

Reconnaissance des formes

Les exercices 1 et 2 correspondent au cours de M.O. Berger, les exercices 3, 4 et 5 à celui de J.F. Mari. Rédiger les réponses aux questions de ce sujet sur deux copies séparées. Documents distribués en cours autorisés.

1 Descripteur de formes et classification

On s'intéresse dans cet exercice à savoir si une forme décrite par un contour ressemble à une forme modèle. On souhaite ici reconnaître une forme quelle que soit sa taille et son orientation. Ainsi dans la figure 1, les formes 1,2,3,6 sont identifiées comme semblables à la forme modèle.

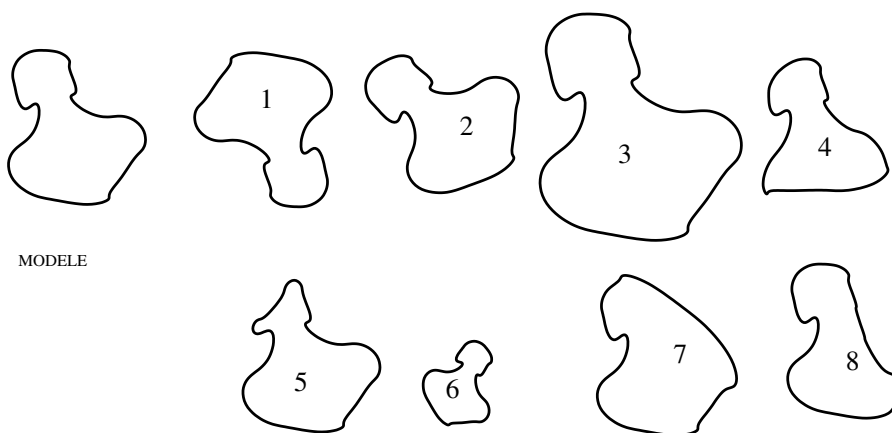


Figure 1: Les formes semblables au modèle sont les formes 1,2,3,6.

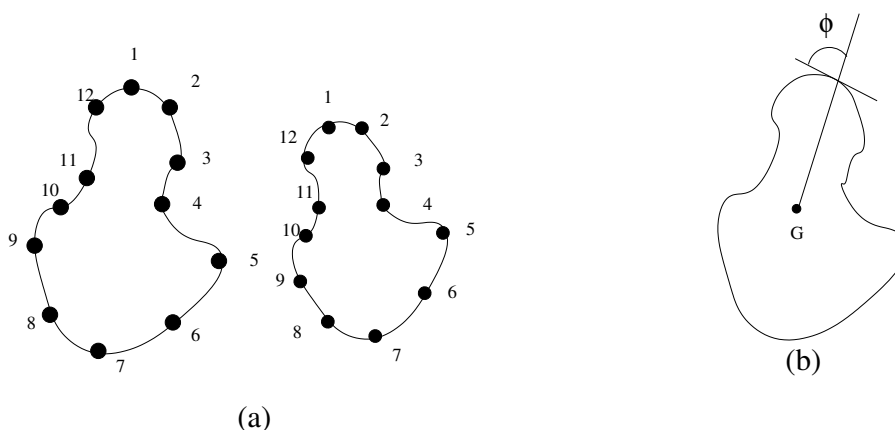


Figure 2: Deux types de descripteur: (a) par une liste de points (b) par l'histogramme de l'angle du rayon avec la tangente.

1.1 Description des formes par une liste de points

La représentation la plus simple est d'utiliser une liste de N points. On suppose pour commencer que l'on a su mettre en correspondance les N points entre courbes comme montré dans la figure Fig. 2.a. On notera dans la suite M_i^j $1 \leq i \leq N$ l'ensemble des points discrétisés de la j^{ieme} forme.

- Dans le cas général les deux formes n'ont ni la même orientation ni la même échelle. Proposer une méthode permettant de reconnaître si deux formes sont identiques modulo l'échelle et l'orientation. On remarquera qu'il existe une similitude reliant les deux formes

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos(\theta)x - s \sin(\theta)y + t_x \\ s \sin(\theta)x + s \cos(\theta)y + t_y \end{pmatrix}$$

Quelles sont les difficultés de mise en oeuvre de cette méthode (on s'intéressera en particulier à la facilité de calculer cette distance et à son coût de calcul).

- En utilisant l'estimation robuste, expliquer comment adapter cette méthode pour reconnaître deux formes même si certaines parties sont légèrement différentes ou absentes (cas d'occultation)?
- Cette méthode est évidemment dépendante d'une mise en correspondance correcte des points entre les contours. Proposer une méthode permettant de réaliser automatiquement une telle mise en correspondance. Vous explicitez les problèmes que cela pose et vous justifierez votre solution.

1.2 Description par la tangente

On utilise maintenant un autre descripteur (Fig. 2.b). A chaque rayon issu du centre de gravité de la forme est associé l'angle ϕ de la tangente au contour avec le rayon de vecteur. On utilise comme descripteur du contour l'histogramme de ces valeurs de ϕ lorsqu'on parcourt le contour.

1. Quel est le descripteur associé à un cercle?
2. Expliquer pourquoi ce descripteur est invariant à l'orientation et au changement d'échelle quel que soit le contour considéré.
3. Comment calculer la distance entre deux descripteurs, c'est à dire deux histogrammes?
4. Dessiner plusieurs formes ayant le même descripteur mais n'étant pas identiques à changement d'échelle et d'orientation près. Le fait qu'un descripteur ne soit pas associé à une forme unique pose évidemment un problème en terme de reconnaissance. Quel est l'intérêt de ce descripteur dans un processus de reconnaissance par rapport à l'approche décrite dans la section 1.1 (on réfléchira en particulier à l'efficacité du processus de reconnaissance quand on souhaite extraire parmi un ensemble de formes toutes les formes semblables au modèle).

2 Fusion de données

On considère le problème général de la fusion de données: étant données deux mesures m_1 et m_2 appartenant à R^p d'une même grandeur acquises par des moyens différents, on souhaite obtenir une meilleure estimation de cette grandeur prenant en compte les deux mesures. Ces deux mesures ont pour covariance associée les matrices Λ_1 et Λ_2 .

Pour $p > 1$, on souhaite réaliser une estimation aux moindres carrés en recherchant le vecteur m_{new} minimisant

$$(m_{new} - m_1)^t \Lambda_1^{-1} (m_{new} - m_1) + (m_{new} - m_2)^t \Lambda_2^{-1} (m_{new} - m_2)$$

1. Montrer que ce critère est bien adapté au problème
2. Si, on choisit pour métrique une norme significative du problème, $\|Z\|^2 = Z^t \Lambda^{-1} Z$ où Λ est la matrice de covariance des mesures, montrer que la solution de l'équation $Z = A\theta$ aux moindres carrés est donnée par

$$\hat{\theta} = (A^t \Lambda^{-1} A)^{-1} A^t \Lambda^{-1} Z$$

3. Utiliser le résultat précédent pour montrer que l'estimation obtenue est

$$m_{new} = (\Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1})^{-1}(\Lambda_1^{-1}m_1 + \Lambda_2^{-1}m_2)$$

4. Montrer que cette formule est conforme à l'intuition, c'est à dire que la mesure la moins sûre est prise en compte de manière moins importante dans l'estimation.

3 Classification ascendante hiérarchique

On désire classer des séquences d'ADN. Celles-ci sont constituées en moyenne d'une dizaine de nucléotides (A, C, G, T). On choisit l'algorithme de classification hiérarchique de *Ward*. Bien sûr, l'espace des observations n'est pas métrique et il s'agit de le doter d'une distance. On dispose seulement d'une fonction de similarité entre deux séquences. Soit $nw(s_1, s_2)$ la similarité entre les séquences s_1 et s_2 . Pour deux séquences de même longueur, cette fonction atteint son maximum quand s_1 et s_2 sont égales. Cette valeur augmente avec la longueur de la séquence. Sa valeur diminue en fonction du nombre de substitutions, insertions ou délétions d'un nucléotide qu'il faut appliquer pour passer de s_1 à s_2 . On a toujours $nw(s_1, s_2) > 0$.

3.1 Question 1 : définition d'une distance entre séquences

On note par $d(s_1, s_2)$ la distance entre les séquences s_1 et s_2 . On veut simplement que : $s_1 = s_2 \Rightarrow d(s_1, s_2) = 0$, proposer plusieurs méthodes pour passer de la similitude $nw(s_1, s_2)$ à une distance $d(s_1, s_2) = 0$. Discuter les.

On veut en plus $d(s_1, s_2) = d(s_2, s_1)$ alors que $nw(s_1, s_2) \neq nw(s_2, s_1)$. Proposer une nouvelle définition de la distance entre deux séquences.

3.2 Question 2 : implémentation de l'algorithme de Ward

Comment définir l'inertie intra-classe à l'aide de cette distance ? Donnez la définition du critère d'agglomération entre classes basé sur la minimisation de la perte de l'inertie.

3.3 Question 3 : sélection du modèle

L'algorithme de Ward est capable de regrouper toutes les séquences à traiter en une seule classe. On désire l'arrêter avant. Donnez 3 critères pour trouver le nombre optimum de classes.

4 Probabilités Bayésiennes

Trois coffres contiennent respectivement

- une pièce d'or et une pièce d'argent ;
- deux pièces d'or ;
- deux pièces d'argent.

On choisit une pièce dans un de ces 3 coffres. La pièce est en or. Quelle est la probabilité que la seconde pièce (du même coffre) le soit également ?

5 Réseau Bayésien

Un individu soupçonné d'homicide (H) a été identifié par un témoin (T) dont les experts psychologues affirment qu'il est fiable à 70 % seulement. Un test ADN (ADN) fiable à 99 % identifie également l'individu comme étant responsable du crime. Représenter par un réseau bayésien les relations de causalité entre les trois variables T, H et ADN. Estimer la probabilité que l'individu soit coupable ($H = 1$) en adoptant une probabilité *a priori* de 10 % pour la culpabilité, puis une probabilité de 1 %.