pi \in S_n$  et  $\tau \in S_k$  deux permutations, avec  $n > k$ . On dit que  $\pi$  *évite*  $\tau$  s'il n'y a pas de sous-séquence  $\pi(i_1)\pi(i_2)\dots\pi(i_k)$  avec  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  qui est isomorphe en ordre à  $\tau$ , c'est-à-dire telle que les coefficients  $\pi(i_j)$  soient dans le même ordre que les coefficients de  $\tau$ . Par exemple, la permutation 135624 *évite* le motif 321 mais *contient* le motif 132 (dans la sous-séquence 164 par exemple). La permutation  $\tau$  est appelée *motif classique*, ou plus simplement *motif*. On dit que la permutation  $\pi$  évite le motif  $\tau$ . Enfin nous noterons par  $S_n(\tau)$  l'ensemble des permutations de  $S_n$  qui évitent  $\tau$ .

Dans [1], les auteurs ont introduit des *motifs généralisés* pour étudier les statistiques mahoniennes des permutations. L'ensemble des motifs généralisés est le suivant :

$$\mathcal{P} = \{1 - 23, 12 - 3, 1 - 32, 13 - 2, 3 - 12, 31 - 2, 2 - 13, 21 - 3, \\ 2 - 31, 23 - 1, 3 - 21, 32 - 1\}.$$

On dit qu'ils sont de type  $(1, 2)$  ou  $(2, 1)$  selon le nombre d'éléments avant et après le tiret. Ils sont obtenus par insertion d'un tiret entre les éléments de chaque permutation de  $S_3$  (par exemple,  $132 \rightsquigarrow 1 - 32, 13 - 2$ ). Une permutation  $\pi$  contient un motif généralisé  $p$  s'il existe une sous-séquence de  $\pi$  qui soit isomorphe en ordre au motif classique dont provient  $p$ , et si les éléments de  $\pi$  correspondant aux éléments adjacents dans  $p$  sont aussi adjacents dans  $\pi$ . Pour plus de clarté, explicitons le cas d'un motif généralisé de type  $(1, 2)$  :  $\pi$  évite un motif généralisé  $p = p_1 - p_2 p_3$  s'il n'y a pas de sous-séquence  $\pi(i)\pi(j)\pi(j+1)$  dont les éléments sont classés dans le même ordre que  $p_1, p_2$  et  $p_3$ . On voit facilement qu'il est possible qu'une permutation

contienne un motif classique sans pour autant contenir un motif généralisé associé. Par exemple,  $\pi = 7256134$  ne contient pas le motif  $1 - 32$  mais sa sous-séquence  $\pi(2)\pi(4)\pi(6) = 263$  (ou encore  $\pi(2)\pi(4)\pi(7) = 264$ ) fait apparaître le motif classique  $132$ . Remarquons que  $\pi$  contient aussi le motif généralisé  $13 - 2$  dans la sous-séquence  $\pi(2)\pi(3)\pi(6) = 253$ . Dans la suite, nous travaillerons principalement avec des motifs généralisés, qui seront par souci de concision appelés simplement motifs.

Le *miroir* et le *complément* sont deux opérations importantes sur les permutations dans notre étude. Soit  $\pi$  une permutation de  $S_n$ . Nous définissons alors son miroir et son complément par :  $\pi^r(i) = \pi(n + 1 - i)$  et  $\pi^c(i) = n + 1 - \pi(i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Le miroir d'une permutation revient à lire la séquence de nombres qui la représente de droite à gauche, et son complément à remplacer chaque élément par son complémentaire à  $n + 1$ . On peut aussi définir ces opérations sur les motifs, en posant que le complémentaire à tout entier d'un tiret est toujours un tiret. Ainsi, le complément de la permutation  $\pi = 7256134$  est  $\pi^c = 1632754$  et son miroir est  $\pi^r = 4316527$ . Pour le motif  $p = 1 - 32$ , nous avons  $p^r = 23 - 1$  et  $p^c = 3 - 12$ . On voit facilement que pour tout motif  $p$ , on a  $p^{cr} = p^{rc}$ . L'ensemble  $\{p, p^r, p^c, p^{cr}\}$  est la *classe de symétrie* de  $p$ . Il est connu que  $|S_n(p)| = |S_n(p^r)| = |S_n(p^c)| = |S_n(p^{rc})|$  (voir [7]).

Les douze motifs généralisés de  $\mathcal{P}$  s'organisent en trois classes de symétrie :  $\{1 - 23, 32 - 1, 3 - 21, 12 - 3\}$ ,  $\{3 - 12, 21 - 3, 1 - 32, 23 - 1\}$  et  $\{2 - 13, 31 - 2, 2 - 31, 13 - 2\}$ .

Dans [5] l'auteur a démontré que :

- $|S_n(p)| = B_n$   
si  $p \in \{1 - 23, 32 - 1, 3 - 21, 12 - 3\} \cup \{3 - 12, 21 - 3, 1 - 32, 23 - 1\}$  ;
- $|S_n(p)| = C_n$   
si  $p \in \{2 - 13, 31 - 2, 2 - 31, 13 - 2\}$

où  $B_n$  et  $C_n$  sont respectivement les nombres de Bell et de Catalan. <sup>3</sup>

Les premiers termes des suites  $(B_n)_{n \geq 0}$  et  $(C_n)_{n \geq 0}$  sont respectivement :

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862

Il nous faut maintenant introduire une nouvelle représentation des permutations, appelée *représentation en portée*. Cette construction a été introduite dans [4]. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\pi \in S_n$ . On se représente alors un quadrillage régulier de  $n$  lignes verticales et de  $n$  lignes horizontales. Si on se place dans un repère orthonormé direct du plan, la ligne verticale la plus à gauche coupe la ligne horizontale la plus basse au point de coordonnées  $(1, 1)$  et la ligne verticale la plus à droite coupe la ligne horizontale la plus haute au point de coordonnées  $(n, n)$ . Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on marque par une « bille »

---

<sup>3</sup>La définition des nombres de Catalan a été donnée plus haut. Les nombres de Bell sont tels que  $B_n$  compte le nombre de partitions de  $\{1, 2, \dots, n\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

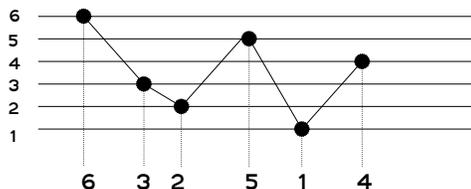


FIG. 4 – Représentation en portée de la permutation 632514

le point d'abscisse  $i$  et d'ordonnée  $\pi(i)$ . Enfin on efface les lignes verticales et le repère de plan, puis on relie entre elles les « billes », de gauche à droite. On voit en Figure 4 la représentation en portée de la permutation 632514 . Pour obtenir une permutation de longueur  $n + 1$  à partir d'une permutation de longueur  $n$ , il suffit de choisir une des  $n + 1$  zones à droite de la portée délimitées par les lignes horizontales, et d'y insérer une « bille », que l'on relie à la précédente dans la portée. On ajoute enfin une ligne horizontale au niveau de la « bille » ajoutée. Cette construction des permutations des ensembles  $(S_n)$  satisfait les exigences sur l'opérateur  $\theta$  présentées au début.

Nous disposons à présent des outils nécessaires pour introduire le sujet du stage et présenté le travail qui a été fait.

### 3 Présentation du sujet particulier du stage et premières investigations.

L'intitulé du sujet de ce stage est « énumération des permutations à motif exclu de longueur fixée ». Le problème semblait plus simple que le reste des travaux menés dans l'équipe de recherche et n'a pas été vraiment exploré avant mon arrivée. Cependant, il s'est révélé plus ardu que prévu.

#### 3.1 Un petit problème plus simple pour se fixer les idées.

Avant d'aborder les motifs de longueur fixée, qui sont de longueur trois comme expliqué plus loin, intéressons nous à des motifs plus simples : les  $1_{\overline{k}}2$  et les  $2_{\overline{k}}1$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'une permutation  $\pi \in S_n$  évite  $1_{\overline{k}}2$  (respectivement  $2_{\overline{k}}1$ ) si pour tout  $i$  tel que  $\pi(i)$  et  $\pi(i+k+1)$  soient définis, on a  $\pi(i) > \pi(i+k+1)$  (respectivement  $\pi(i) < \pi(i+k+1)$ ). Le principe est le même que pour l'évitement des motifs classiques 12 et 21, mais le symbole  $\overline{k}$  impose qu'exactly  $k$  éléments séparent les éléments de  $\pi$  associés aux valeurs 1 et 2. Notre but ici est d'énumérer selon leur longueur les permutations évitant les motifs  $1_{\overline{k}}2$  et  $2_{\overline{k}}1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Remarquons d'abord que l'opération de miroir nous permet de limiter notre étude aux motifs  $1_{\overline{k}}2$  et d'obtenir comme corollaire les résultats concernant  $2_{\overline{k}}1$ . Les notations précédentes peuvent être élargies en notant  $S_n(p)$  l'ensemble des permutations de longueur  $n$  évitant un motif  $p \in \{1_{\overline{k}}2, 2_{\overline{k}}1 | k \in \mathbb{N}\}$ .

Le cas du motif  $1_{\overline{0}}2$  est extrêmement simple : une permutation évitant ce motif ne contient pas deux éléments consécutifs tels que le premier soit

inférieur au second. Ainsi, les éléments sont nécessairement classés en ordre décroissant. Il existe donc une unique permutation de ce type dans chaque ensemble  $S_n$ .

Pour commencer réellement notre étude, examinons un cas simple mais non trivial comme le précédent : celui des permutations évitant le motif  $1_{\overline{1}}2$ . Notre première tentative a été d'utiliser la méthode ECO, avec une représentation en portée des permutations. Les deux derniers éléments étant le point clé à surveiller pour détecter l'apparition éventuelle du motif  $1_{\overline{1}}2$ , l'étiquette d'une permutation  $\pi \in S_n$  sera  $(\pi(n-1), \pi(n))$ . Une remarque importante ici concerne la place possible de l'élément 1 dans la permutation. On voit bien que s'il ne se trouve pas dans les deux derniers éléments, avec un indice que nous nommerons  $i$ , alors l'élément qui se trouve à l'indice  $i+2$  est bien défini, et est supérieur à 1, ce qui provoque l'apparition d'une occurrence de  $1_{\overline{1}}2$ . Par conséquent, l'élément 1 se trouve en dernière ou en avant-dernière position. Les étiquettes sont donc toutes de la forme  $(1, x)$  ou  $(x, 1)$ .

Pour construire une règle de réécriture qui nous mènera peut-être à une énumération des permutations évitant  $1_{\overline{1}}2$  selon leur longueur, il nous faut examiner quels sont les successeurs d'une permutation d'étiquette  $(1, x)$  et ceux d'une permutation d'étiquette  $(x, 1)$ . Soit  $\pi$  une permutation évitant  $1_{\overline{1}}2$  et étiquetée  $(1, x)$ . Ceci signifie, si  $\pi \in S_n$ , que  $\pi(n-1) = 1$  et que  $\pi(n) = x$ . Cherchons maintenant les sites actifs, c'est-à-dire ici les zones parmi les  $n+1$  zones à droite de la portée dans lesquelles on peut placer une « bille » sans faire apparaître le motif  $1_{\overline{1}}2$ . Il est clair que la seule zone qui convient est la plus basse, et la permutation fille obtenue a donc pour étiquette  $(x+1, 1)$ . Pour une permutation  $\pi$  de  $S_n$  évitant  $1_{\overline{1}}2$  et étiquetée  $(x, 1)$ , les sites actifs sont toutes les zones situées sous la  $x$ -ième ligne en partant du bas, et les permutations filles sont étiquetées par  $(1, x), (1, x-1), \dots, (1, 2)$  et  $(2, 1)$ . La règle de réécriture obtenue est donc la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \\ (x, 1) \rightsquigarrow (1, x)(1, x-1) \cdots (1, 2)(2, 1) \\ (1, x) \rightsquigarrow (x+1, 1) \end{array} \right.$$

Bien qu'elle fasse apparaître des étiquettes doubles, cette règle de réécriture se prête bien à une étude avec la méthode exposée dans l'exemple sur les chemins de Dyck (déjà effectuée dans des travaux antérieurs). On aboutit au résultat suivant :

Le nombre de permutations de  $S_n$  évitant le motif  $1_{\overline{1}}2$  est  $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ .

En essayant d'étendre cette méthode à l'étude des permutations évitant  $1_{\overline{2}}2$ , on a besoin de retenir la valeur des trois derniers éléments de chaque permutation pour constituer son étiquette, et pour les motifs  $1_{\overline{k}}2$ , avec  $k \geq 3$ , la complexité des règles de réécriture et de leur étude augmente. Cependant, pour  $1_{\overline{2}}2$ , nous avons pu calculer les premières valeurs de la

séquence, et l'encyclopédie en ligne des séquences d'entiers [8] nous a permis de supposer que le nombre de permutations de  $S_n$  évitant  $1_{\frac{n}{2}}2$  serait  $\frac{n!}{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor! \times \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor! \times \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor!}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . En remarquant que  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  s'écrit aussi  $\frac{n!}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \times \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor!}$ , il vient à l'esprit que cette ressemblance n'est sûrement pas un hasard, et les questions que l'on peut se poser sont les suivantes : peut-on élargir cette formule à tout motif  $1_{\overline{k}}2$ ? Comment le faire? Comment le justifier?

Un élargissement naturel des formules obtenues serait la conjecture suivante :

Le nombre de permutations de  $S_n$  évitant  $1_{\overline{k}}2$  est  $\frac{n!}{\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor! \times \lfloor \frac{n+1}{k+1} \rfloor! \times \dots \times \lfloor \frac{n+k}{k+1} \rfloor!}$ .

En fait, il est facile de démontrer cette conjecture et d'en faire une petite propriété. L'idée sous-jacente à la démonstration est la suivante : comme dans l'étude du motif  $1_{\overline{0}}2$ , où toute la séquence représentant la permutation devait être décroissante, on va mettre en évidence des sous-séquences qui doivent être décroissantes. Pour étudier le motif  $1_{\overline{k}}2$ , on examine les sous-séquences correspondant aux indices  $1, k+2, 2k+3, 3k+4, \dots$ , puis  $2, k+3, 2k+4, 3k+5, \dots$  et ainsi de suite : toutes les sous-séquences que l'on obtient en progressant dans la permutation par sauts de  $k+1$ . Par conséquent, ces sauts permettent de « passer sous silence » les  $k$  éléments du tiret, et donc les sous-séquences mises en évidence sont décroissantes, comme dans l'étude du motif  $1_{\overline{0}}2$ . Si on écrit  $n = p(k+1) + r$ , il suffit de constituer  $r$  paquets de  $p+1$  éléments, puis  $k-r$  paquets de  $p$ , de classer les éléments par ordre décroissant dans chaque paquet, et de les placer comme sous-séquences avec des sauts de  $k+1$  entre deux éléments, et commençant aux indices  $1$ , puis  $2, \dots$ , puis  $k+1$ . Ainsi, le nombre de permutations de longueur  $n$  évitant le motif  $1_{\overline{k}}2$  est le même que le nombre de façons de constituer de tels paquets. Donc :

le nombre de permutations de  $S_n$  évitant  $1_{\overline{k}}2$  est

$$\binom{n}{p+1} \binom{n-(p+1)}{p+1} \dots \binom{n-(r-1)(p+1)}{p+1} \binom{n-r(p+1)}{p} \binom{n-r(p+1)-p}{p} \dots \binom{n-r(p+1)-(k-r)p}{p}$$

en notant  $n = p(k+1) + r$  la division euclidienne de  $n$  par  $k+1$ .

Un simple raisonnement par induction permet, à partir de ce résultat, de démontrer la conjecture formulée ci-dessus.

Avant de passer au problème proprement dit des permutations à motif exclu de longueur fixée, récapitulons les résultats obtenus ici :

Le nombre de permutations de  $S_n$  évitant  $1_{\overline{k}}2$  (respectivement

$$2_{\overline{k}}1) \text{ est } \frac{n!}{\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor! \times \lfloor \frac{n+1}{k+1} \rfloor! \times \dots \times \lfloor \frac{n+k}{k+1} \rfloor!}.$$

### 3.2 Problème des permutations à motif exclu de longueur fixée : définition et premières approches . . . infructueuses.

La première chose à faire est de donner une définition d'un motif *de longueur fixée*. Celle qui a été initialement choisie est la suivante :

Un motif exclu de longueur fixée est un motif généralisé, avec en plus une contrainte quant au nombre d'éléments « contenus » dans le tiret. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les motifs de longueur  $k$  sont

$$\mathcal{P}_k = \{1_{\overline{k}}23, 12_{\overline{k}}3, 1_{\overline{k}}32, 13_{\overline{k}}2, 3_{\overline{k}}12, 31_{\overline{k}}2, 2_{\overline{k}}13, 21_{\overline{k}}3, 2_{\overline{k}}31, 23_{\overline{k}}1, 3_{\overline{k}}21, 32_{\overline{k}}1\}.$$

Par exemple, on dit qu'une permutation  $\pi$  évite  $p = 1_{\overline{k}}32$  s'il n'existe pas d'indice  $i$  tel que  $\pi(i) < \pi(i+k+2) < \pi(i+k+1)$ .

Comme précédemment, on note  $S_n(p)$  l'ensemble des permutations de longueur  $n$  évitant un motif  $p$  de longueur fixée.

Comme il est toujours utile d'examiner un cas simple pour se faire une idée du problème, nous avons commencé par étudier les motifs  $p_1 = 12_{\overline{1}}3$ ,  $p_2 = 23_{\overline{1}}1$  et  $p_3 = 31_{\overline{1}}2$ , qui sont chacun représentant d'une classe de symétrie différente.<sup>4</sup> Les débuts des séquences  $(|S_n(p_1)|_{n \geq 0})$ ,  $(|S_n(p_2)|_{n \geq 0})$  et  $(|S_n(p_3)|_{n \geq 0})$  ont été calculées grâce à un programme CaML élaboré à partir d'une approche pour l'énumération qui n'a débouché sur aucun résultat théorique probant, et que je n'exposerai pas ici. Les résultats obtenus grâce à cet algorithme sont résumés dans le tableau suivant :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ S_n(p_1) $	1	2	6	20	83	411	2290	14588	104448	824728
$ S_n(p_2) $	1	2	6	20	83	402	2245	14192	100650	792508
$ S_n(p_3) $	1	2	6	20	81	390	2161	13678	96983	764368

On remarque que les trois séquences, bien qu'étant proches, sont toutes différentes. Ceci distingue les motifs de longueur fixée des motifs généralisés pour lesquels deux séquences sont identiques. En outre, aucune de ces séquences n'est référencée sur l'encyclopédie en ligne des séquences d'entiers ([8]).

La dernière remarque exclut la possibilité de trouver une bijection entre nos permutations et une classe déjà énumérée d'objets combinatoires. Cette méthode d'énumération, souvent efficace pourtant, nous est donc interdite. La plupart des méthodes envisagées avaient pour but de trouver certains critères caractérisant les permutations, qui permettraient de les regrouper en plusieurs blocs, dont le nombre pourrait être calculés, et tels que l'énumération de chaque bloc soit possible. Mais elles ont à chaque fois fait apparaître soit des problèmes de doublons, c'est-à-dire que certains éléments (mais sans qu'on sache combien) se trouvaient dans plusieurs groupes, et étaient donc

<sup>4</sup>Il est aisé de remarquer que les opérations de complément et de miroir s'étendent naturellement aux motifs de longueur fixée.

comptés deux fois, soit certains éléments ne se trouvaient comptés nulle part. Quant à la méthode ECO, avec diverses représentations des permutations, elle n'a pas donné de résultats très convaincants non plus. Cependant, avec une représentation en portée, on peut obtenir des règles de réécriture. Celles-ci sont peu exploitables en raison de leur complexité. En effet, pour prendre l'exemple des permutations évitant  $12\overline{1}3$ , l'étiquette de  $\pi \in S_n(12\overline{1}3)$  est  $(n, \pi(n-2), \pi(n-1), \pi(n))$  dès que  $n \geq 3$ , et la règle de réécriture est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (n, p, q, r) \rightsquigarrow (n+1, q+1, r+1, 1) \cdots (n+1, q+1, r+1, q) \text{ si } p < q \text{ et } q < r \\ (n, p, q, r) \rightsquigarrow (n+1, q+1, r+1, 1) \cdots (n+1, q+1, r+1, r) \\ \quad (n+1, q+1, r, r+1) \cdots (n+1, q+1, r, q) \text{ si } p < q \text{ et } q > r \\ (n, p, q, r) \rightsquigarrow (n+1, q+1, r+1, 1) \cdots (n+1, q+1, r+1, q) \\ \quad (n+1, q, r+1, q+1) \cdots (n+1, q, r+1, r) \\ \quad (n+1, q, r, r+1) \cdots (n+1, q, r, n+1) \text{ si } p > q \text{ et } q < r \\ (n, p, q, r) \rightsquigarrow (n+1, q+1, r+1, 1) \cdots (n+1, q+1, r+1, r) \\ \quad (n+1, q+1, r, r+1) \cdots (n+1, q+1, q, r) \\ \quad (n+1, q, r, q+1) \cdots (n+1, q, r, n+1) \text{ si } p > q \text{ et } q > r \end{array} \right.$$

Son étude sans simplifier cette règle, ou sans procéder à une étude préliminaire pour savoir dans quelle direction travailler, serait probablement une dépense incroyable de temps et d'énergie, et l'obtention d'un résultat pour l'énumération des permutations évitant  $12\overline{1}3$  serait très incertaine. Ainsi, on va dans la suite s'intéresser à l'étude des règles de réécriture associées aux permutations évitant les motifs généralisés,  $12-3$  par exemple, avec l'espoir d'y découvrir une méthode pour faciliter l'étude de la règle très complexe qui figure ci-dessus.<sup>5</sup>

#### 4 Un résultat inattendu : une nouvelle statistique sur les permutations évitant un motif généralisé de type (1,2) ou (2,1).

L'utilisation de la méthode ECO pour l'étude des règles de réécriture va nous permettre, connaissant le résultat sur l'énumération des permutations évitant un motif généralisé démontré en [5] et présenté en section 2.2, de trouver une distribution de ces permutations selon la longueur et la valeur du dernier (ou du premier) élément. Nous allons d'abord démontrer ce résultat pour les permutations évitant le motif  $1-23$ , puis nous verrons que ce résultat a un certain nombre de corollaires tout aussi intéressants, et que la

---

<sup>5</sup>Les résultats obtenus et présentés précédemment sur l'énumération des permutations évitant un motif généralisé ont été obtenus avec une méthode n'utilisant pas de règles de réécriture, cette étude n'a donc pas été faite plus tôt.

démonstration peut aussi être facilement adaptée pour obtenir un résultat de ce type pour chaque motif généralisé.

#### 4.1 Etude relative au motif 1 – 23.

La génération des permutations de  $S(1 - 23)$  est basée sur la méthode ECO avec une représentation en portée des permutations. Nous présentons ici la règle de réécriture et l'arbre de génération qui sont le point de départ de nos considérations.

##### 4.1.1 Règle de réécriture.

Chaque permutation évitant le motif 1 – 23 de longueur  $n$  et possédant  $k$  sites actifs est étiquetée par  $(n, k)$ .

Soit  $\pi$  une permutation évitant 1 – 23 d'étiquette  $(n, k)$ .

Si  $\pi(n) \neq 1$ , alors les sites actifs sont toutes les zones situées en-dessous de la  $\pi(n)$ -ième ligne, de telle manière que  $\pi(n) = k$ . Au contraire, si  $\pi(n) = 1$ , toutes les zones sont les sites actifs, et  $k = n + 1$  (voir Figure 5).

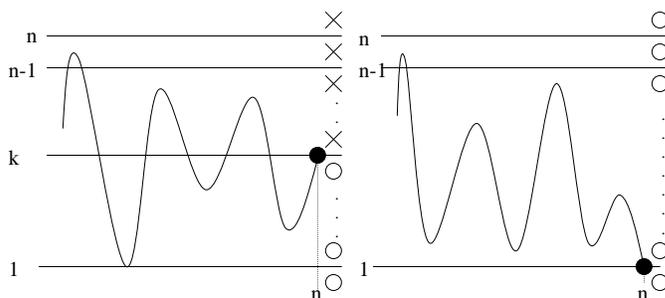


FIG. 5 – Les sites actifs pour une permutation évitant 1 – 23

En conséquence, les  $k$  fils de  $\pi$  sont des permutations de longueur  $n + 1$  dont le  $(n + 1)$ -ième élément est  $1, 2, 3, \dots, k$ . Pour la première, toutes les zones sont des sites actifs, donc ce fils a pour étiquette  $(n + 2, n + 1)$ . Pour les autres, les sites actifs sont les zones situées en-dessous de la  $\pi(n + 1)$ -ième ligne, et leurs étiquettes sont donc  $(2, n + 1), (3, n + 1), \dots, (k, n + 1)$ .

En outre, la construction récursive commence par l'unique permutation de longueur 1, étiquetée  $(2, 1)$ . Ainsi, nous obtenons la règle de réécriture suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \\ (k, n) \rightsquigarrow (2, n + 1)(3, n + 1) \cdots (k, n + 1)(n + 2, n + 1) \end{array} \right.$$

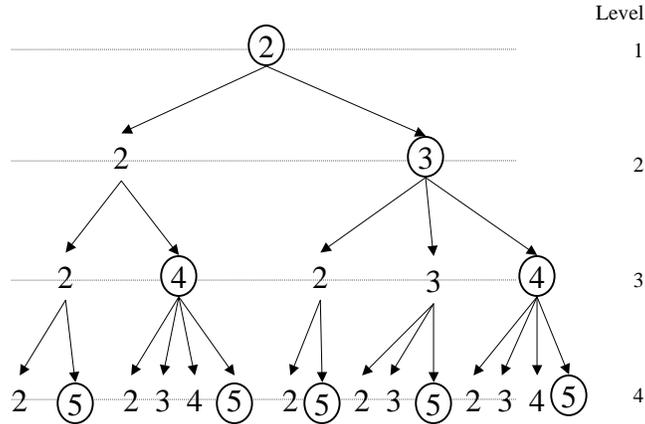


FIG. 6 – L’arbre de génération des permutations évitant 1 – 23

#### 4.1.2 Arbre de génération.

Dans la règle de réécriture figurant ci-dessus, on remarque que chaque permutation d’étiquette  $(n, k)$  possède  $k - 1$  fils « normaux » d’étiquettes  $(2, n+1), (3, n+1), \dots, (k, n+1)$  et un fils « spécial » d’étiquette  $(n+2, n+1)$ . Par conséquent, une permutation d’étiquette  $(k, n)$  au niveau  $(l - 1)$  dans l’arbre de génération a, au niveau  $l$ ,  $k - 1$  fils « normaux » d’étiquettes  $(2, n+1), (3, n+1), \dots, (k, n+1)$  et un fils « spécial » d’étiquette  $(n+2, n+1) = (l+1, n+1)$ .

Ainsi, on peut construire l’arbre de génération en mémorisant seulement le premier élément de chaque étiquette et les niveaux dans l’arbre : une permutation d’étiquette  $k$  au niveau  $l - 1$  génère  $k - 1$  fils « normaux » d’étiquettes  $2, 3, \dots, k$  et un fils « spécial » d’étiquette  $l + 1$  (voir Figure 6).

A partir de cet arbre, nous pouvons construire une matrice  $M$  dont chaque coefficient  $M(i, j)$  est le nombre d’étiquettes  $j + 1$  au niveau  $i$  dans l’arbre de génération. En fait,  $M(i, j)$  est le nombre de permutations de  $S_i(1 - 23)$  ayant  $j + 1$  sites actifs.

La matrice  $M$  est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & \vdots \\ 15 & 10 & 7 & 5 & 15 & 0 & \vdots \\ 52 & 37 & 27 & 20 & 15 & 52 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

### 4.1.3 Distribution selon la longueur et la valeur du dernier élément des permutations de $S(1-23)$ .

On rappelle que les nombres de Bell  $\{B_n\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 2, 5, 15, 52, \dots\}$  énumèrent les permutations de longueur  $n$  évitant  $1-23$ .

Le nombre de permutations au niveau  $n$  et d'étiquette  $n+1$  est exactement le nombre de permutations de  $S_{n-1}(1-23)$ , puisque chacune de ces permutations possède exactement un fils « spécial » d'étiquette  $n+1$ . En conséquence,  $M(n, n) = B_{n-1}$ . On remarque en outre que chaque permutation au niveau  $n-1$  a exactement un fils d'étiquette 2, et ainsi  $M(n, 1) = B_{n-1}$ .

De manière évidente, on a aussi  $M(n, k) = 0$  si  $k > n$ .

Considérons à présent le cas de  $M(n, k)$ , avec  $n > k \geq 2$ . Rappelons que  $M(n, k)$  est le nombre de permutations de longueur  $S_n(1-23)$  possédant  $k+1$  sites actifs. D'après la règle de réécriture, nous savons que chacune de ces permutations est générée par une permutation -appelons la  $\tau$ - au niveau  $n-1$  avec une étiquette  $r$ ,  $r \geq k+1$ . Le nombre de permutations  $\tau$  de longueur  $n-1$  et d'étiquette  $r$  est  $M(n-1, r-1)$ . Ainsi, on a :

$$M(n, k) = \sum_{i=k}^{n-1} M(n-1, i) \quad (1)$$

Rappelons quelques points parmi les plus importants à ce stade de notre réflexion.

- $\pi \in S_n(1-23)$  possède  $k$  sites actifs, avec  $k = 2, 3, \dots, n$ , si et seulement si  $\pi(n) = k$  ;
- $\pi \in S_n(1-23)$  possède  $n+1$  sites actifs si et seulement si  $\pi(n) = 1$ .

Ainsi, si  $n > k \geq 2$ ,  $M(n, k-1)$  est le nombre de permutations de  $S_n(1-23)$  dont le dernier élément a pour valeur  $k$ , et  $M(n, n)$  est le nombre de permutations de  $S_n(1-23)$  dont le dernier élément a pour valeur 1. Par suite, de manière à avoir la matrice de la distribution annoncée, selon la longueur et la valeur du dernier élément, on déplace la diagonale de manière à en faire la première colonne de la matrice. On note  $A$  cette nouvelle matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & \vdots \\ 15 & 15 & 10 & 7 & 5 & 0 & \vdots \\ 52 & 52 & 37 & 27 & 20 & 15 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

La récurrence (1) dans la matrice  $M$  offre une relation concernant les coefficients de  $A$ . Bien sûr,  $A(n, k) = 0$  si  $k > n$ , et pour les deux premières colonnes, nous avons  $A(n, 1) = B_{n-1}, \forall n \geq 1$  et  $A(n, 2) = B_{n-1}, \forall n \geq 2$ .

Dans le cas où  $3 \leq k \leq n$ , nous obtenons à partir de la récurrence sur les coefficients de  $M$  le résultat suivant :

$$A(n, k) = \sum_{i=k}^{n-1} A(n-1, i) + A(n-1, 1).$$

qui peut être simplifié pour obtenir

$$A(n, k) = A(n, k-1) - A(n-1, k-1). \quad (2)$$

Par récurrence sur (2), et en tenant compte du fait que pour tout  $n$ ,  $A(n, 2) = B_{n-1}$ , on peut démontrer que

$$\begin{aligned} A(n, k) &= \Delta^{k-2}(A(n, 2)) = \Delta^{k-2}(B_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} (-1)^i B_{n-i-1}, \quad 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

La deuxième expression n'est autre que l'expression de la  $(n-2)$ -ième itérée de l'opérateur  $\Delta$  défini sur les suites de la manière suivante :

$$\Delta((x_n)) = (x_n - x_{n-1}).$$

Nous conviendrons que  $\Delta^0(x_n) = x_n$ .

D'après l'interprétation des coefficients de la matrice  $A$  donnée plus haut, nous obtenons le résultat suivant :

- $|\{\pi \in S_n(1-23) : \pi(n) = 1\}| = B_{n-1}, \quad n \geq 1;$
- $|\{\pi \in S_n(1-23) : \pi(n) = k\}| = \Delta^{k-2}(B_{n-1}), \quad 2 \leq k \leq n.$

## 4.2 Généralisation du résultat précédent aux autres éléments de la classe de symétrie de 1 – 23.

Ici, nous étendons le résultat précédent aux permutations évitant un autre motif généralisé de la classe de symétrie de 1 – 23.

On voit facilement que, grâce à l'opération de miroir, on obtient une énumération selon la longueur et la valeur du premier élément des permutations évitant 32 – 1. En considérant le complément (respectivement le miroir-complément) de 1 – 23, on obtient aussi une distribution des permutations évitant 3 – 21 et 12 – 3 selon la longueur et la valeur du dernier (respectivement premier) élément. Remarquons que dans ce cas, si  $k \neq n$  (respectivement  $k \neq 1$ ) est le nombre de sites actifs de  $\pi \in S_n(3 – 21)$  (respectivement  $\pi \in S_n(12 – 3)$ ), alors  $\pi(n) = n - k + 1$  (respectivement  $\pi(1) = n - k + 1$ ). La liste suivante résume les résultats associés à  $S_n(32 – 1)$ ,  $S_n(3 – 21)$  et  $S_n(12 – 3)$  :

- $|\{\pi \in S_n(32 – 1) : \pi(1) = n\}| = B_{n-1}, n \geq 2;$
- $|\{\pi \in S_n(32 – 1) : \pi(1) = k\}| = \Delta^{k-2}(B_{n-1}), 2 \leq k \leq n;$
- $|\{\pi \in S_n(3 – 21) : \pi(n) = n\}| = B_{n-1}, n \geq 1;$
- $|\{\pi \in S_n(3 – 21) : \pi(n) = k\}| = \Delta^{n-k-1}(B_{n-1}), 1 \leq k \leq n - 1;$
- $|\{\pi \in S_n(12 – 3) : \pi(1) = n\}| = B_{n-1}, n \geq 1;$
- $|\{\pi \in S_n(12 – 3) : \pi(1) = k\}| = \Delta^{n-k-1}(B_{n-1}), 1 \leq k \leq n - 1.$

## 4.3 Résultats obtenus pour les deux autres classes de symétrie.

### 4.3.1 La classe de symétrie $\{3 – 12, 21 – 3, 1 – 32, 23 – 1\}$ .

Pour la classe de symétrie du motif 3 – 12, qui est l'autre classe de motifs telle que les permutations les évitant sont énumérées par les nombres de Bell, une construction par la méthode ECO aboutit à la même règle de réécriture et donc aussi à la matrice  $M$ . Cependant, l'interprétation est plus directe, étant donné que la transformation vers la matrice  $A$  n'est pas nécessaire. Comme pour l'étude précédente, on peut mettre en évidence le fait que les coefficients de  $M$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} M(n, k) &= \Delta^{k-1}(B_{n-1}), \quad 1 \leq k < n; \\ M(n, n) &= B_{n-1}; \\ M(n, k) &= 0, \quad k > n. \end{aligned}$$

Et une interprétation simple des coefficients de  $M$ , qui relie le nombre de sites actifs d'une permutation de évitant 3 – 12 à la valeur du dernier élément d'une telle permutation, nous fournit comme dans l'étude relative au motif 1 – 23 le résultat suivant :

- $|\{\pi \in S_n(3 – 12) : \pi(n) = n\}| = B_{n-1}, n \geq 2;$
- $|\{\pi \in S_n(3 – 12) : \pi(n) = k\}| = \Delta^{k-1}(B_{n-1}), 1 \leq k \leq n - 1.$

qui possède aussi des corollaires concernant les autres motifs de sa classe de symétrie :

- $|\{\pi \in S_n(21-3) : \pi(1) = n\}| = B_{n-1}, n \geq 2;$
- $|\{\pi \in S_n(21-3) : \pi(1) = k\}| = \Delta^{k-1}(B_{n-1}), 1 \leq k \leq n-1;$
- $|\{\pi \in S_n(1-32) : \pi(n) = 1\}| = B_{n-1}, n \geq 2;$
- $|\{\pi \in S_n(1-32) : \pi(n) = k\}| = \Delta^{n-k}(B_{n-1}), 2 \leq k \leq n;$
- $|\{\pi \in S_n(23-1) : \pi(1) = 1\}| = B_{n-1}, n \geq 2;$
- $|\{\pi \in S_n(23-1) : \pi(1) = k\}| = \Delta^{n-k}(B_{n-1}), 2 \leq k \leq n.$

#### 4.3.2 La classe de symétrie $\{2-13, 31-2, 2-31, 13-2\}$ .

L'étude porte ici d'abord sur les permutations évitant le motif  $2-13$ . Une construction ECO avec une représentation des permutations en portée est ici particulièrement adaptée puisqu'on aboutit à une règle de réécriture simple dans le sens où elle fait apparaître des étiquettes composées d'un seul élément. En fait, c'est la même que pour l'énumération des chemins de Dyck présentée en exemple au début, et ceci se conçoit bien étant donné que les chemins de Dyck comme les permutations évitant  $2-13$  sont énumérées par les nombres de Catalan. Rappelons cette règle de réécriture :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2) \\ (k) \rightsquigarrow (2)(3) \cdots (k)(k+1) \end{array} \right.$$

La construction de l'arbre de génération est alors une construction classique, qui ne fait pas apparaître de distinction entre des fils « normaux » et des fils « spéciaux ». Sur le principe de construction de la matrice  $M$ , nous pouvons construire dans ce cas une autre matrice, que nous appellerons  $P$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 5 & 5 & 3 & 1 & 0 & \vdots \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

qui est déjà bien connue et dont les propriétés peuvent être trouvées dans [6] par exemple. L'interprétation des coefficients de  $P$  comme on l'a fait pour  $A$  et  $M$  fournit le résultat suivant :

- $|\{\pi \in S_n(2-13) : \pi(n) = k\}| = P(n, k).$
- et ses corollaires concernant les autres motifs de la classe de symétrie :
- $|\{\pi \in S_n(31-2) : \pi(1) = k\}| = P(n, k);$
- $|\{\pi \in S_n(2-31) : \pi(n) = k\}| = P(n, n-k+1);$
- $|\{\pi \in S_n(13-2) : \pi(1) = k\}| = P(n, n-k+1).$

## 5 Conclusion.

Tout au long de mon stage au DSI de l'université de Florence, qui est retracé de manière presque chronologique dans le présent rapport, je suis passée de la découverte, en tant qu'observateur, d'une méthode pour la combinatoire, la méthode ECO, qui a déjà à de nombreuses reprises fait ses preuves, à la découverte, mais en tant que chercheur au sein d'une équipe, d'un résultat nouveau sur les permutations à motif exclu. Un article a vu le jour et est à cette date en attente de relecture par un autre membre de l'équipe pour être soumis à publication. Cet article, dont l'idée est apparue simplement, et rapidement, achève un travail de deux mois qui a été ponctué de très nombreuses tentatives infructueuses. Il présente un résultat un peu en marge du sujet initial qui m'a été proposé. Cependant, ce résultat (celui de la section 4) ouvre de nouvelles voies de recherche. En effet, il est habituel, après avoir étudié les permutations évitant *un* motif d'un certain genre, d'étudier ce qui se passe pour les permutations évitant conjointement *plusieurs* de ces motifs. Nous avons mené une petite étude et il semblerait que l'on puisse obtenir des résultats un peu plus faibles mais tout à fait dignes d'intérêt. A suivre . . .

Tous mes remerciements à Maddalena Poneti, Antonio Bernini, Luca Ferrarri, Renzo Pinzani, Elena Barcucci et Elisabeta Grazzini pour leur accueil chaleureux, leur gentillesse et leur disponibilité pendant toute la durée de mon stage dans leur équipe.

## Références

- [1] E. Babson, E. Steingrímsson *Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics*, Sémin. Lothar. Combin. 44 (2000), Art. B44b, 18 pp. (electronic).
- [2] E. Barcucci, A. Del Lungo, E. Pergola, R. Pinzani *ECO : A Methodology for the Enumeration of Combinatorial Objects*, J. Difference Equ. Appl., 5 (1999) 435-490.
- [3] A. Bernini, M. Bouvel, L. Ferrari *A new statistics on permutations avoiding on generalized pattern of type (1,2) or (2,1)*, submitted.
- [4] A. Bernini, L. Ferrari, R. Pinzani *Enumerating permutations avoiding three Babson-Steingrímsson patterns*, submitted.
- [5] A. Claesson *Generalized pattern avoidance*, European J. Combin., 22 (2001) 961-971. bibitemclae-man A. Claesson, T. Mansour *Enumerating permutations-avoiding a pair of Babson-Steingrímsson patterns*, Accepted for publication in Ars Combinatoria.

- [6] J. Noonan, D. Zeilberger *The Enumeration of Permutations with a Prescribed Number of 'Forbidden' Patterns*, Adv. in Appl. Math. 17 (1996) 381-407.
- [7] R. Simion, F. W. Schmidt *Restricted Permutations*, European J. Combin. , 6 (1985) 383-406.
- [8] [http ://www.research.att.com/~njas/sequences/](http://www.research.att.com/~njas/sequences/)