Exercices de probabilités
Quelques éléments de correction

Dans toute ce qui suit on note $\mathcal{N}(m, \sigma)$ la loi normale de moyenne m et d'écart type σ dont la densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Il est nécessaire d'avoir accès à une table du Gauss et du χ^2 pour ces exercices. Vous pouvez aussi utiliser matlab, R, ou Sagemath pour faire les calculs.

1 Densité

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer la probabilité $p(X \in [1, 2])$.
   $p(X \in [1, 2]) = p(X \in]-\infty, 2] - p(X \in]-\infty, 2]$. *En prenant une table de Gauss pour une loi centrée réduite, ou en utilisant matlab, on obient cdf('norm',2,0,1)- cdf('norm',2,0,1)=.9772-.8413= .1359*

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(2, 0.5)$. Calculer la probabilité $p(X \in [1, 2])$.
   Soit calcul directe :cdf('norm',2,2,.5)- cdf('norm',1,2,.5) Soiton utilise les données d'une loi centrée réduite: *(X-2)/.5 suit une loi normale centrée réduite. Donc* $p(X \in [1, 2]) = p((X - 2)/.5 \in [-2, 0]) = .5 - 0.0228 = 0.4472$

2 Théorie des tests

1. On considère une v.a. $X \in \mathbb{R}^2$ suivant une loi $\mathcal{N}(m_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. Déterminer s de façon que $p(||X||^2 < s) < .9$. Dessiner l'ensemble des valeurs de X satisfaisant cette inégalité.
   $X^t\Lambda^{-1}X = ||X||^2$ *suit une loi du* χ^2 *à deux degrés de liberté. Le seuil correspondant à un confiance de 90% pour une loi du* $\chi 2$ *à deux degrés de livertés est* $s = chi2inv(.90, 2) = 4.6$. *Le domaine est donc le cercle de rayon* $\sqrt{4.6}$.

2. On considère une v.a. $X \in \mathbb{R}^2$ suivant une loi $\mathcal{N}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix})$. Déterminer s de façon que $p(X^t\Lambda^{-1}X < s) < 90\%$. Dessiner l'ensemble des valeurs de X satisfaisant cette inégalité.
   De la meme façon, on obtient le domaine $x^2 + y^2/2 < 4.6$

3. On considère une v.a. $X \in \mathbb{R}^2$ suivant une loi $\mathcal{N}(m_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. La mesure $x = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.6 \end{pmatrix}$ peut-elle etre considérée comme une réalisation de X avec une vraisemblance de 90%?, de 95%?
   $chi2inv(.95, 2) = 5.99$, $chi2inv(.90, 2) = 4.6$. On teste l'hypothèse $x = X$ modulo les covariances sur le modèle et la mesure. On veut donc savoir si O est une réalisation plausible de $x - X$. $Y = x - X$ est gaussienne de moyenne $x - m_X$ et de covariance Λ. donc $\delta(X, x) = (Y - m_X + x)^t\Lambda^{-1}(Y - m_X + x)$ suit une loi du $\chi(2)$. 90% de cette distribution se situe dans le domaine $(Y - m_x + x)^t\Lambda^{-1}(Y - m_x + x) < 4.6$ Pour $Y = 0$, on obtient $\delta = 4.81$, la mesure est donc refusée à 90% et acceptée à 95%.

4. Meme question que ci dessus dans le cas où la mesure x est connue avec une matrice de covariance $\Lambda_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
dans ce cas $X - x : \mathcal{N}(m_X - x, \Lambda + \Lambda_x)$. $\delta = (m_x - x)^t(\Lambda + \Lambda_x)^{-1}(m_x - x) = 2.4$. La mesure est donc acceptée. On considèrera donc que x est une instance de X.

5. On considère maintenant que la covariance sur X dépend d'un paramètre: $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A partir de quelle valeur de λ, la mesure $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sera-t- elle etre considérée comme une instance de X avec une vraisemblance de 90%?
Il suffit que $\delta = (m_x - x)^t(\Lambda)^{-1}(m_x - x) < 4.6$, *c'est-à-dire* $1/\lambda + 1 < 4.6$ *soit* $1/\lambda < 3.6$ *soit* $\lambda > .2778$.

3 Propagation de l'incertitude

1. Soit X une variable aléatoire dans R^2 de moyenne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de covariance $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer la moyenne et la covariance de $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * X$.
Utiliser la formule $Var(KX) = KVar(X)K^t$.

2. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont l'espérance est $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ la variance est notée $\Lambda = \sigma * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut calculer l'espérance et la variance de $Z = X/Y$. Calculer une approximation de la variance de Z en utilisant une méthode de propagation linéaire. Calculer ensuite la variance par une méthode d'échantillonnage en supposant le vecteur (X,Y) gaussien. Comparer les deux méthodes lorsque $\sigma = 1$ et $\sigma = .1$.
Propagation linéaire: $E(Z) = f(1, 3) = 1/3$, $J_f = (1/y, -x/y^2) = [1/3, -1/9]$ *donc* $Var(Z) = J_f * cov * J_f'$. *Voir l'exemple de propagation donnée en cours*