Quelques exercices liés au chapitre sur l'incertain et les tests
IPAC. Reconnaissance des formes

Dans toute ce qui suit on note $\mathcal{N}(m,\sigma)$ la loi normale de moyenne m et d'écart type σ dont la densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Il est nécessaire d'avoir accès à une table de Gauss et du χ^2 pour ces exercices. Vous pouvez aussi utiliser matlab, R, ou Sagemath pour faire les calculs.

1 Densité

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer la probabilité $p(X \in [1,2])$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(2,0.5)$. Calculer la probabilité $p(X \in [1,2])$.

2 Théorie des tests

1. On considère une v.a. $X \in \mathbb{R}^2$ suivant une loi $\mathcal{N}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. Déterminer s de façon que $p(||X||^2 < s) < .9$. Dessiner l'ensemble des valeurs de X satisfaisant cette inégalité.
2. On considère une v.a. $X \in \mathbb{R}^2$ suivant une loi $\mathcal{N}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix})$. Déterminer s de façon que $p(X^t\Lambda^{-1}X < s) < 90\%$. Dessiner l'ensemble des valeurs de X satisfaisant cette inégalité.
3. On considère une v.a. $X \in R^2$ suivant une loi $\mathcal{N}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. La mesure $x = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.6 \end{pmatrix}$ peut-elle etre considérée comme une réalisation de X avec une vraisemblance de 90%?, de 95%?
4. Meme question que ci dessus dans le cas où la mesure x est connue avec une matrice de covariance $\Lambda_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. On considère maintenant que la covariance sur X dépend d'un paramètre: $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A partir de quelle valeur de λ, la mesure $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sera-t- elle etre considérée comme une instance de X avec une vraisemblance de 90%?

3 Propagation de l'incertitude

1. Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ de moyenne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de covariance $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer la moyenne et la covariance de $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * X$.
2. On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) dont l'espérance est $(1,3)$ la variance est notée $\Lambda = \sigma * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut calculer l'espérance et la variance de $Z = X/Y$. Calculer une approximation de la variance de Z en utilisant une méthode de propagation linéaire. Calculer ensuite la variance par une méthode d'échantillonnage en supposant le vecteur (X,Y) gaussien.
   Comparer les deux méthodes lorsque $\sigma = 1$ et $\sigma = .1$.