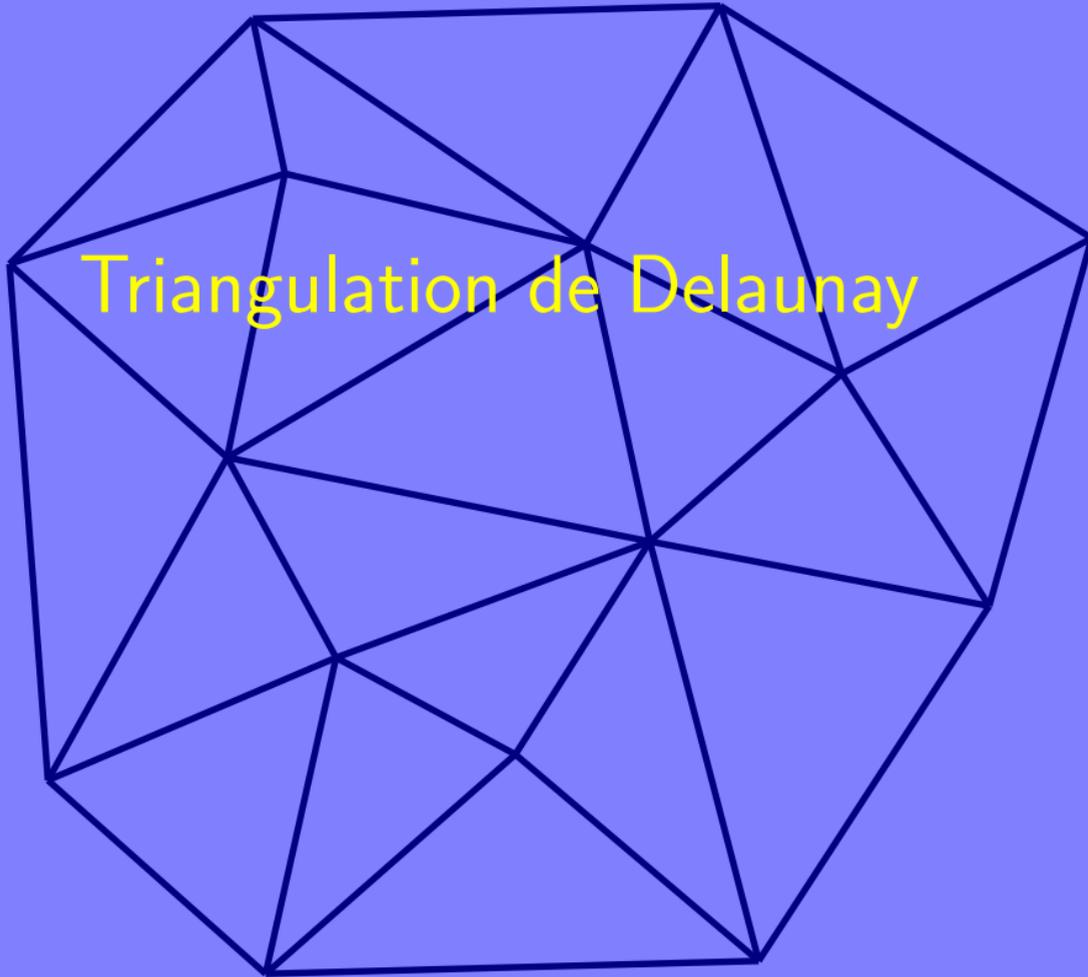


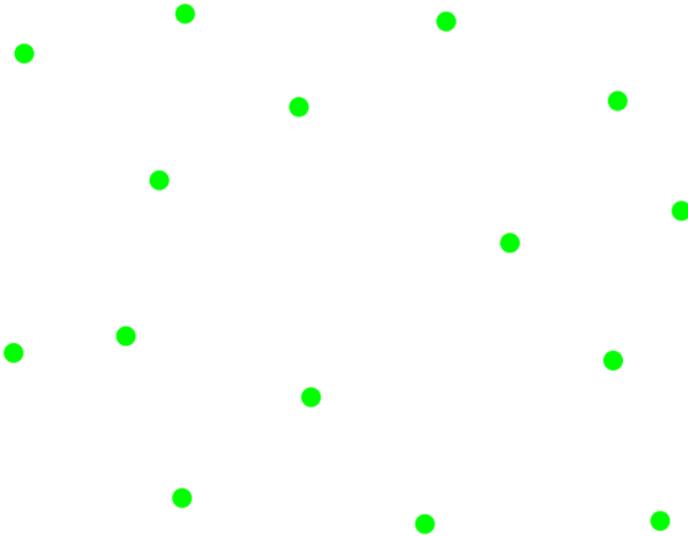
Triangulation de Delaunay





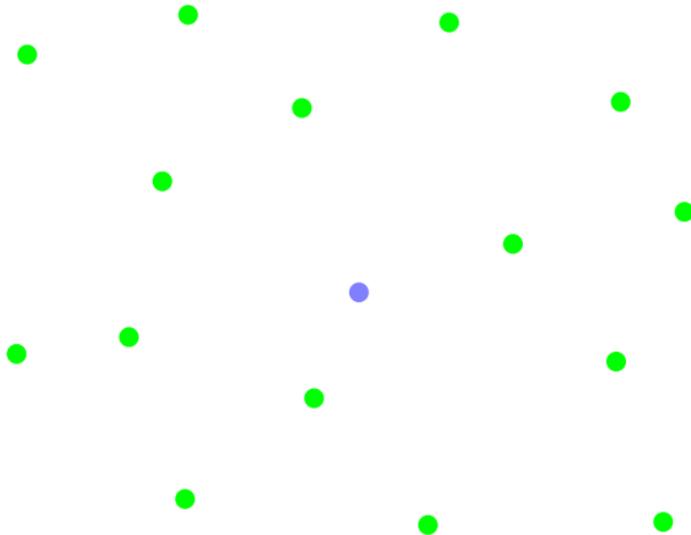
Definition de
la triangulation de Delaunay

L'exemple



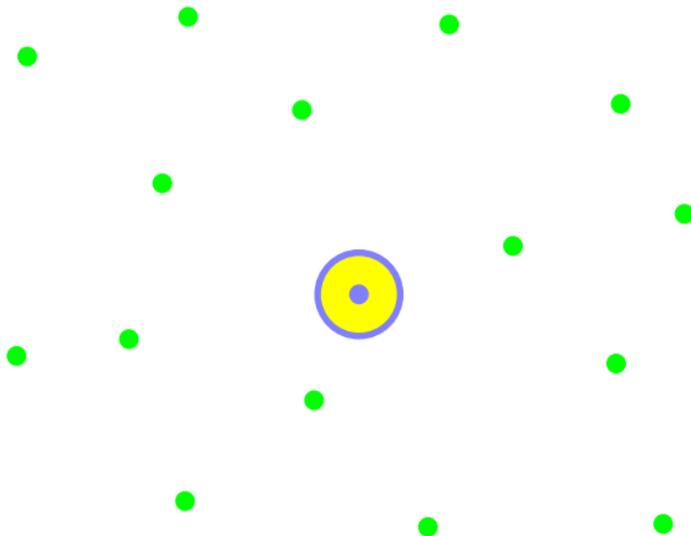
L'exemple

recherche de plus proche voisin



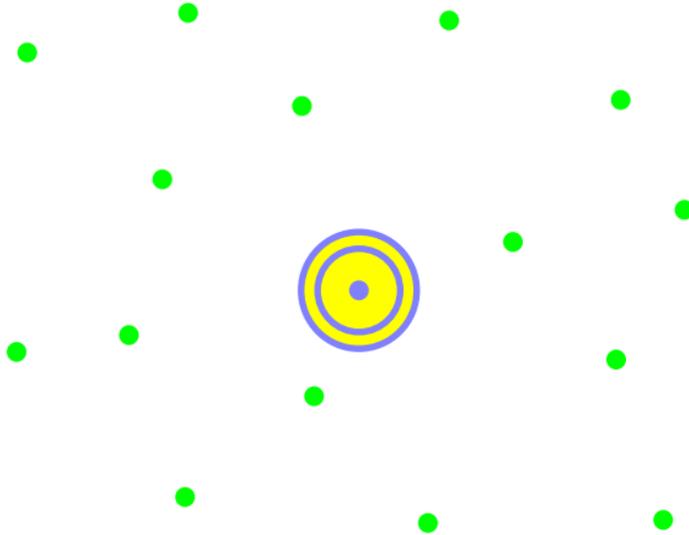
L'exemple

recherche de plus proche voisin



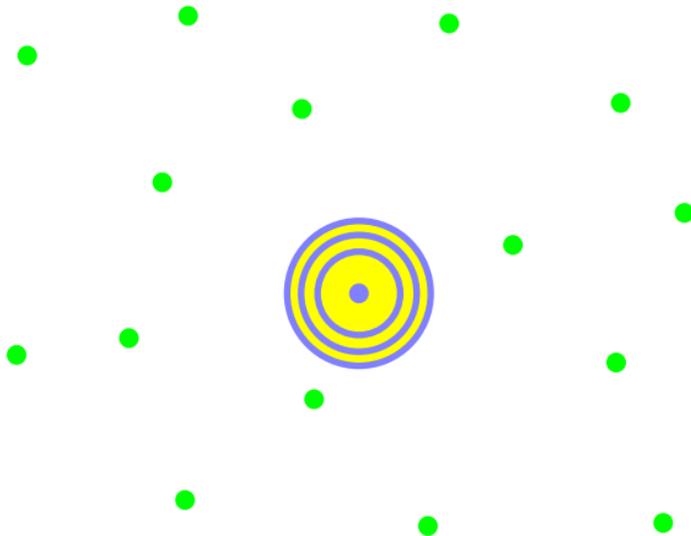
L'exemple

recherche de plus proche voisin



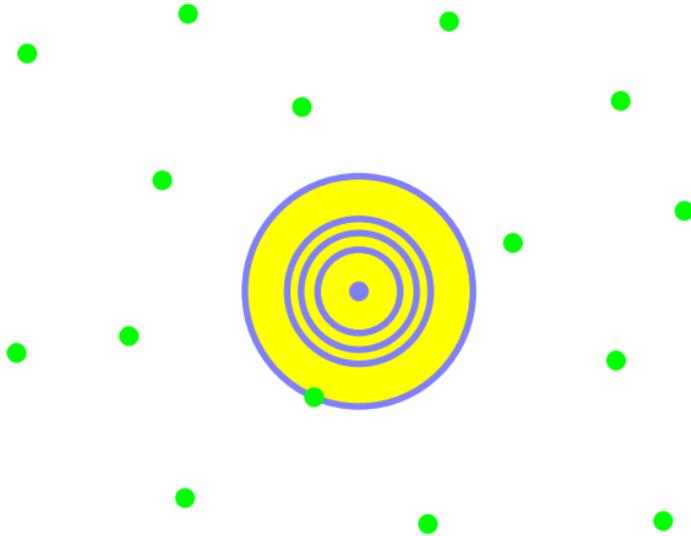
L'exemple

recherche de plus proche voisin



L'exemple

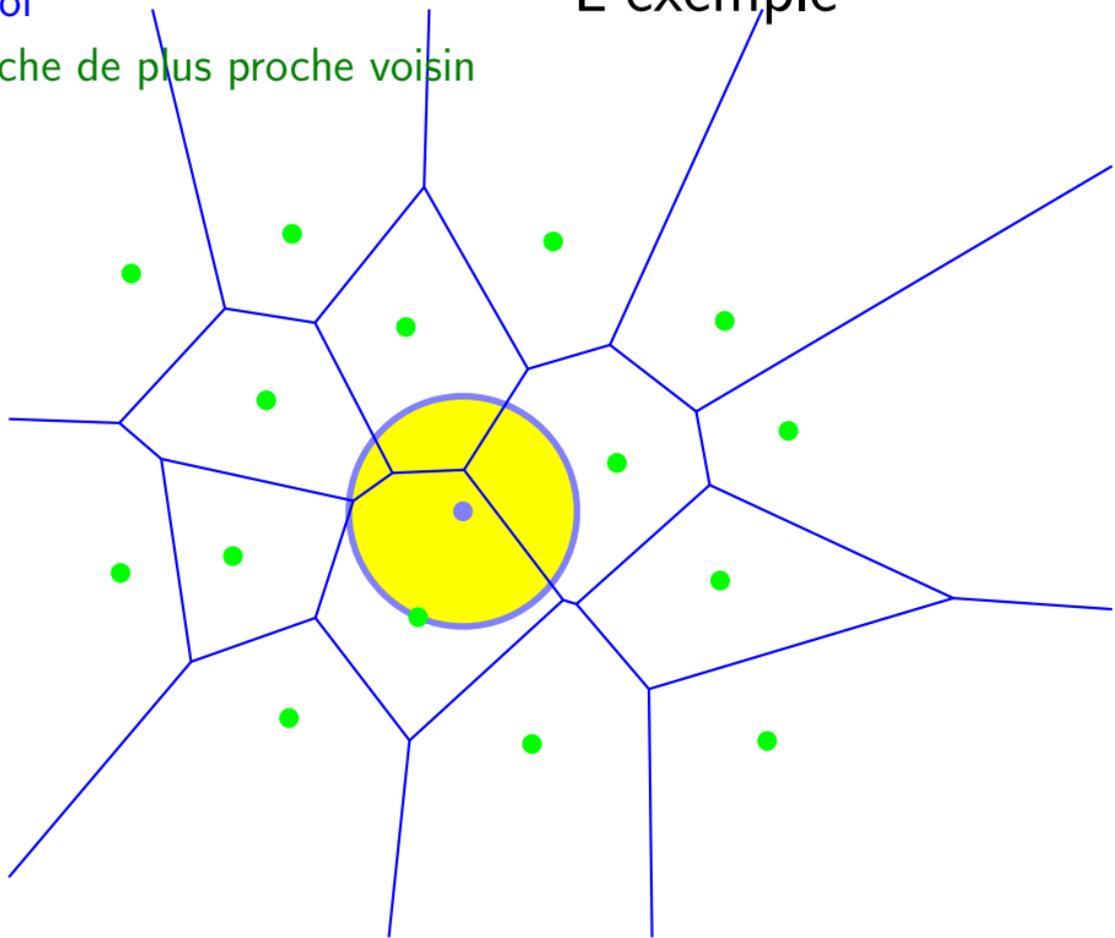
recherche de plus proche voisin



Voronoi

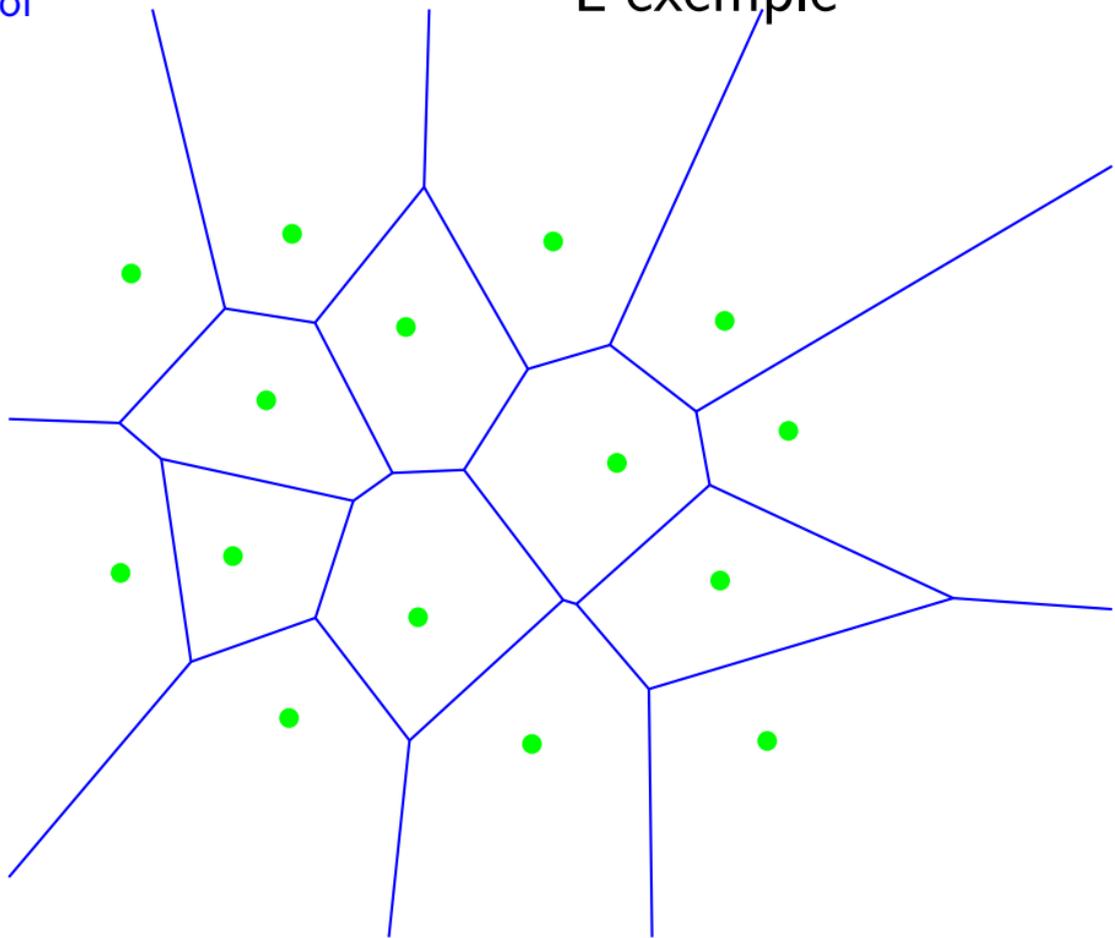
recherche de plus proche voisin

L'exemple



Voronoi

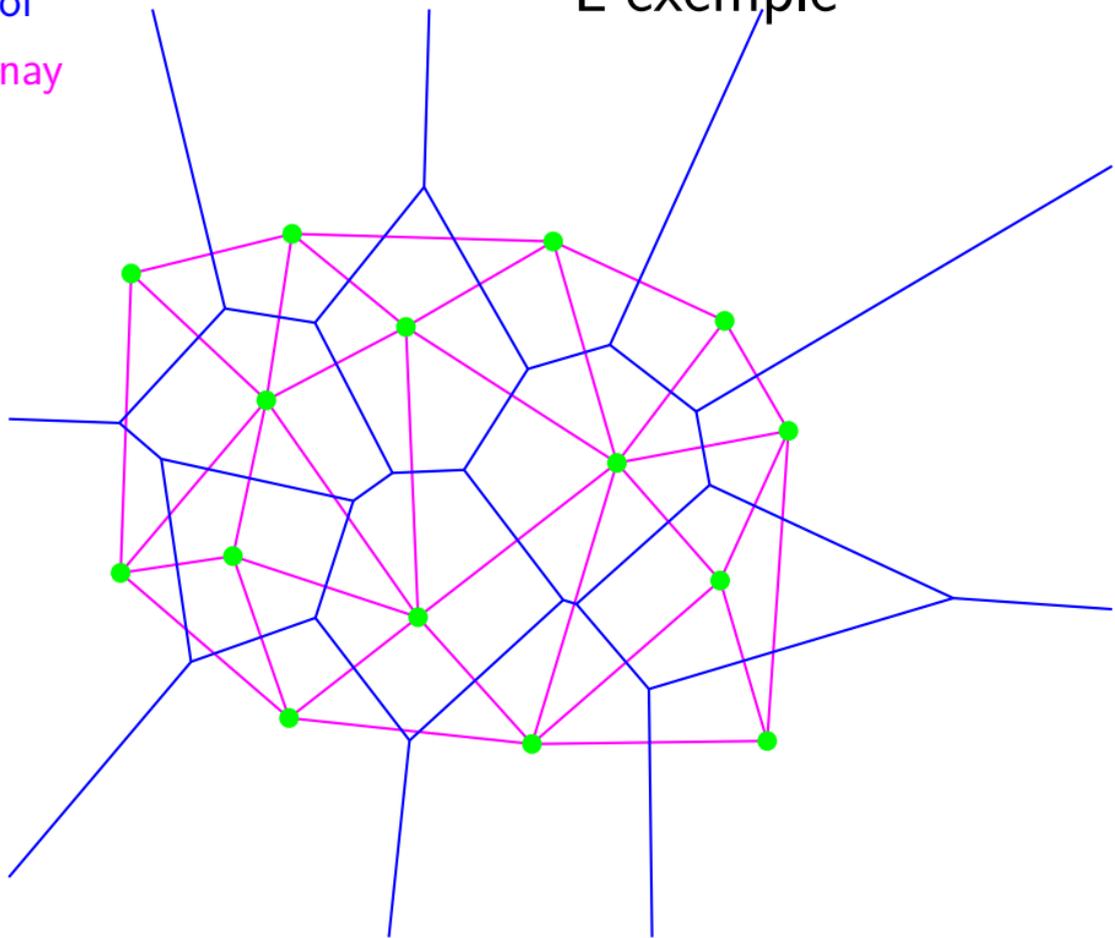
L'exemple



Voronoi

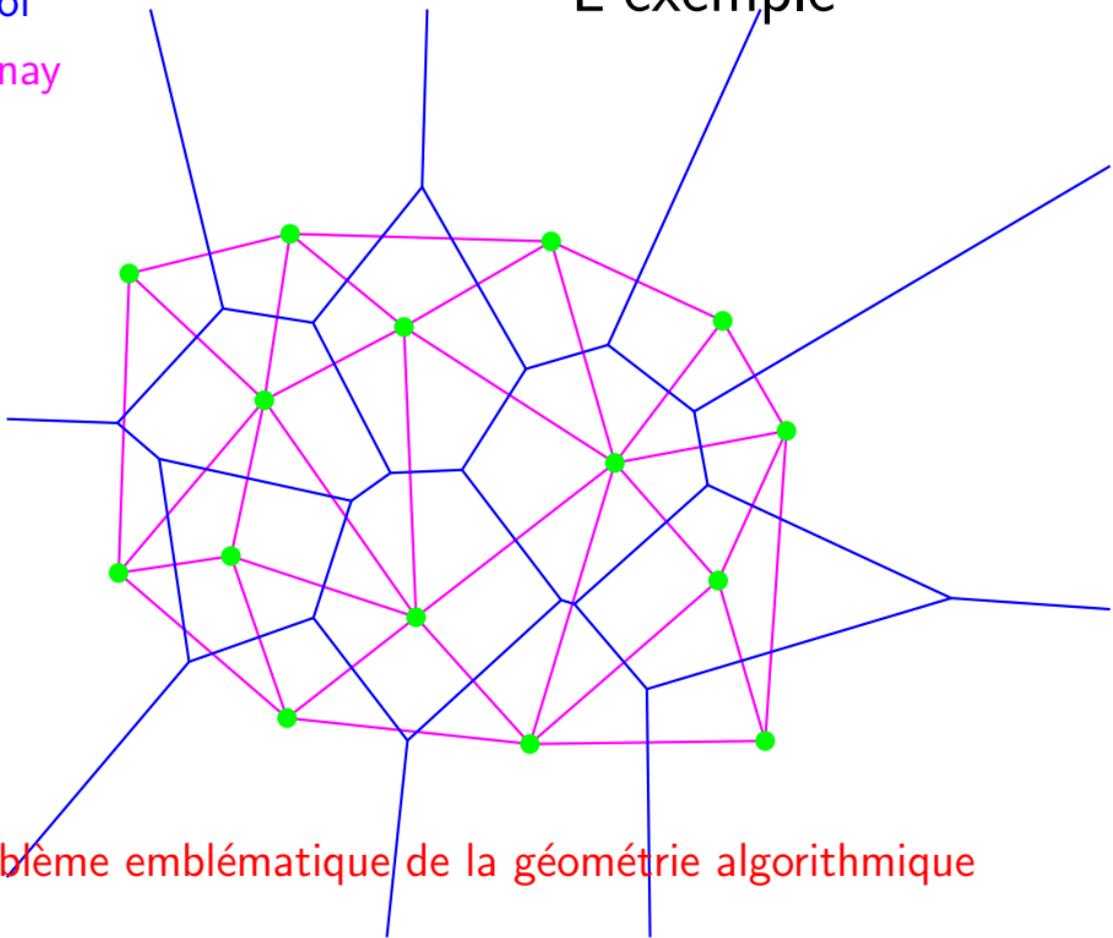
Delaunay

L'exemple



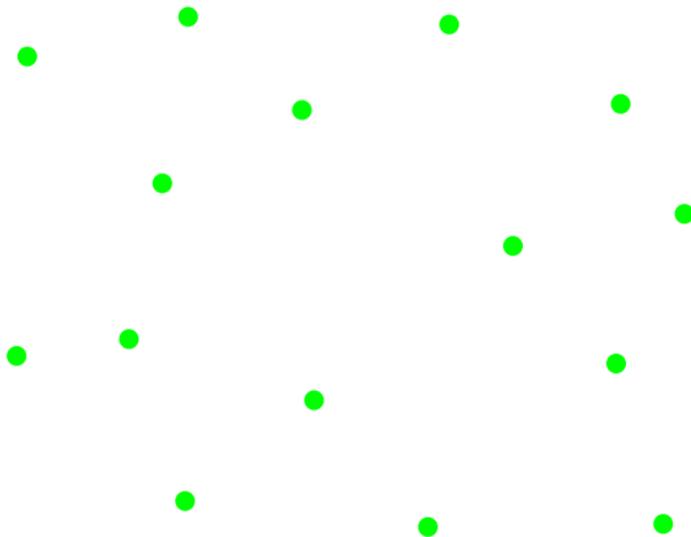
Voronoi
Delaunay

L'exemple



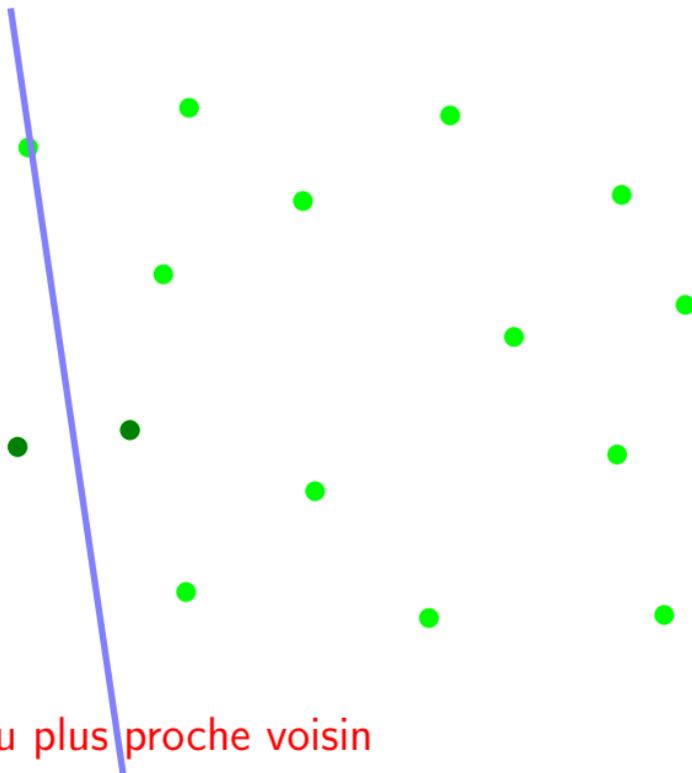
Le problème emblématique de la géométrie algorithmique

Voronoi



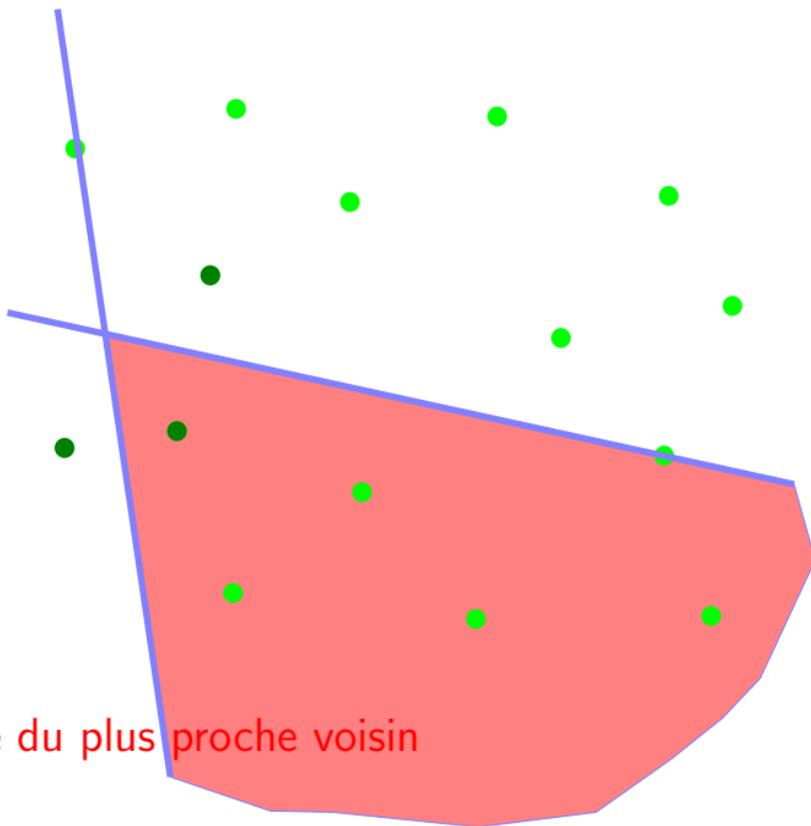
Problème du plus proche voisin

Voronoi



Problème du plus proche voisin

Voronoi

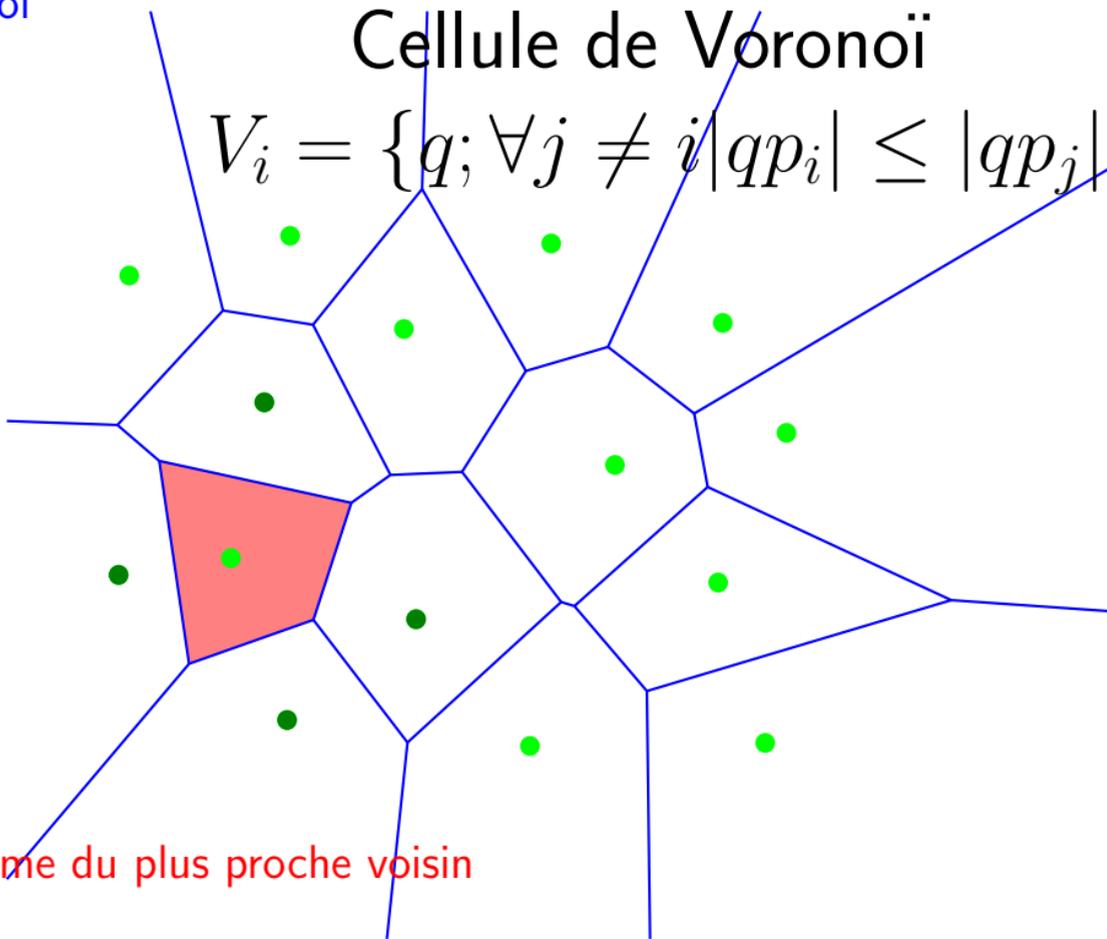


Problème du plus proche voisin

Voronoi

Cellule de Voronoï

$$V_i = \{q; \forall j \neq i |qp_i| \leq |qp_j|\}$$

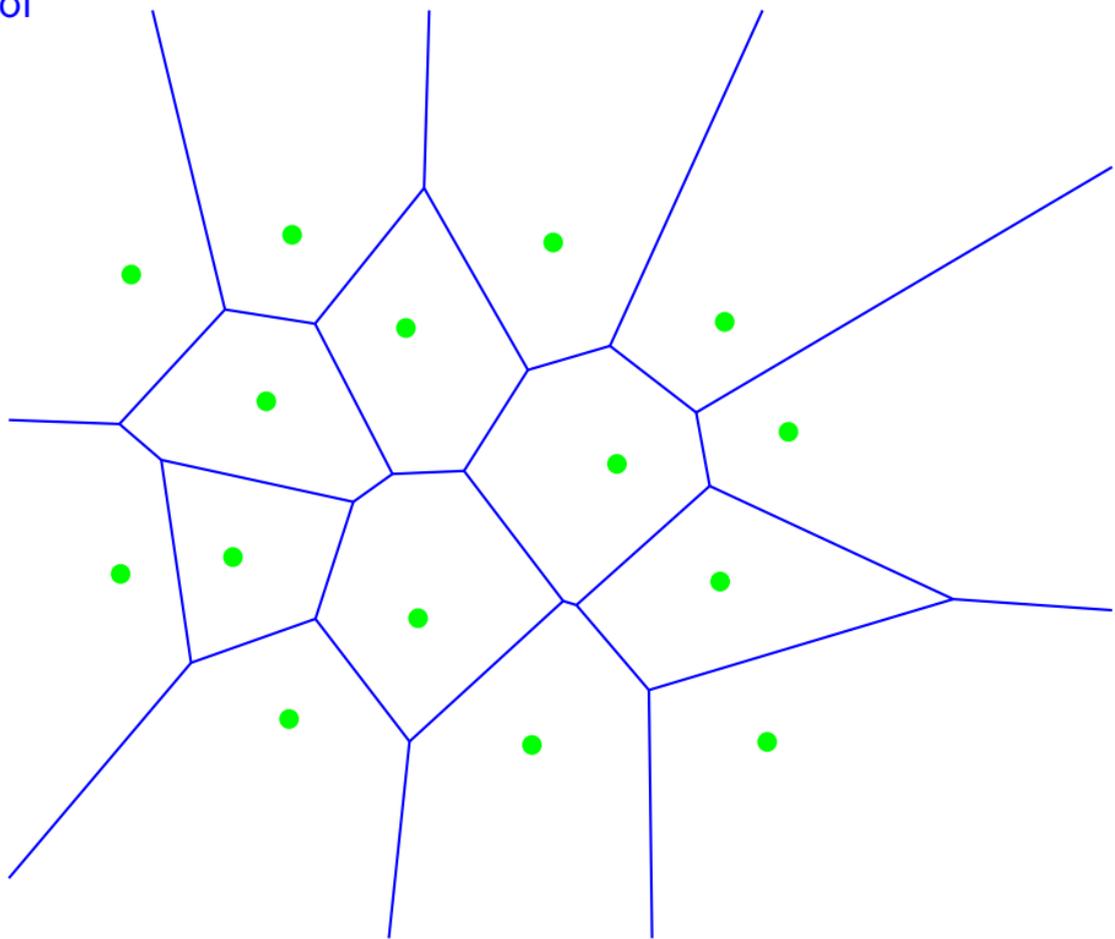


Problème du plus proche voisin

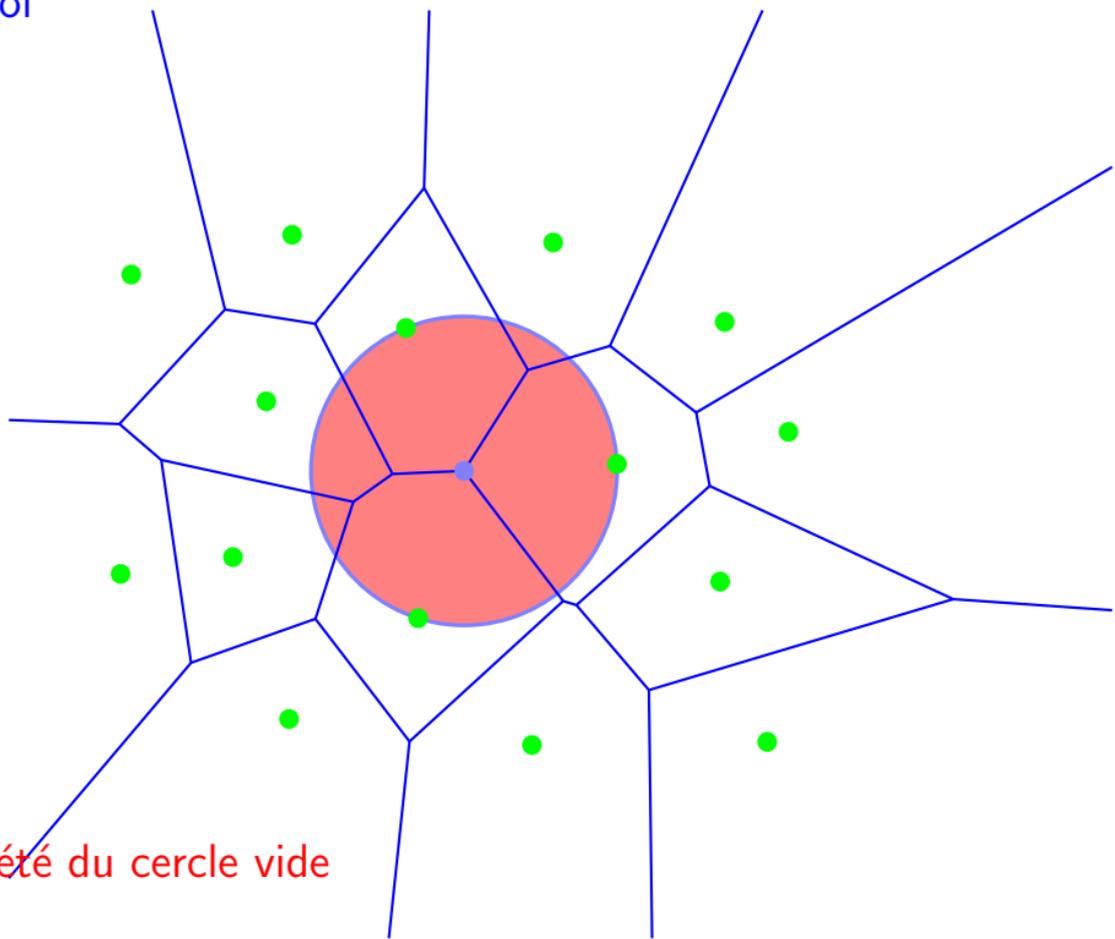


LA propriété de
la triangulation de Delaunay

Voronoi

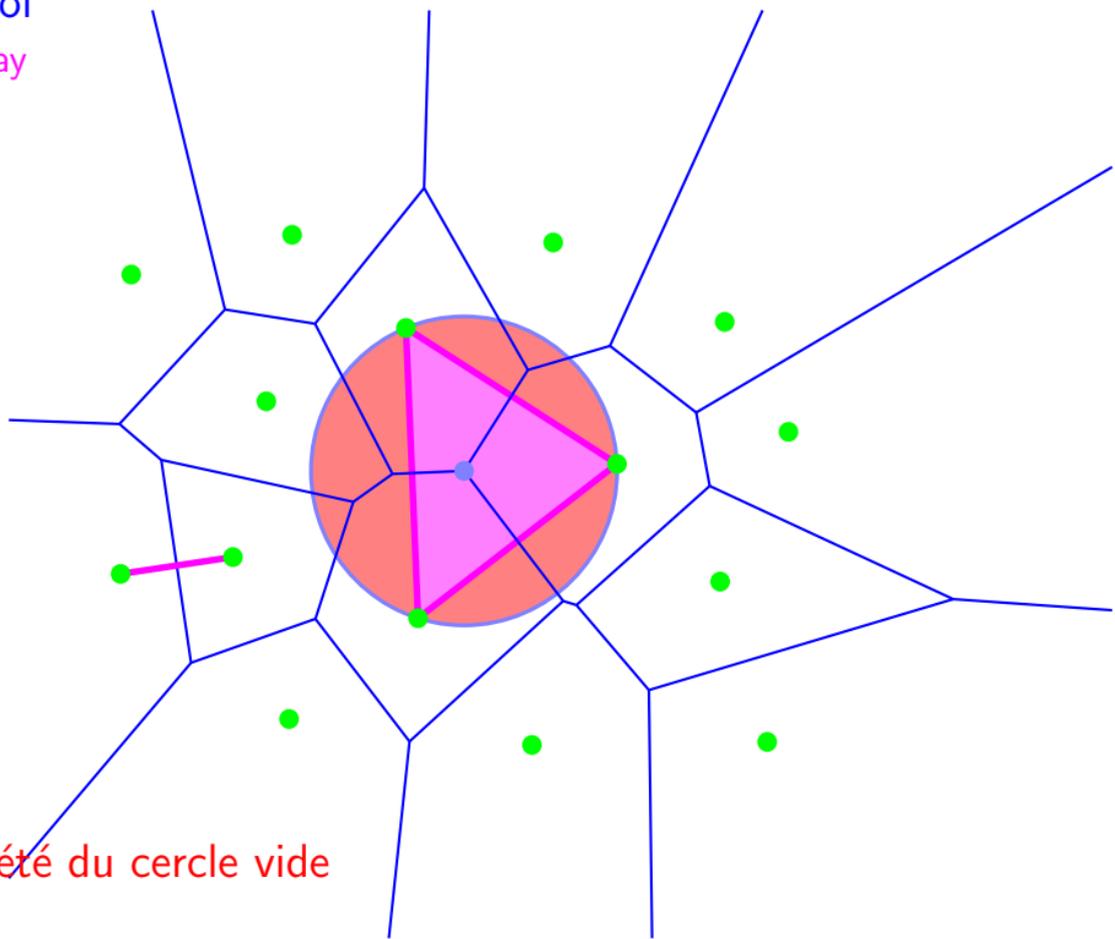


Voronoi



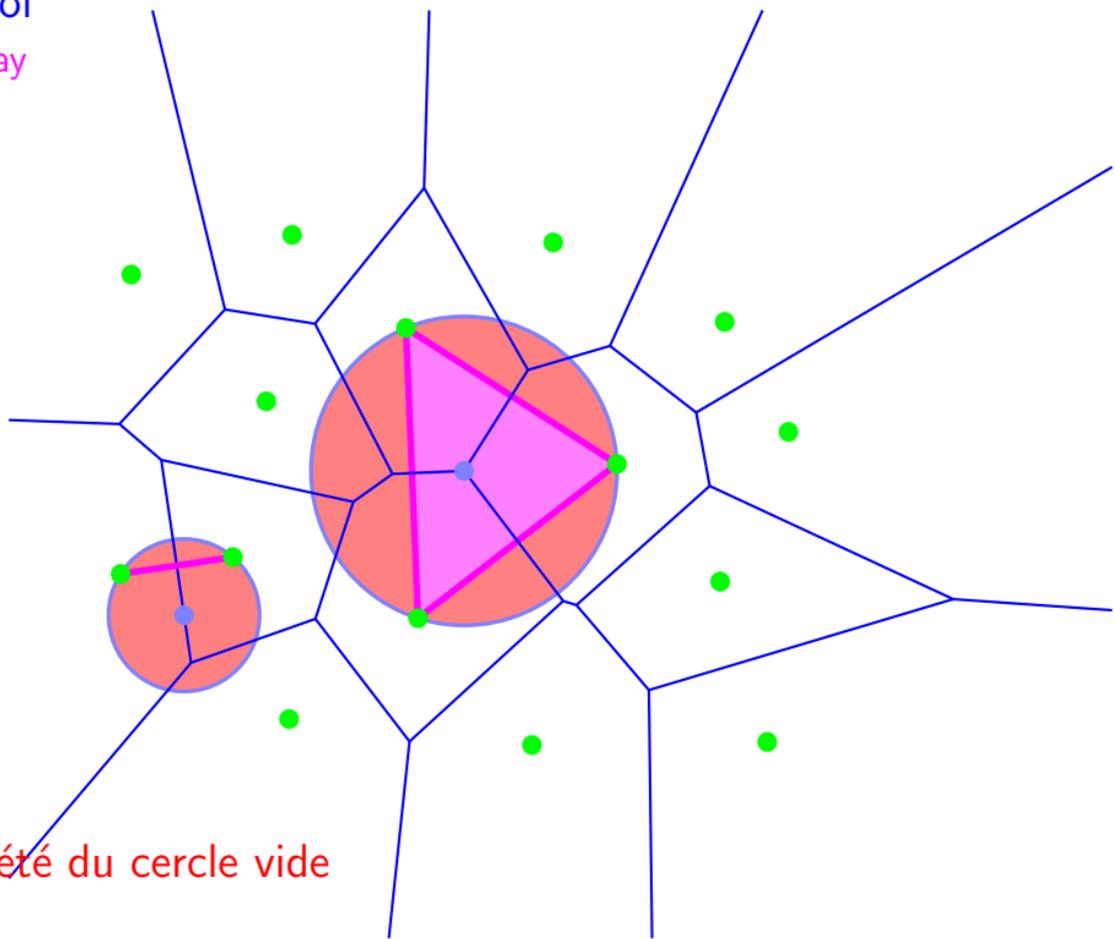
Propriété du cercle vide

Voronoi
Delaunay



Propriété du cercle vide

Voronoi
Delaunay



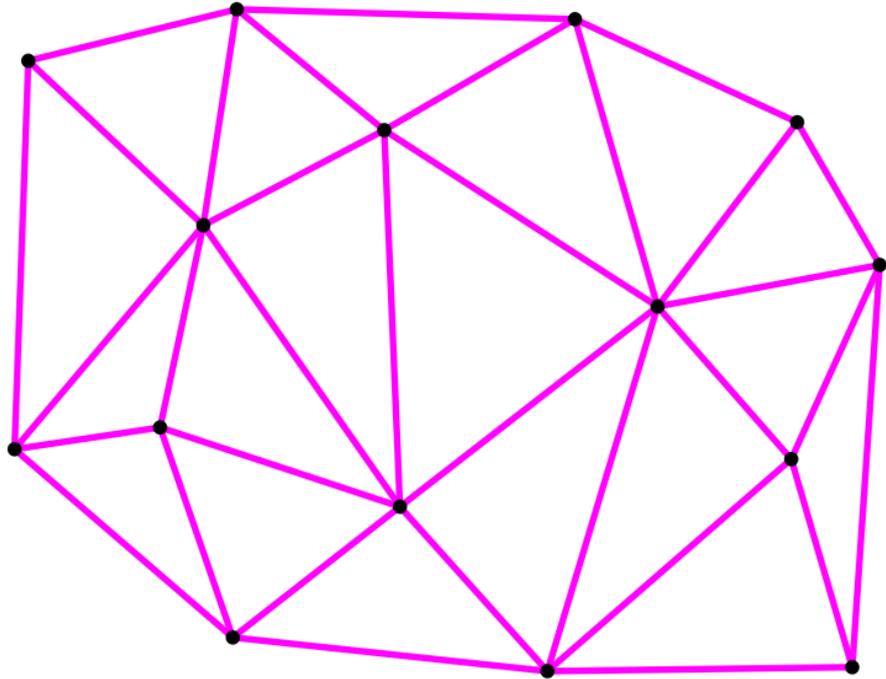
Propriété du cercle vide



Quelques applications de
la triangulation de Delaunay

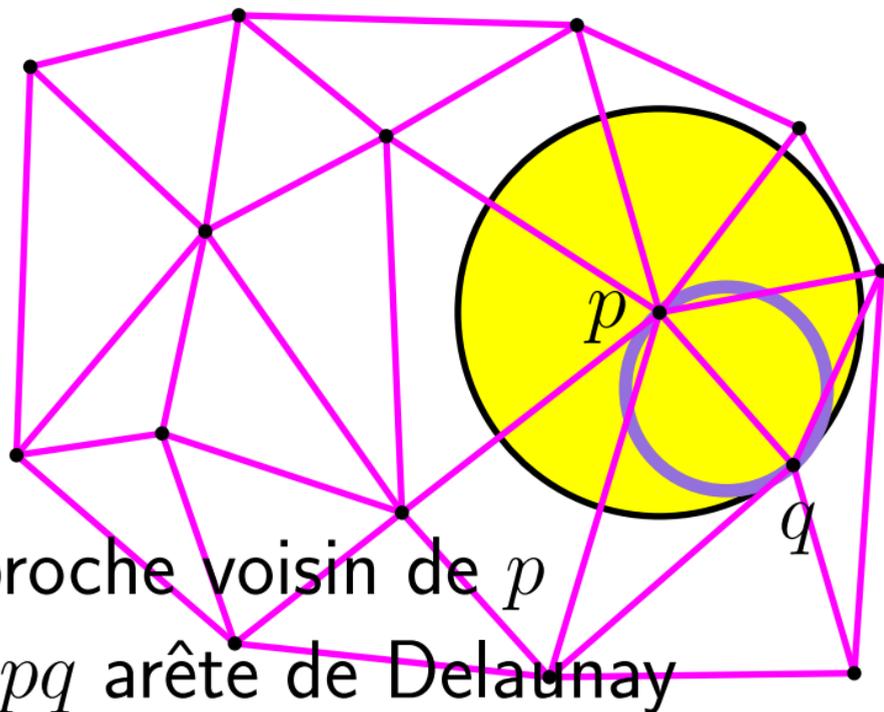
Applications “théoriques”

graphe des plus proche voisins



Applications "théoriques"

graphe des plus proche voisins

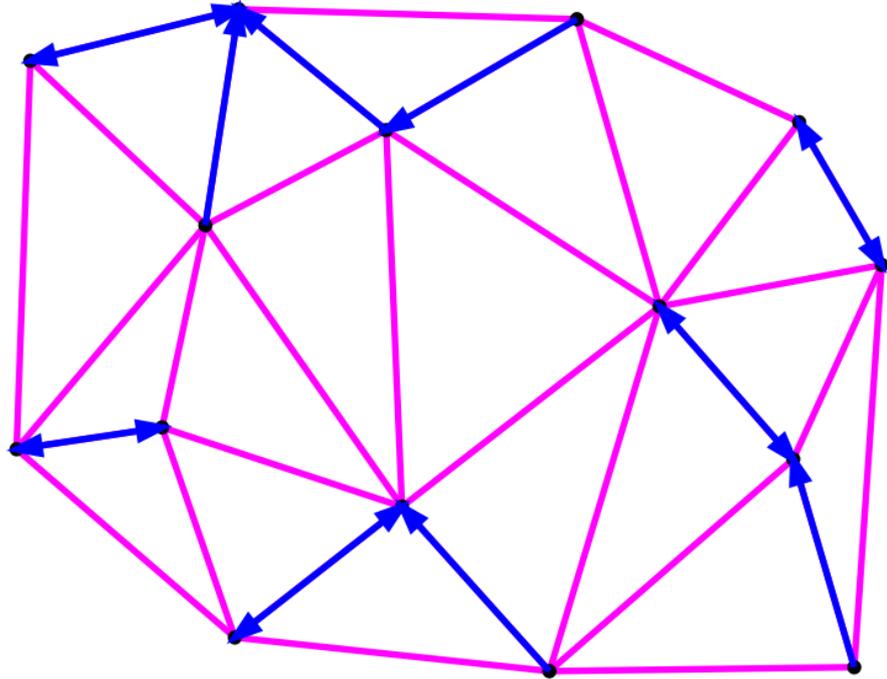


q plus proche voisin de p

alors pq arête de Delaunay

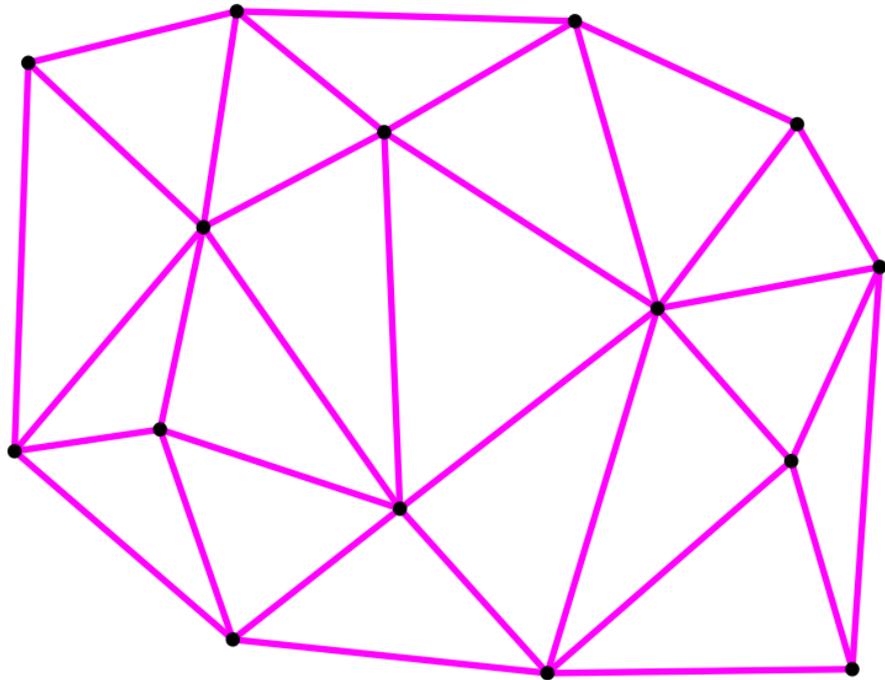
Applications "théoriques"

graphe des plus proche voisins



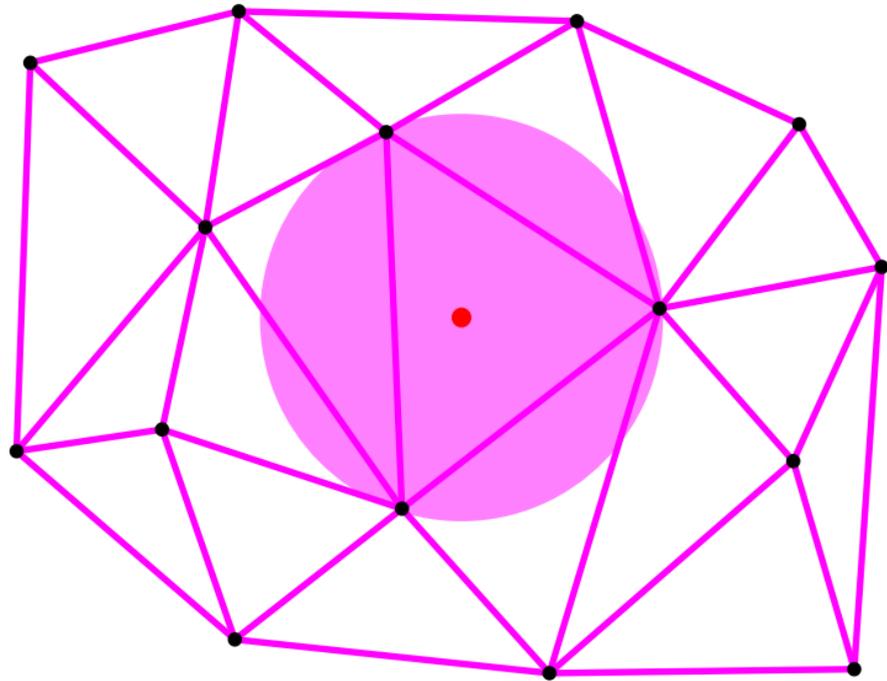
Applications “théoriques”

plus grand cercle vide



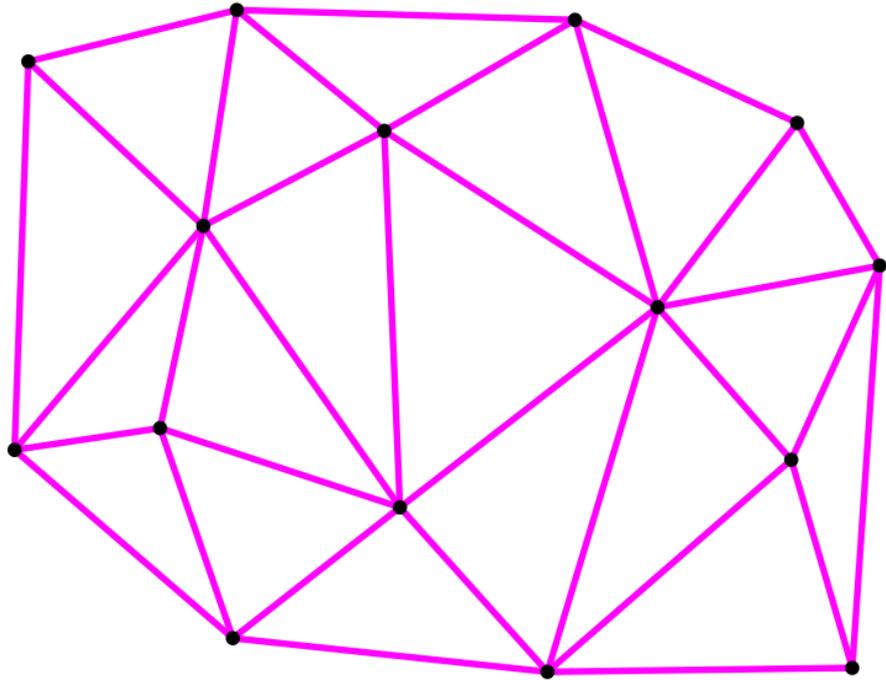
Applications "théoriques"

plus grand cercle vide



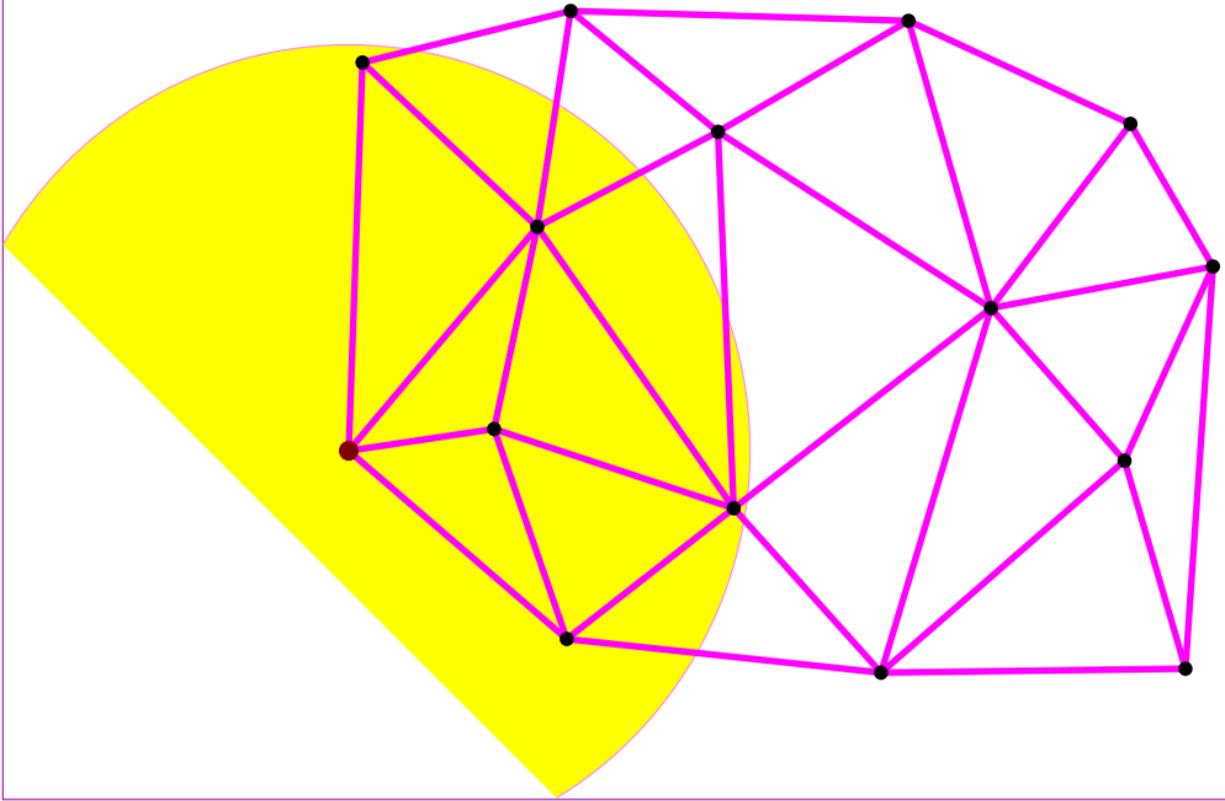
Applications “théoriques”

Recherche à rayon fixé



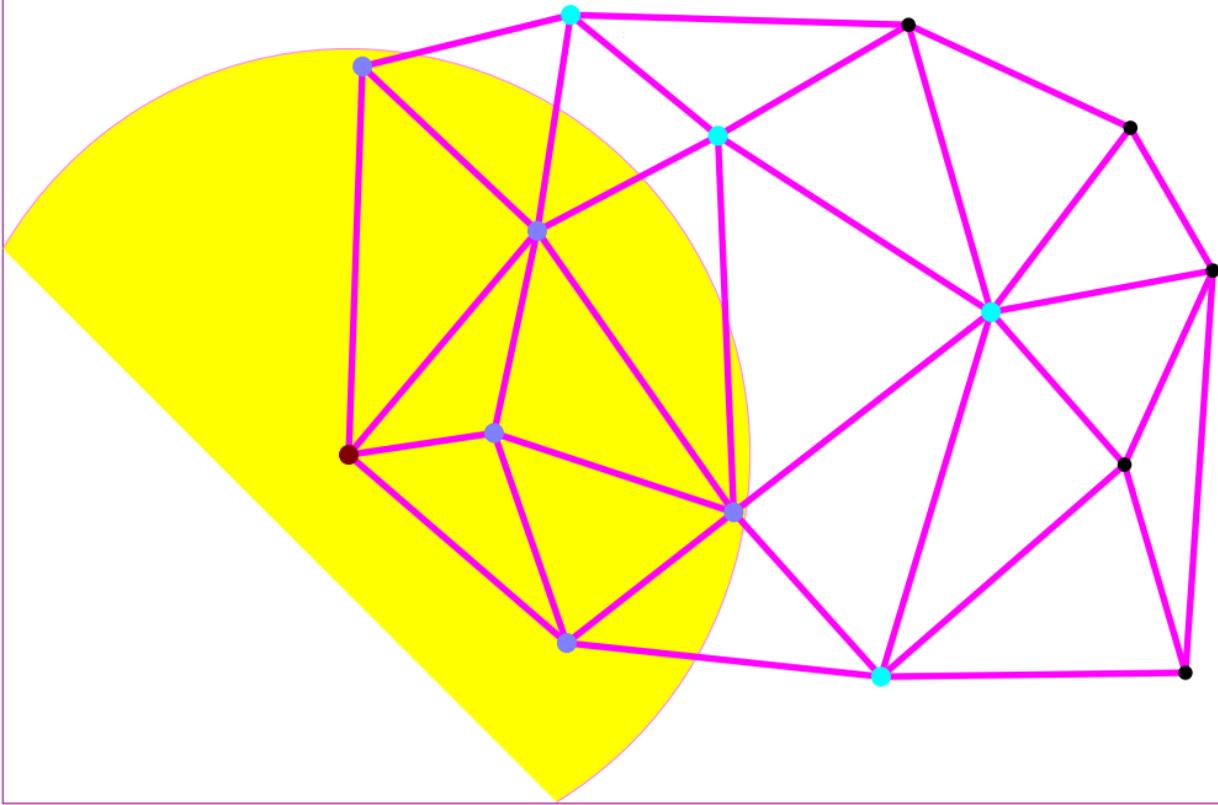
Applications “théoriques”

Recherche à rayon fixé



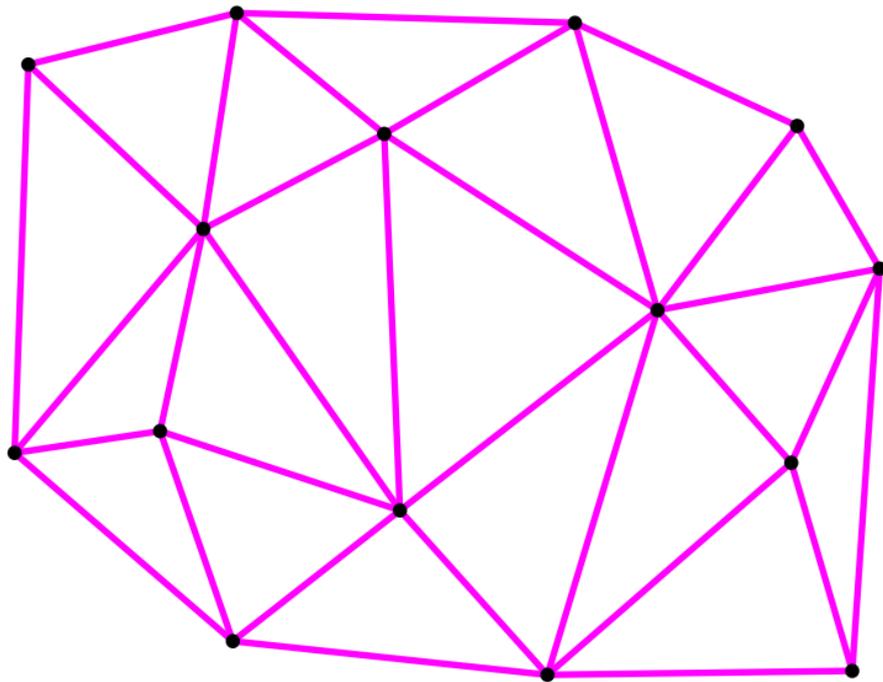
Applications “théoriques”

Recherche à rayon fixé



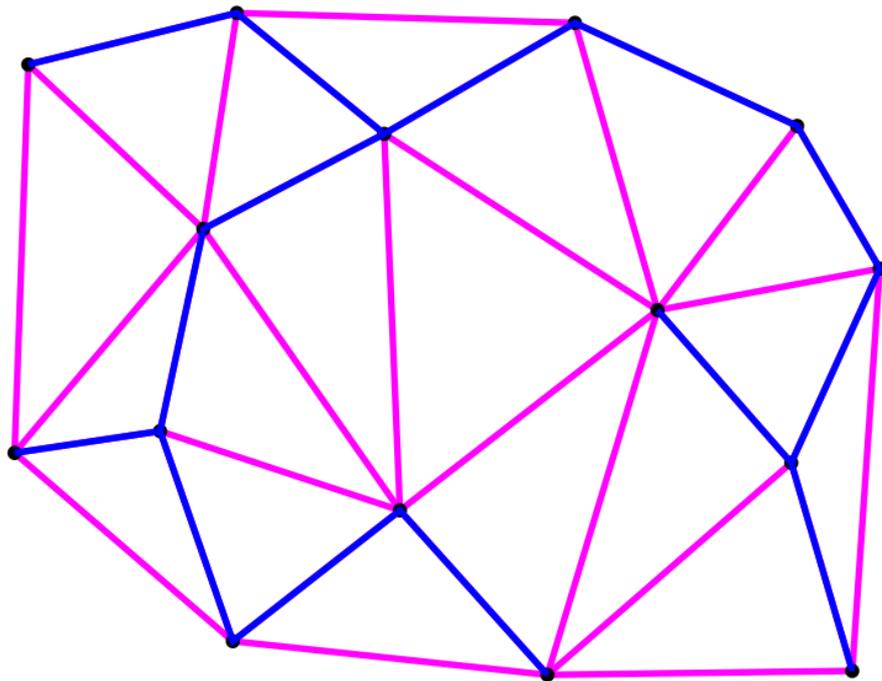
Applications “théoriques”

Arbre couvrant de longueur minimale



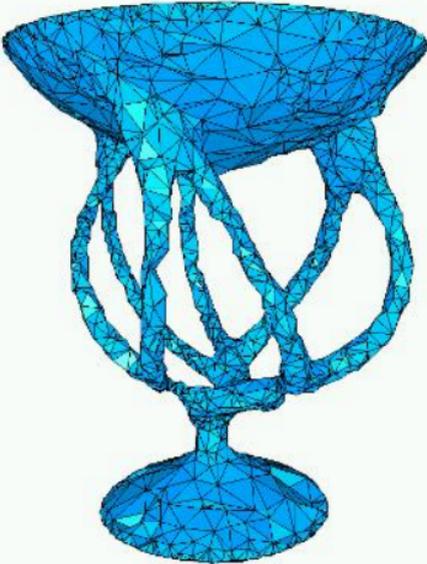
Applications "théoriques"

Arbre couvrant de longueur minimale



Applications

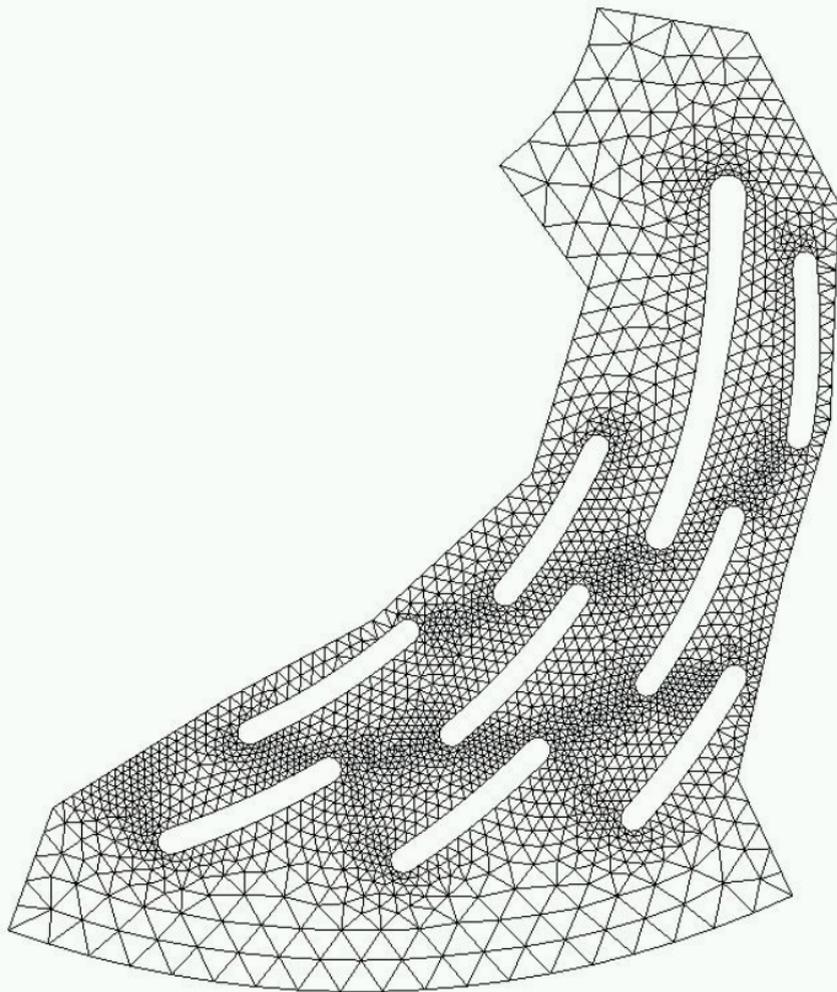
Reconstruction



Applications

Reconstruction

Maillage



Applications

Reconstruction

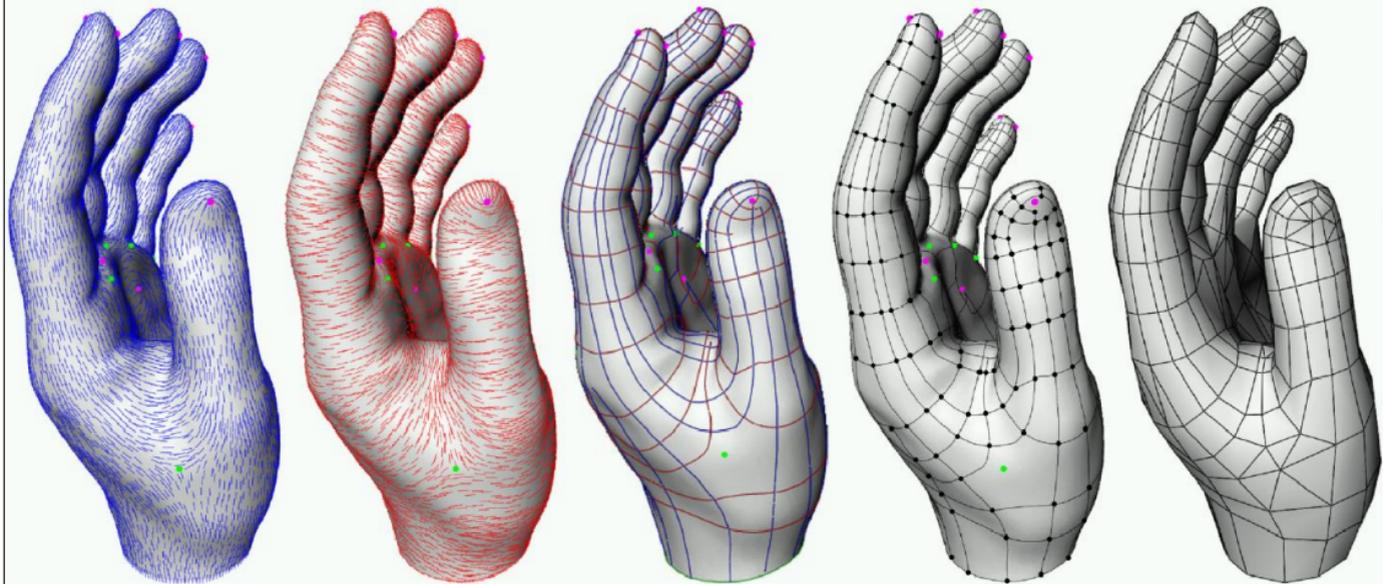
Maillage / Remaillage



Applications

Reconstruction

Maillage / Remaillage

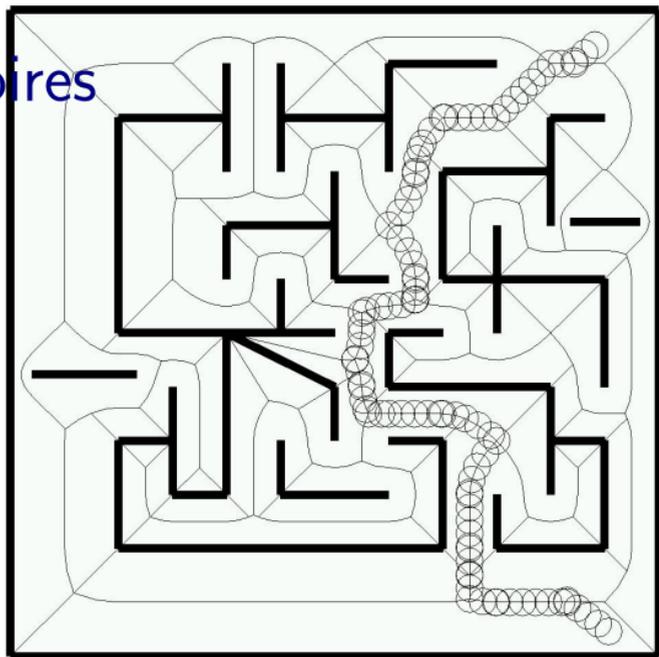


Applications

Reconstruction

Maillage / Remaillage

Planification de trajectoires





Propriétés de
la triangulation de Delaunay

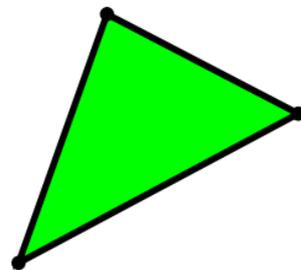
Relation d'Euler

c : nombre de cellules (sauf ∞)

a : nombre d'arêtes

s : nombre de sommets

$$c - a + s = 1$$



Relation d'Euler

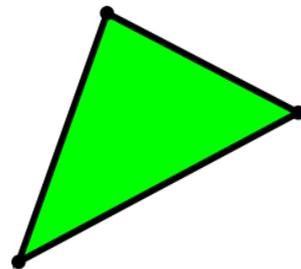
c : nombre de cellules (sauf ∞)

a : nombre d'arêtes

s : nombre de sommets

$$c - a + s = 1$$

$$1 - 3 + 3 = 1$$



Relation d'Euler

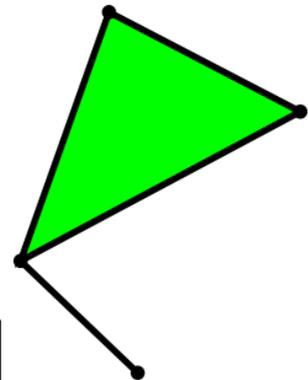
c : nombre de cellules (sauf ∞)

a : nombre d'arêtes

s : nombre de sommets

$$c - a + s = 1$$

$$0 - 1 + 1 = 0$$



Relation d'Euler

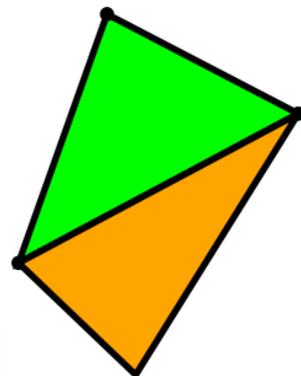
c : nombre de cellules (sauf ∞)

a : nombre d'arêtes

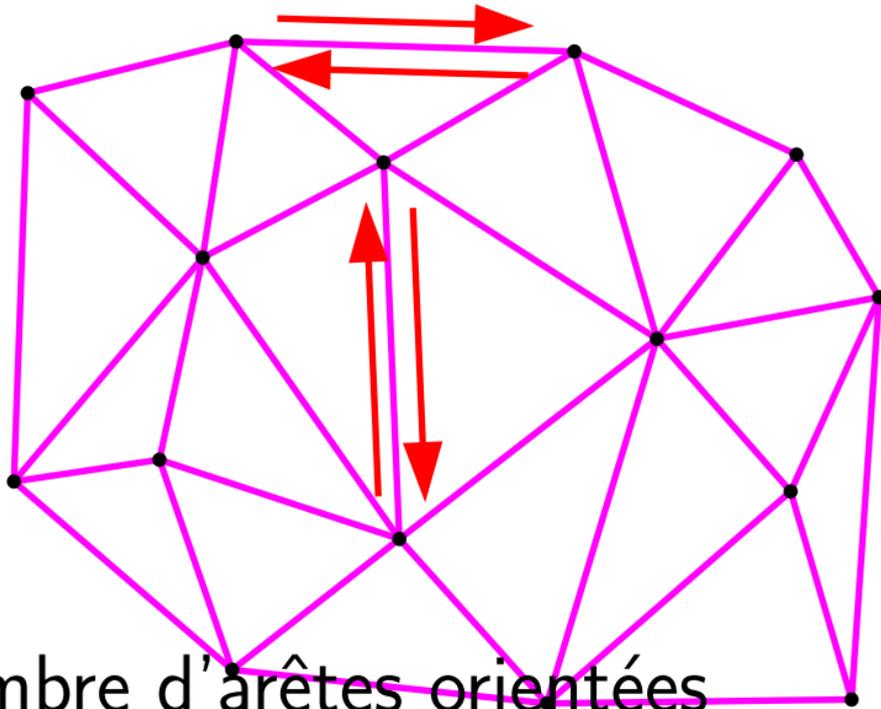
s : nombre de sommets

$$c - a + s = 1$$

$$1 - 1 + 0 = 0$$



k : taille cellule ∞



Nombre d'arêtes orientées
dans une triangulation

$$2a = 3c + k$$

Relation d'Euler

$$c - a + s = 1$$

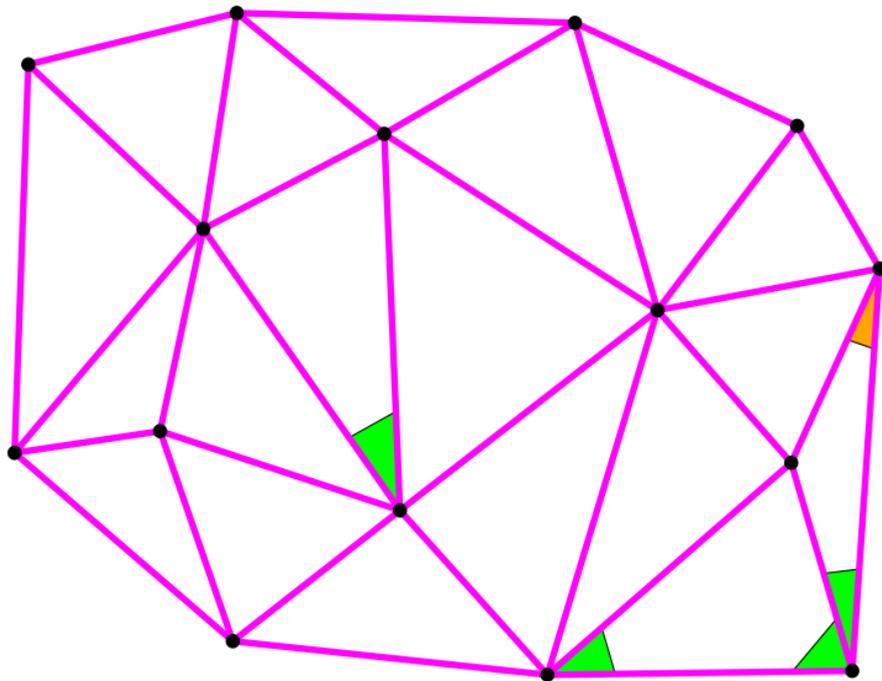
Triangulation

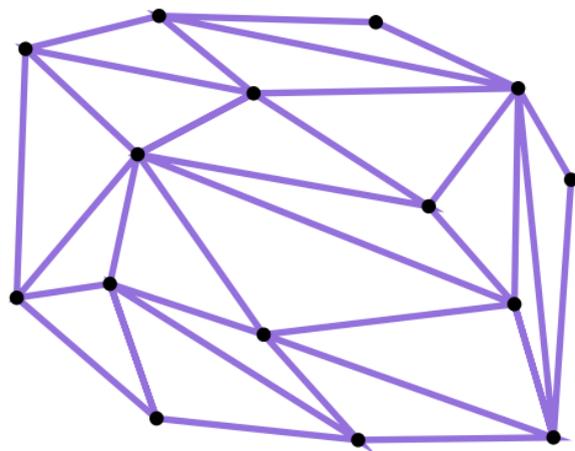
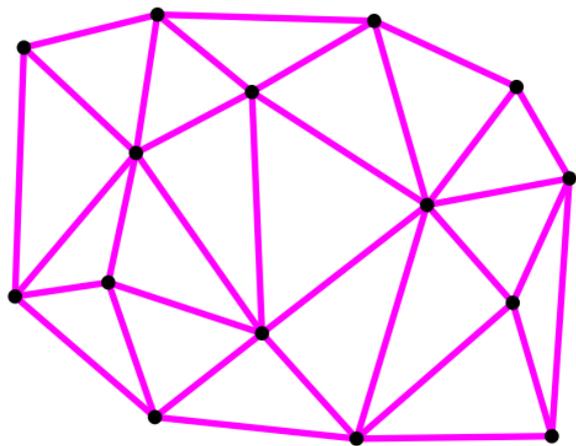
$$2a = 3c + k$$

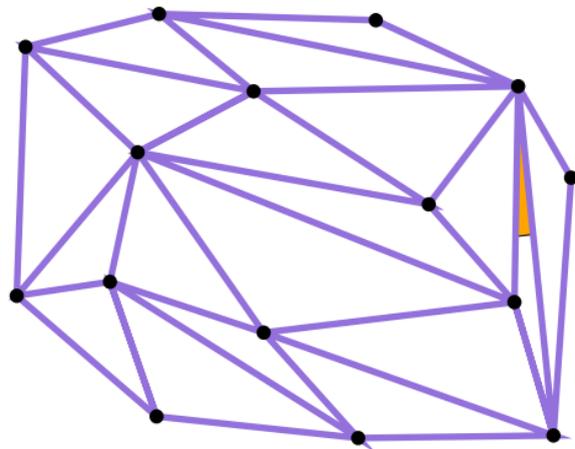
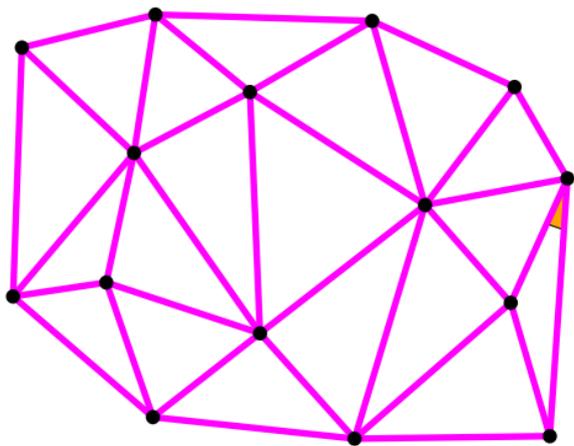
$$c = 2s - 2 - k$$

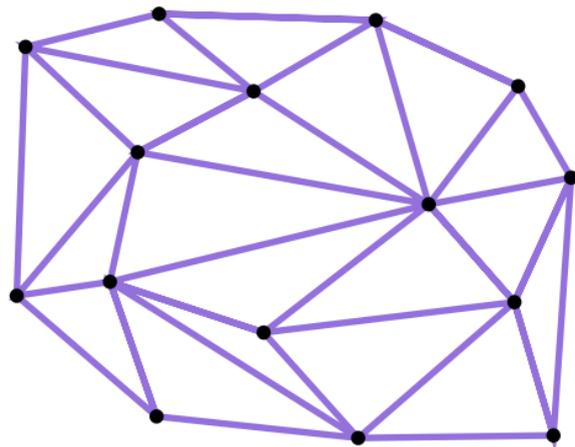
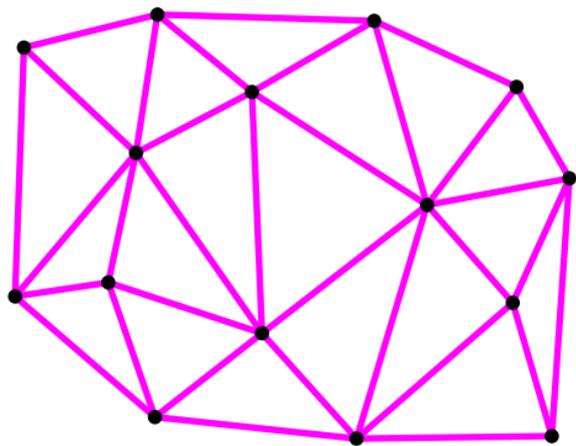
$$a = 3s - 3 - k$$

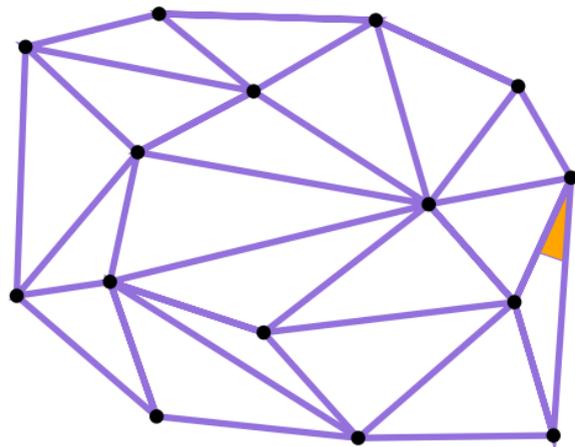
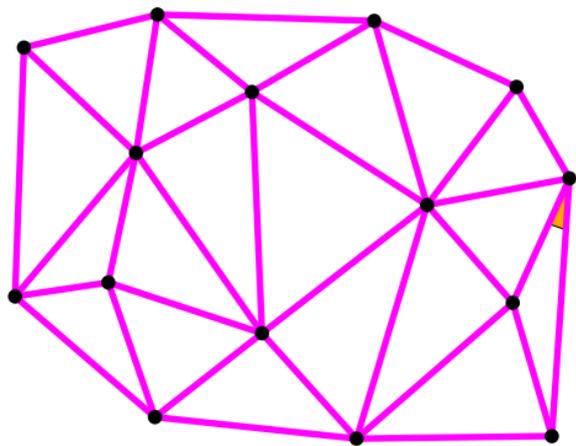
Propriété : le plus petit angle est maximal

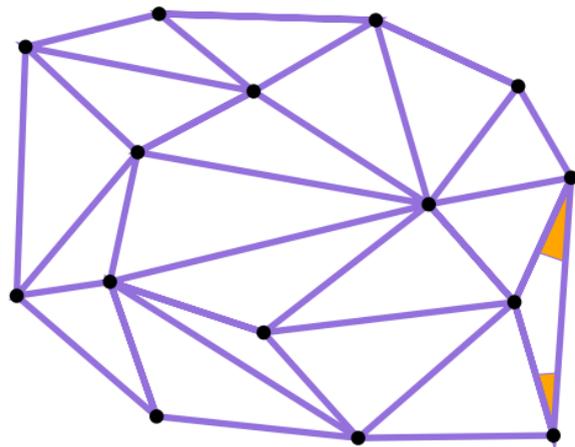
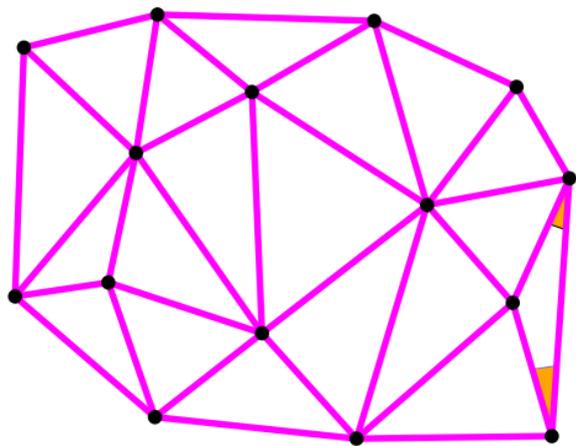


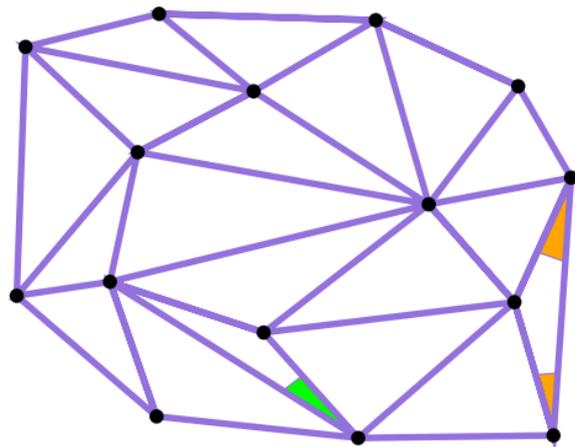
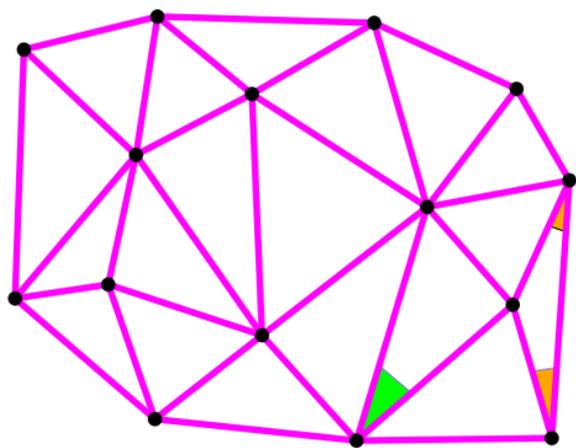






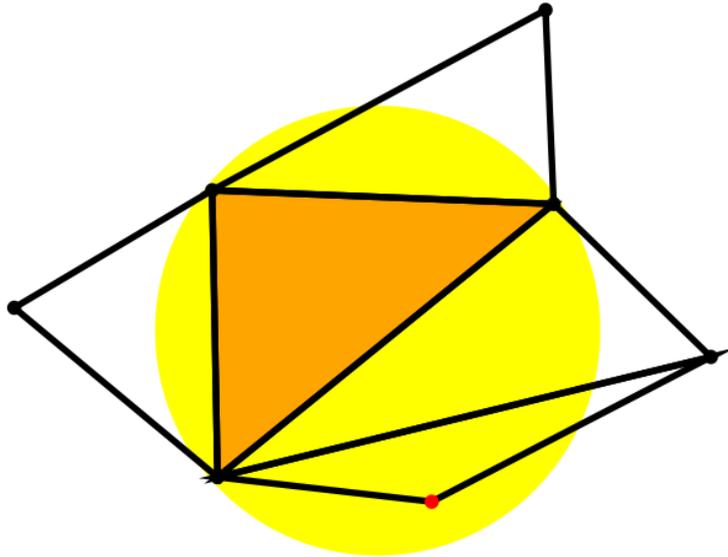






Maximise dans l'ordre lexicographique

Optimalité locale vs globale



localement
Delaunay

mais pas globalement
Delaunay

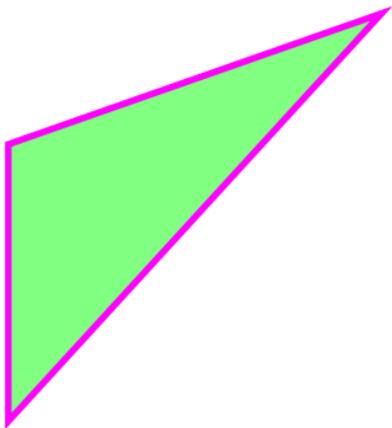
Théorème

Localement Delaunay partout



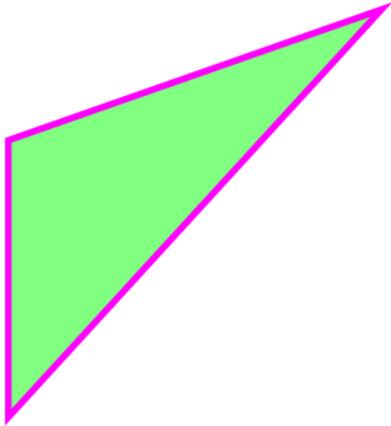
Globalement Delaunay

Démonstration:



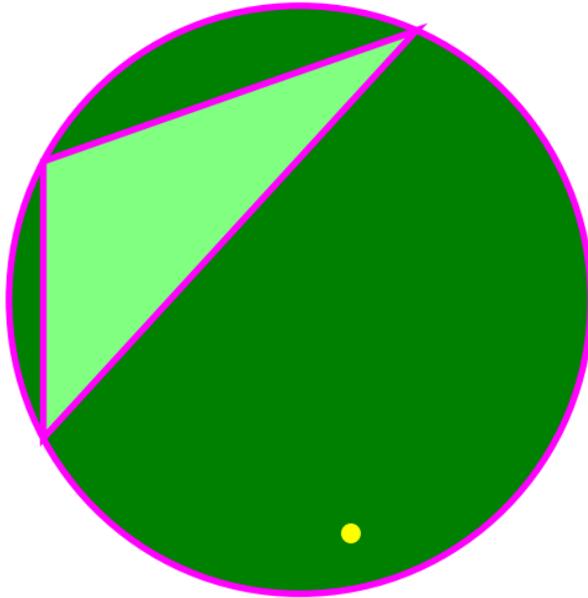
Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



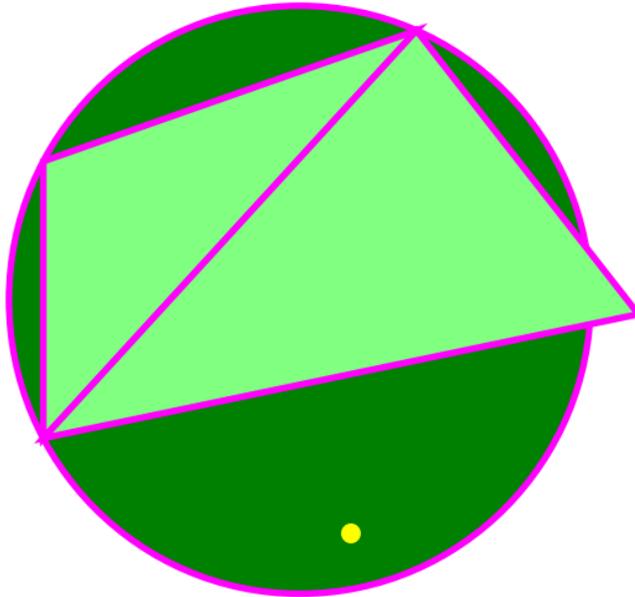
Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



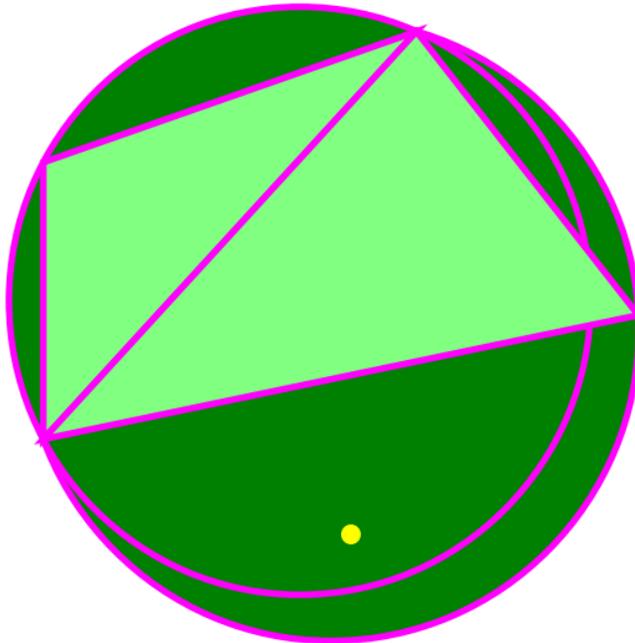
Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



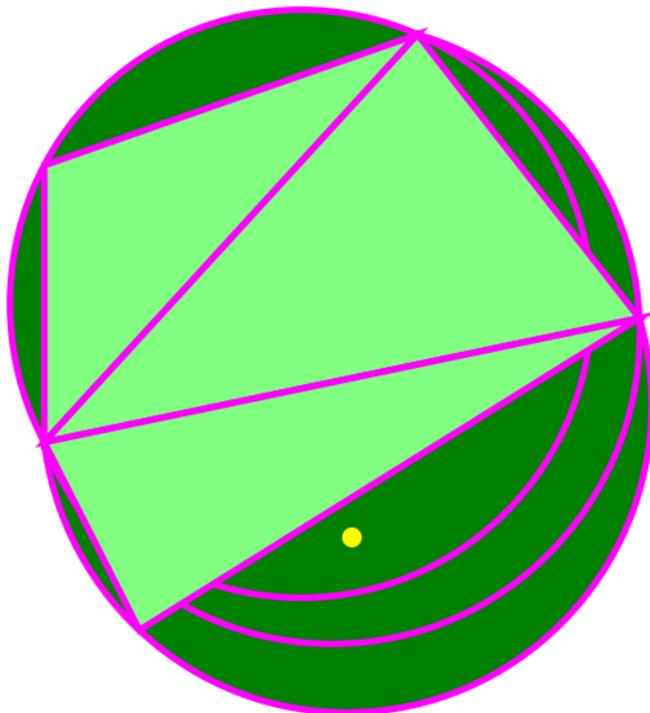
Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



Comme le nombre de points est fini

Optimalité locale et plus petit angle

Cas de 4 points

Optimalité locale et plus petit angle

Cas de 4 points

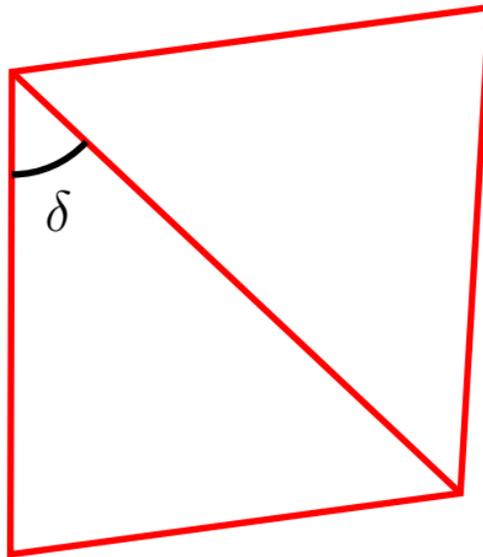
Lemme:

Pour 4 points en position convexe

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Optimalité locale et plus petit angle

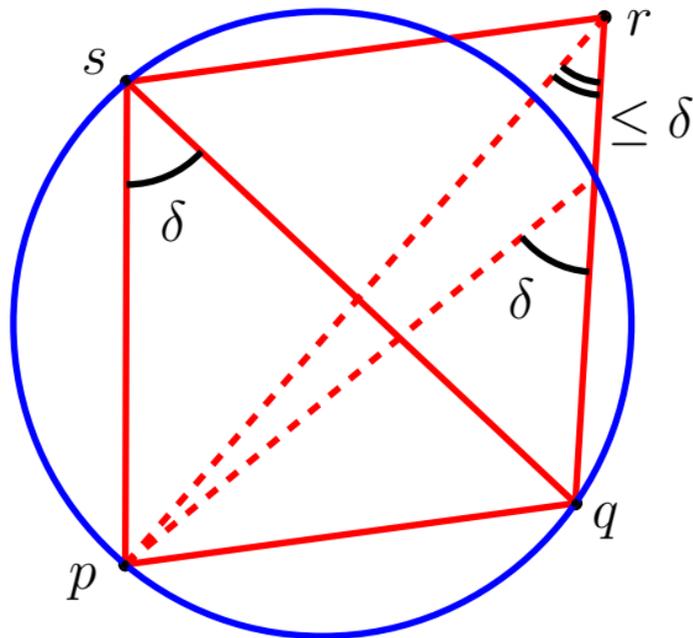
Cas de 4 points



δ le plus petit angle

Optimalité locale et plus petit angle

Cas de 4 points



Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Démonstration:

Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Démonstration:

Triangulation max pour ordre des angles

Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Démonstration:

Triangulation max pour ordre des angles

\implies Max dans chaque quadrilatère

Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Démonstration:

Triangulation max pour ordre des angles

\implies Max dans chaque quadrilatère

\implies localement Delaunay

Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

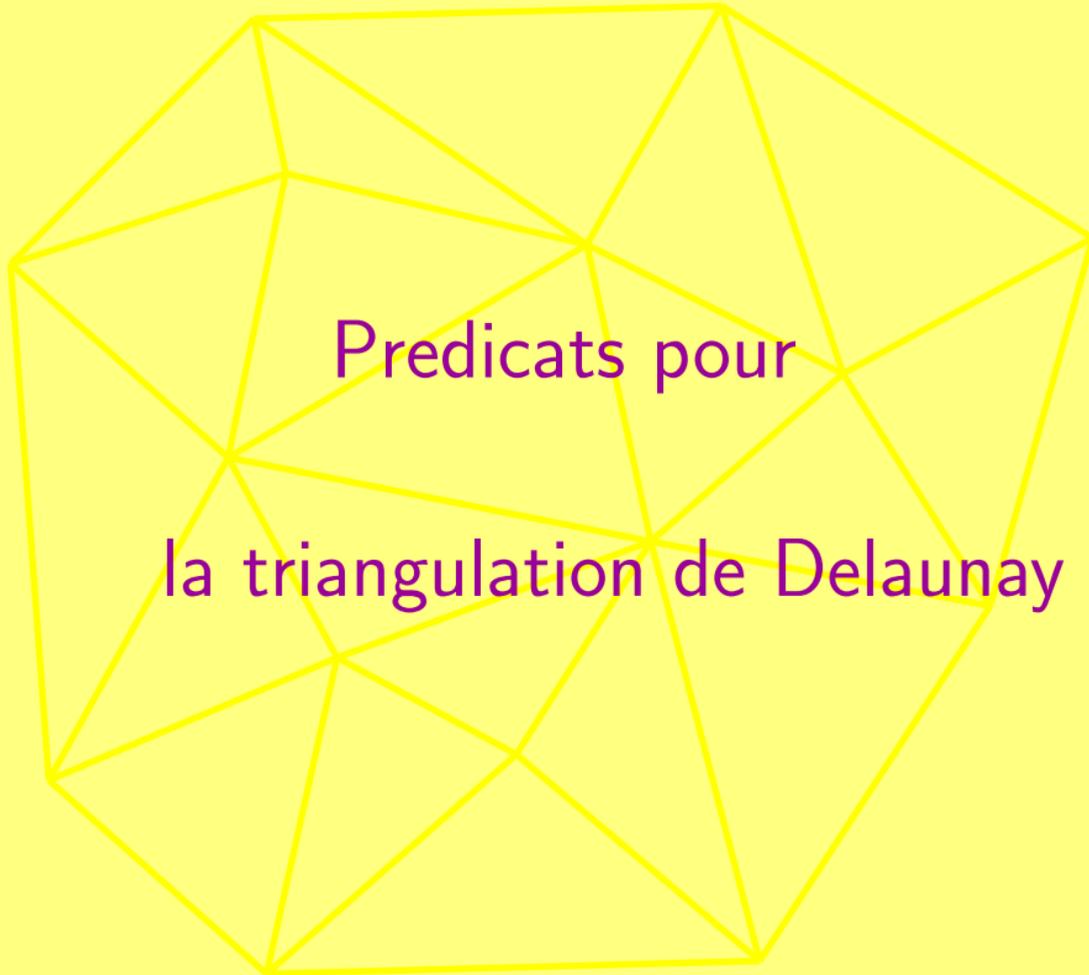
Démonstration:

Triangulation max pour ordre des angles

\implies Max dans chaque quadrilatère

\implies localement Delaunay

\implies globalement Delaunay



Predicats pour

la triangulation de Delaunay

Prédicats

Algorithmes géométriques

Prendre des décisions

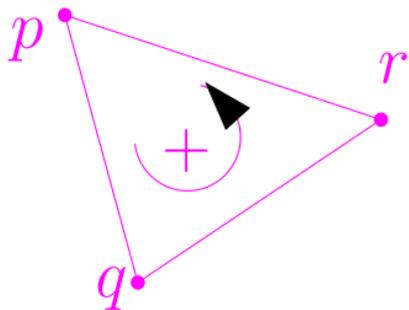
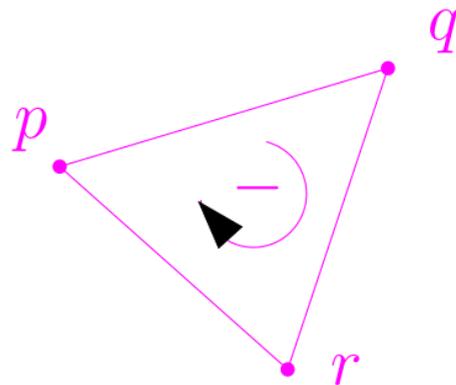
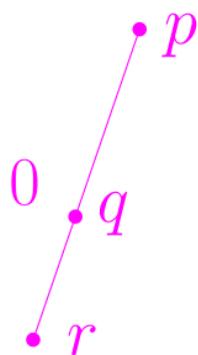
repose sur des prédicats géométriques

Entrée de taille constante

Sortie discrète (signe)

Prédicats

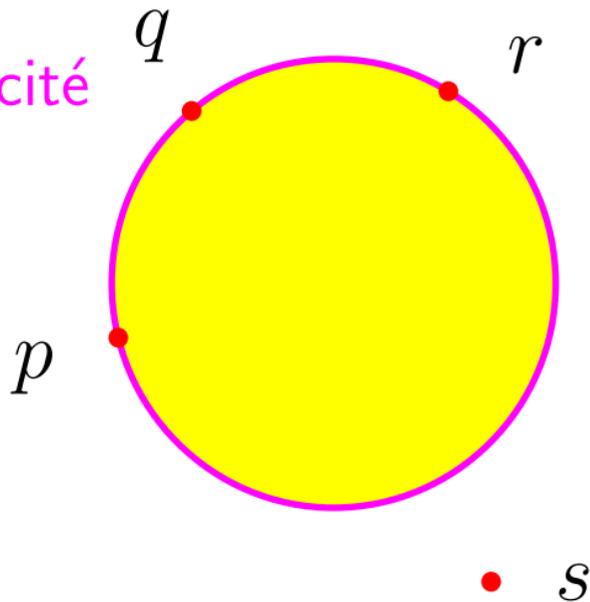
Prédicat d'orientation



$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

Prédicats

Prédicat de cocyclicité



$$\left| \begin{array}{ccc} x_q - x_p & x_r - x_p & x_s - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & y_s - y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 & (x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2 \end{array} \right|$$

$$0 = \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p & x - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & y - y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 & (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \end{vmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p & x - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & y - y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 & (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p & x - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & y - y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 & (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} (x^2 + y^2) \\
&+ \begin{vmatrix} y_q - y_p & y_r - y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} 2x_p x \\
&- \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} 2y_p y \\
&+ \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p & -x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & -y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 & x_p^2 + y_p^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p & x - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & y - y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 & (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} (x^2 + y^2) \\
&+ \begin{vmatrix} y_q - y_p & y_r - y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x - x_p & x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & y - y_p \end{vmatrix} 2x_p x \\
&- \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y - y_p & x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & y - y_p \end{vmatrix} 2y_p y \\
&+ \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p & -x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & -y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 & x_p^2 + y_p^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Equation d'un Cercle

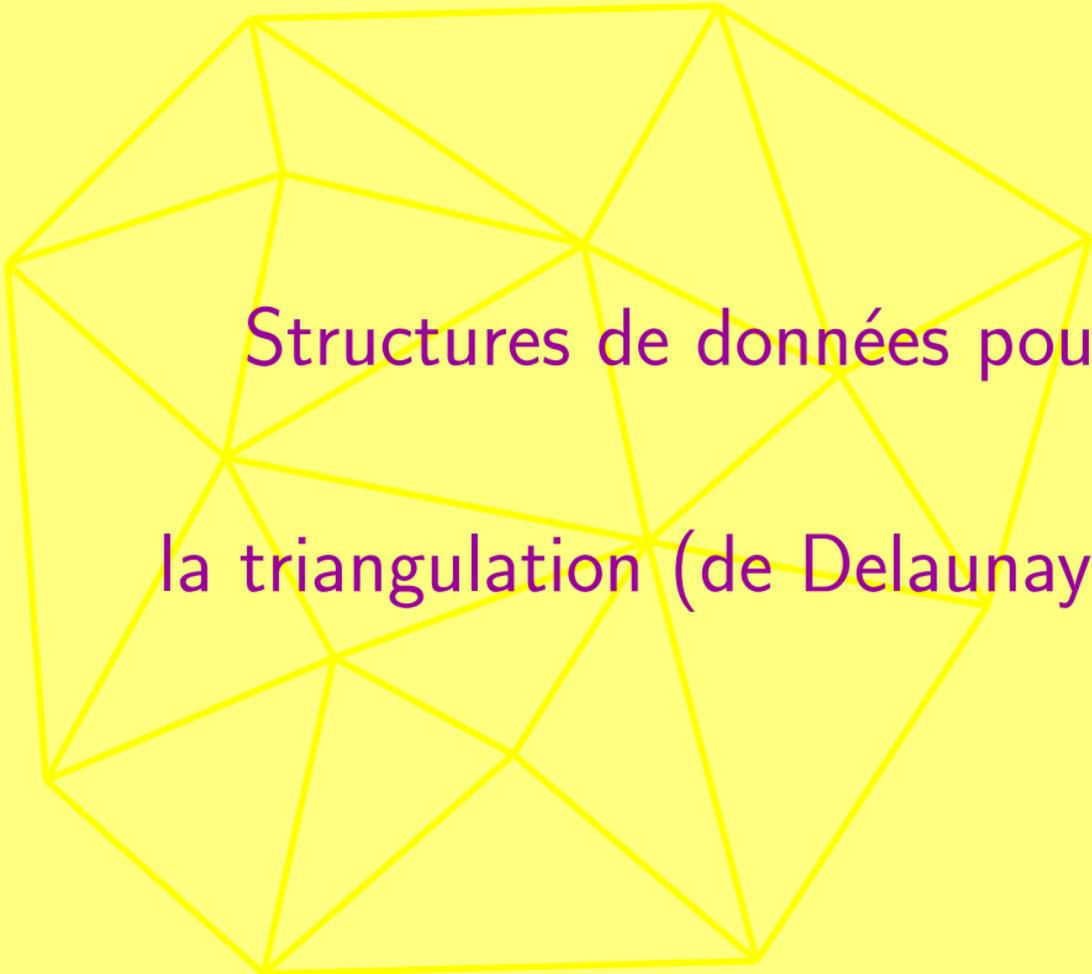
Prédicats

Problèmes de robustesse

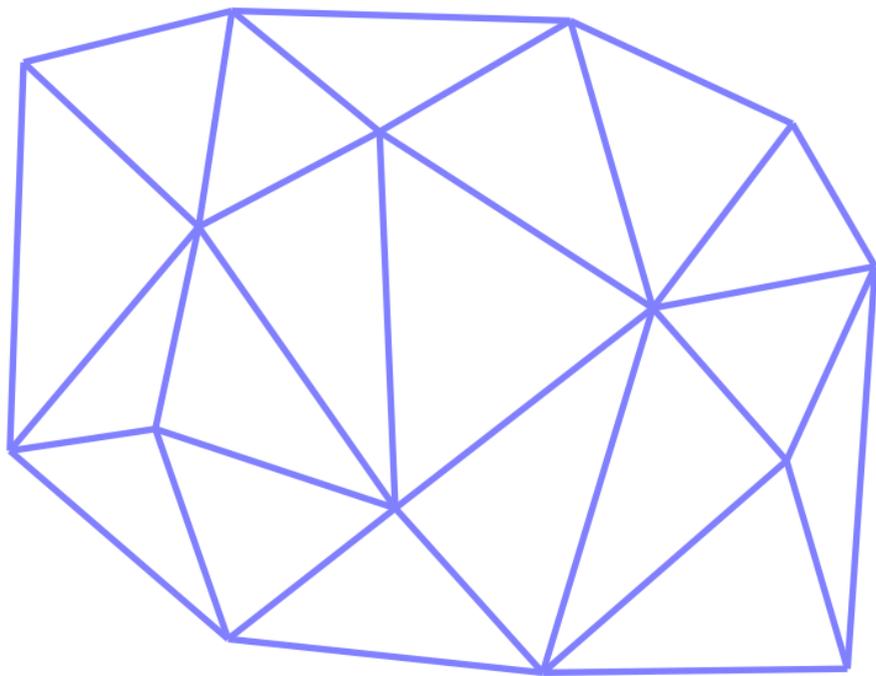
Arithmétique arrondie

—► Pas de cohérence entre les résultats arrondis

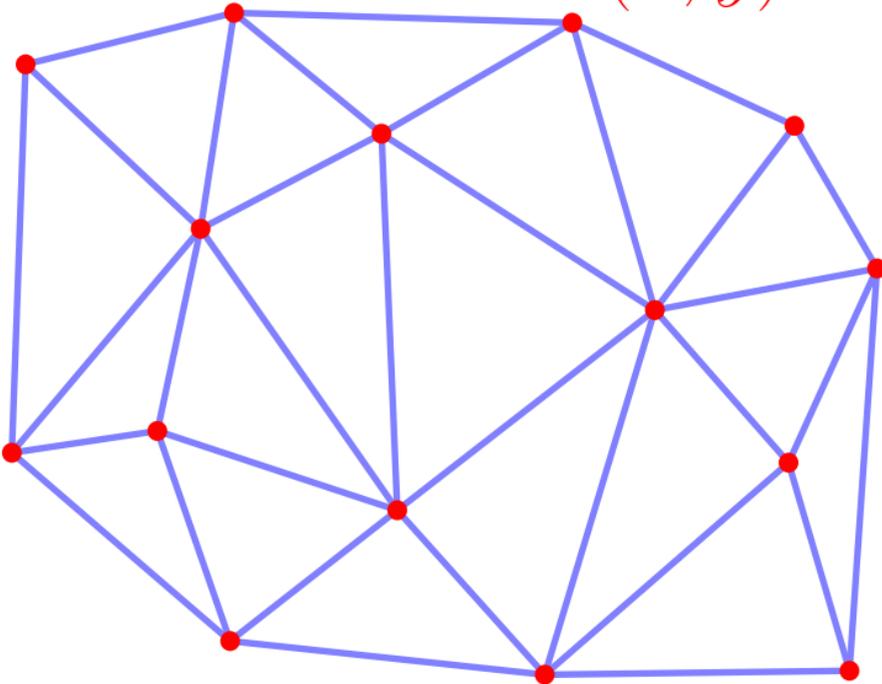
Paradigme du calcul exact



Structures de données pour
la triangulation (de Delaunay)

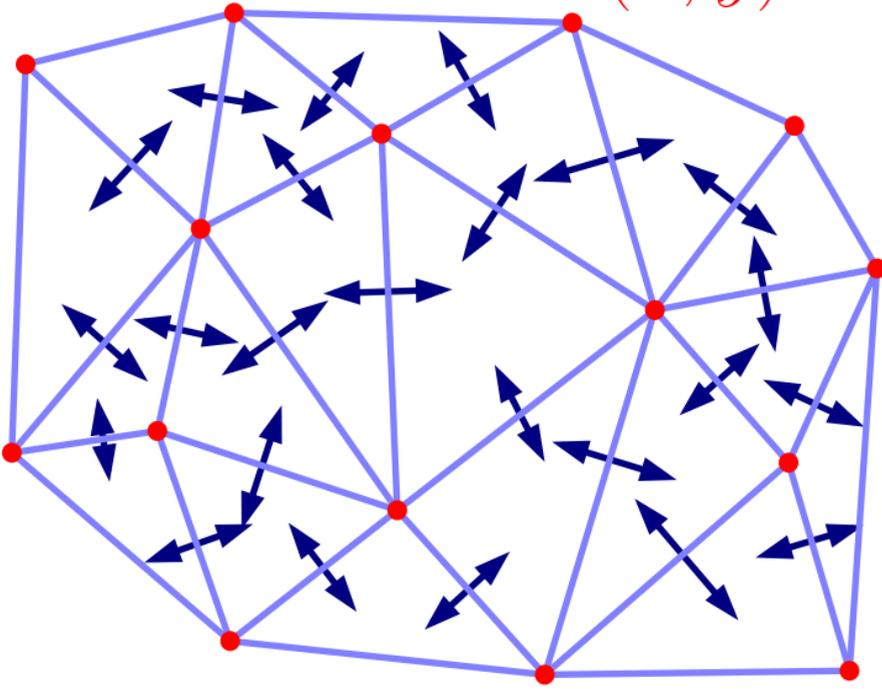


(x, y)



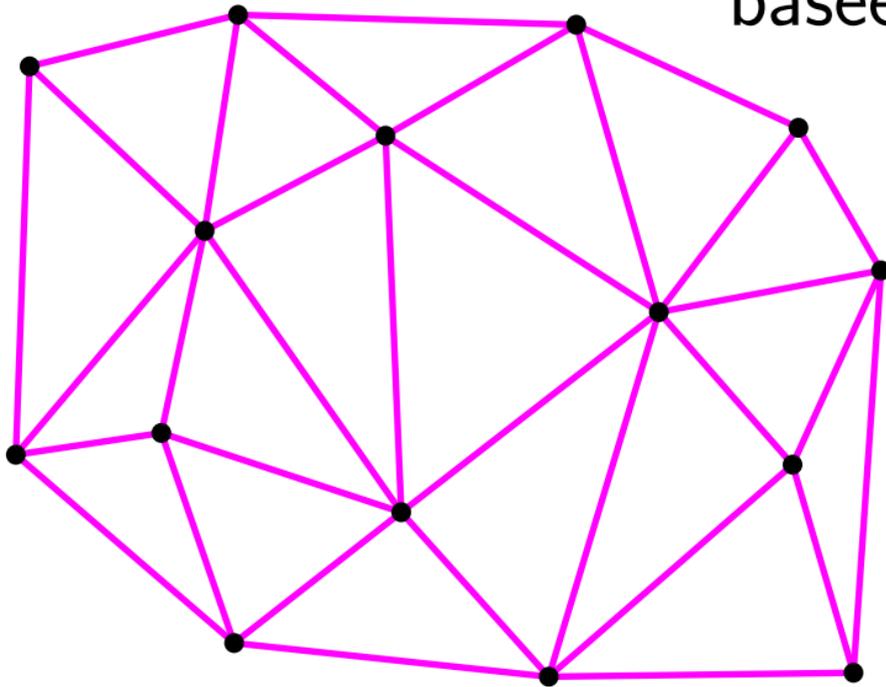
Géométrie

(x, y)

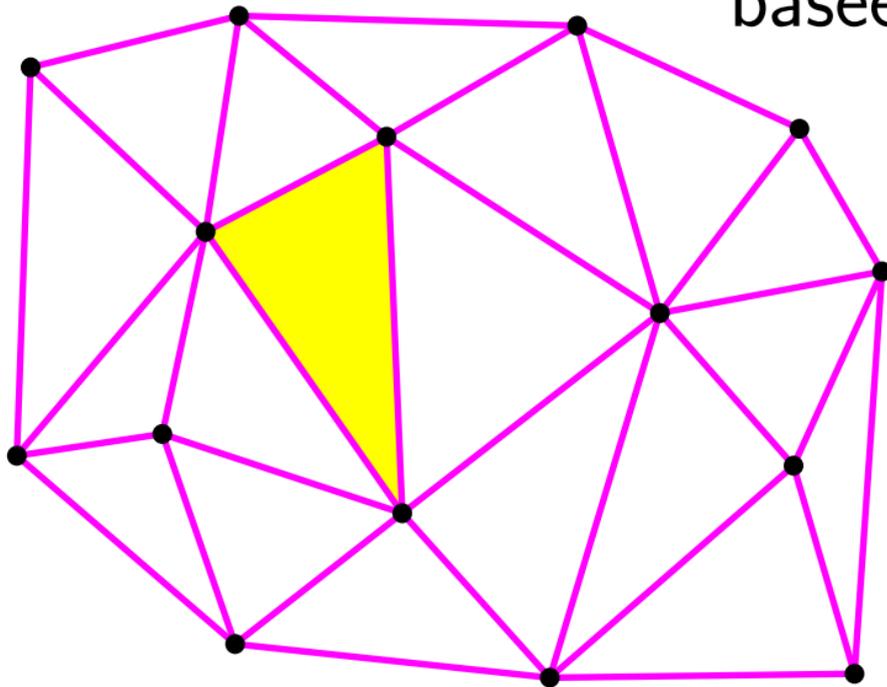


Géométrie
connectivité

Représentation basée triangles

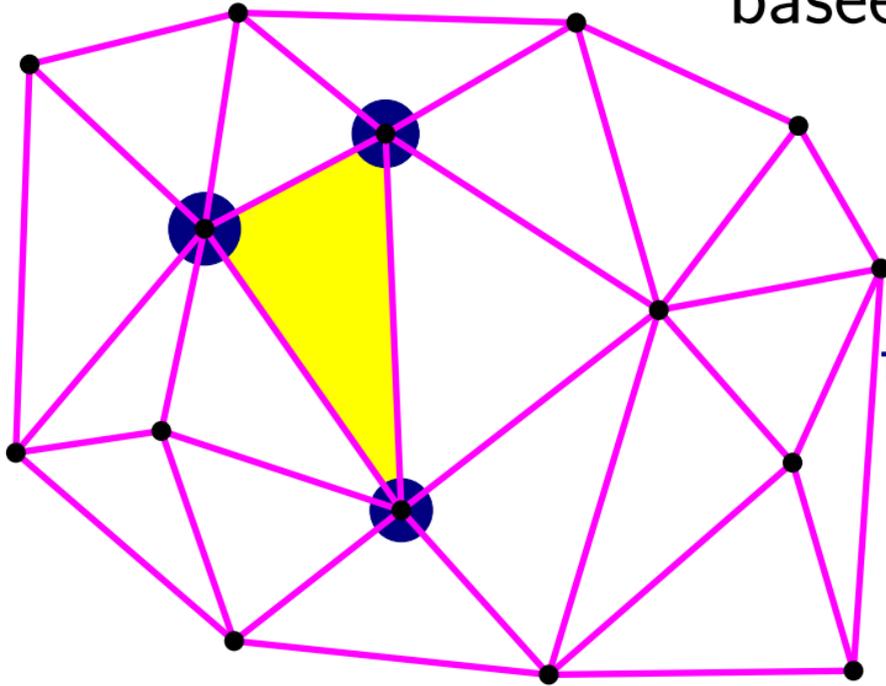


Représentation basée triangles



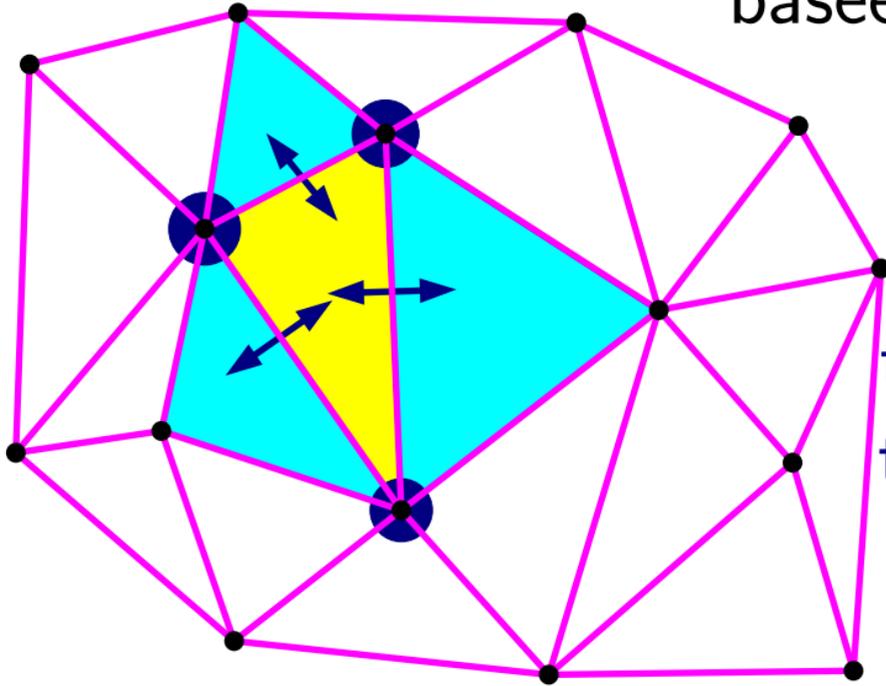
triangle :

Représentation basée triangles



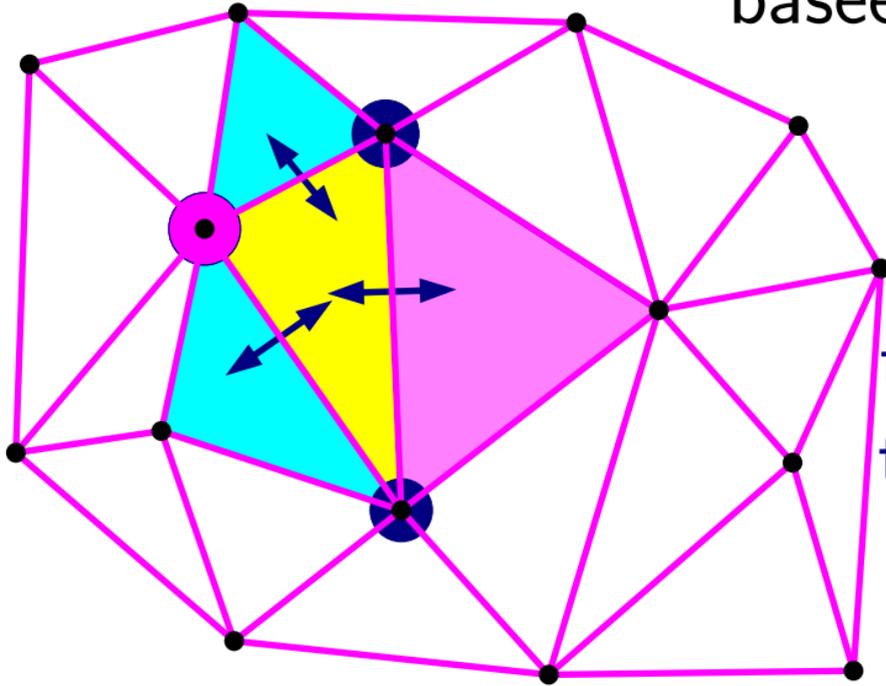
triangle :
trois sommets

Représentation basée triangles



triangle :
trois sommets
trois voisins

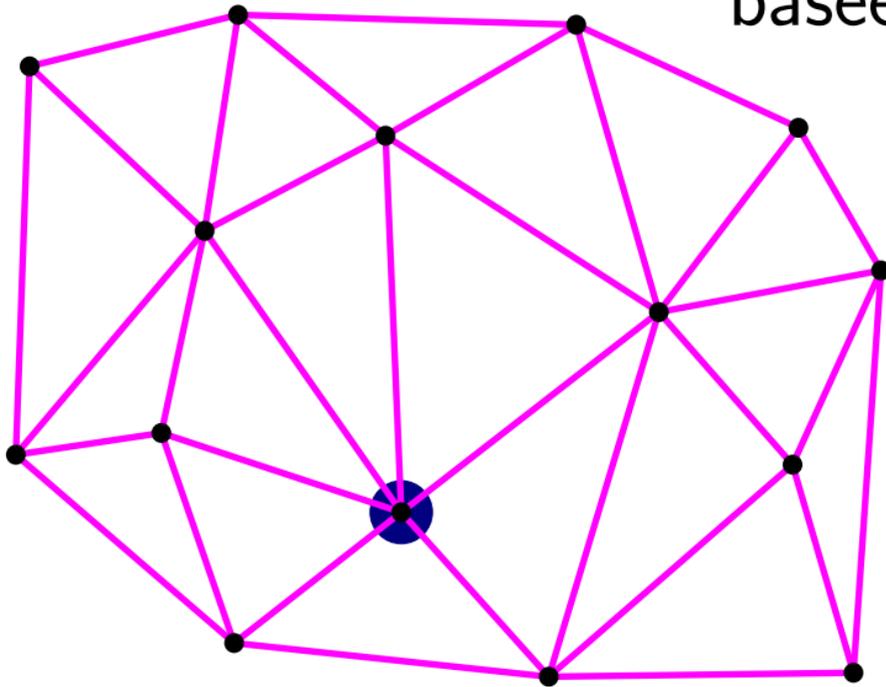
Représentation basée triangles



triangle :
trois sommets
trois voisins

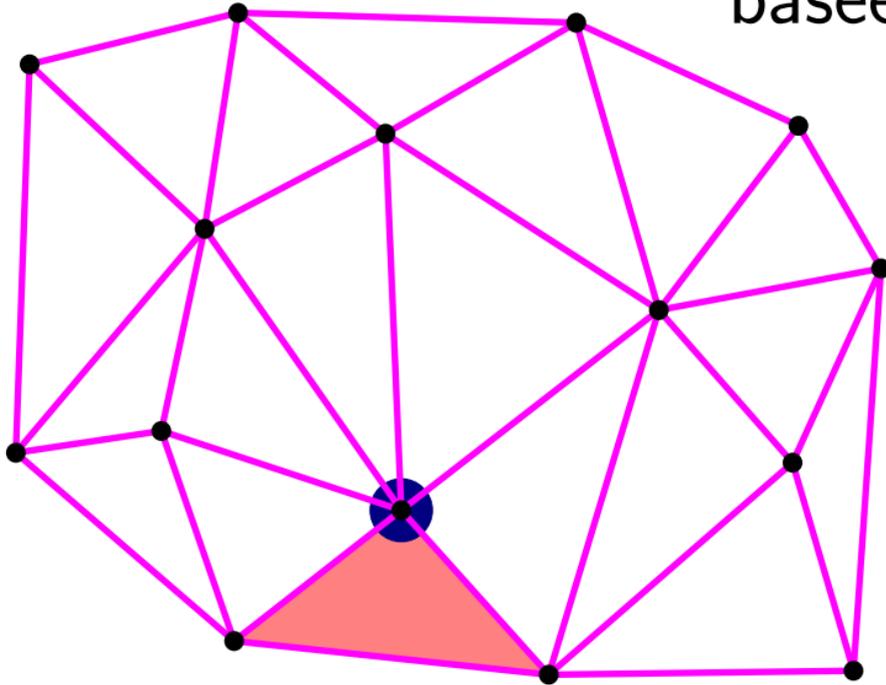
numérotation : voisin opposé au sommet

Représentation basée triangles



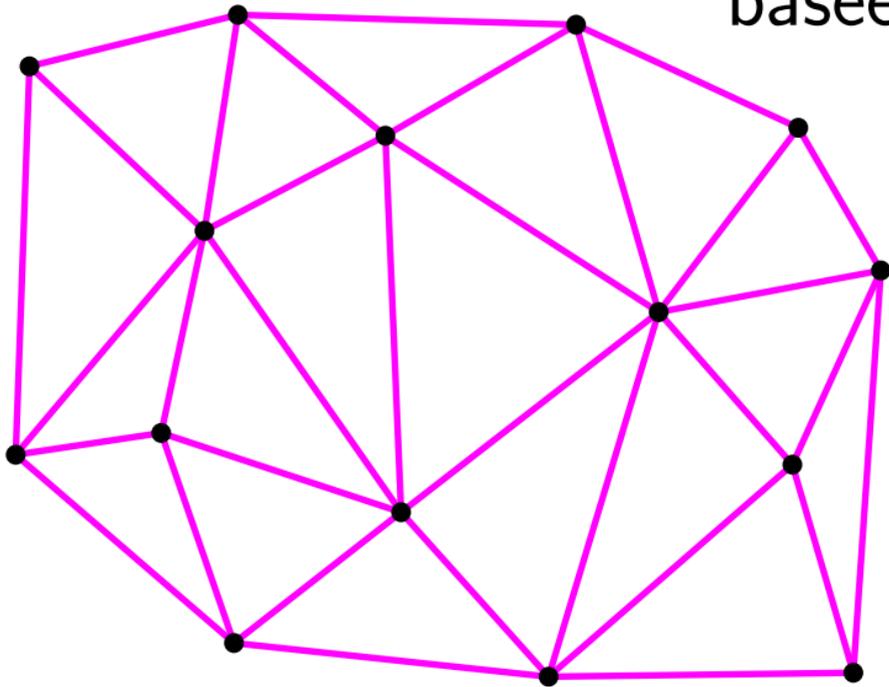
sommet :

Représentation basée triangles

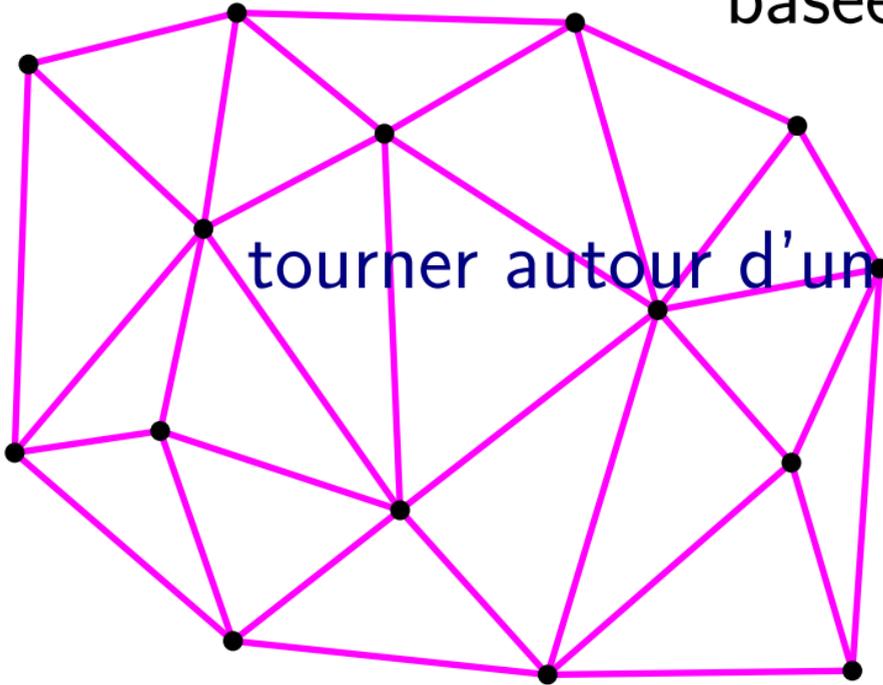


sommet :
 x, y
un triangle

Représentation basée triangles

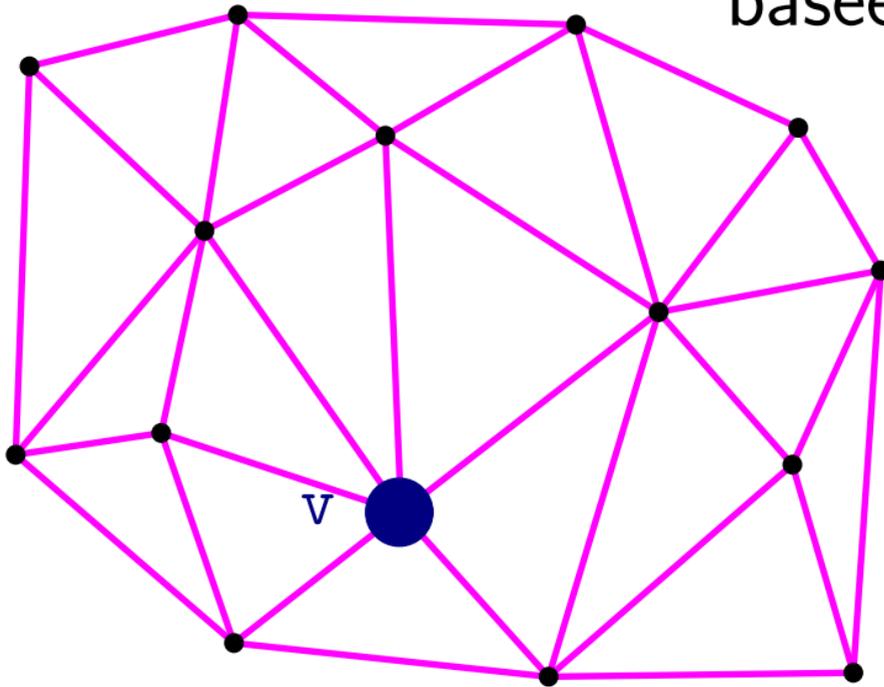


Représentation basée triangles

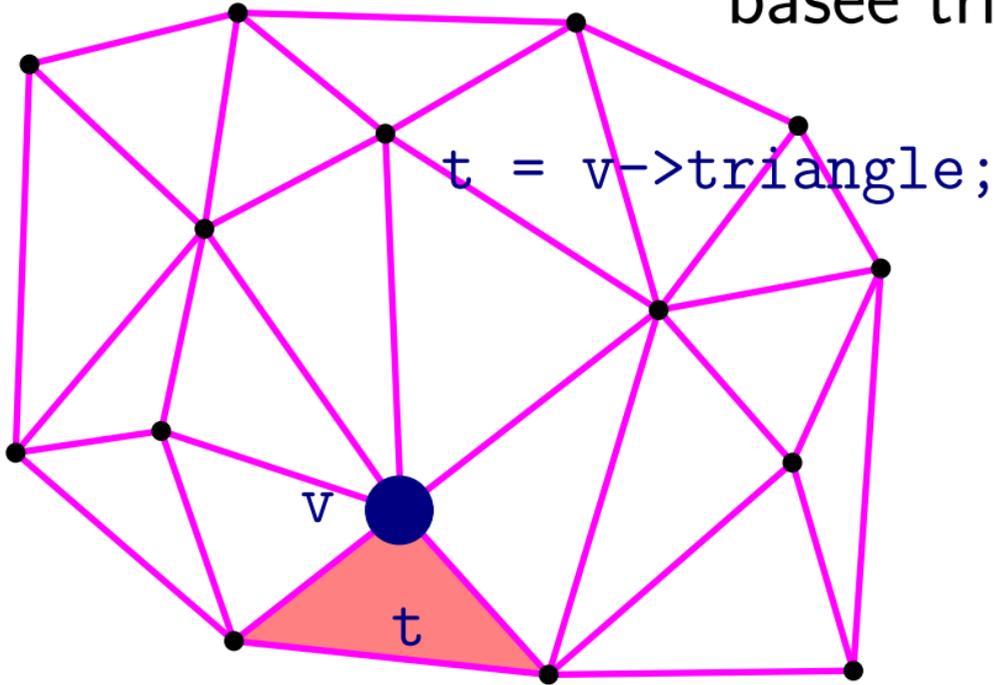


tourner autour d'un sommet

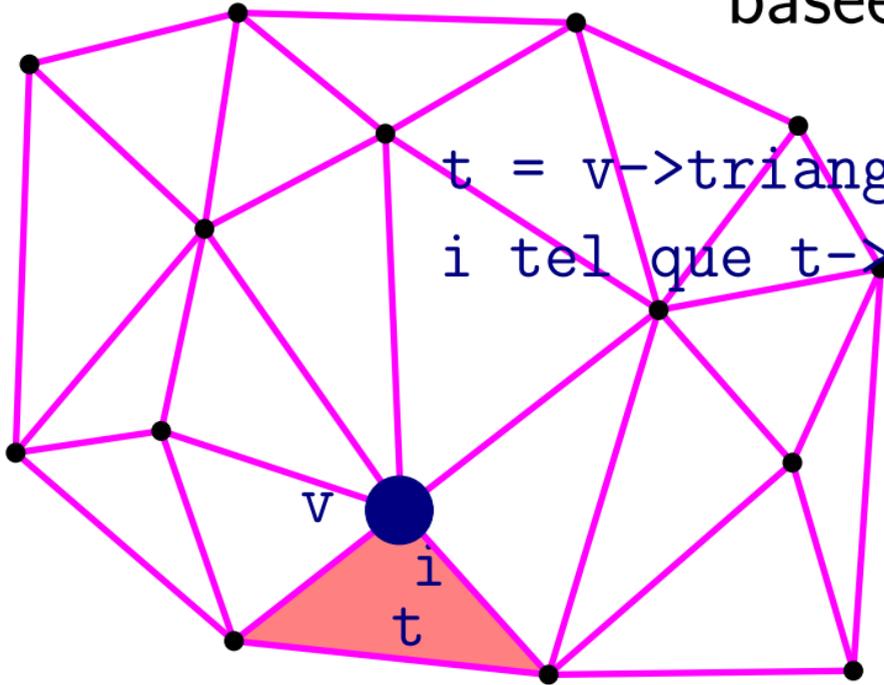
Représentation basée triangles



Représentation basée triangles

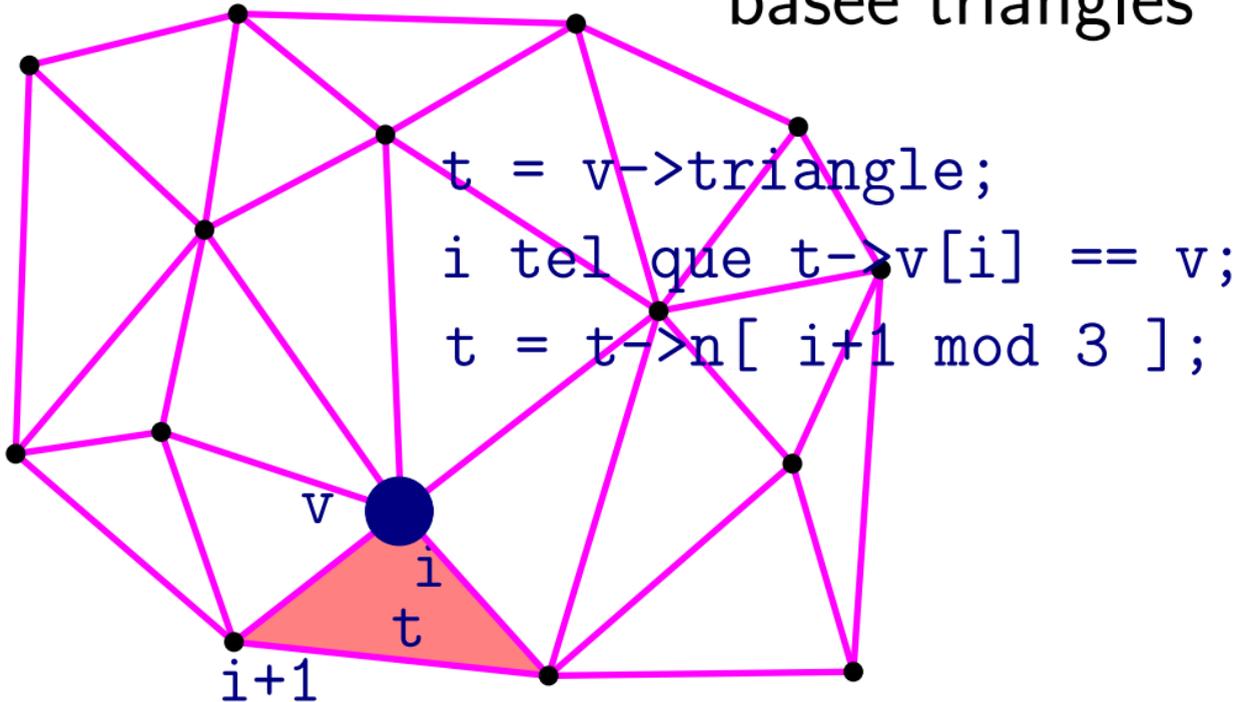


Représentation basée triangles

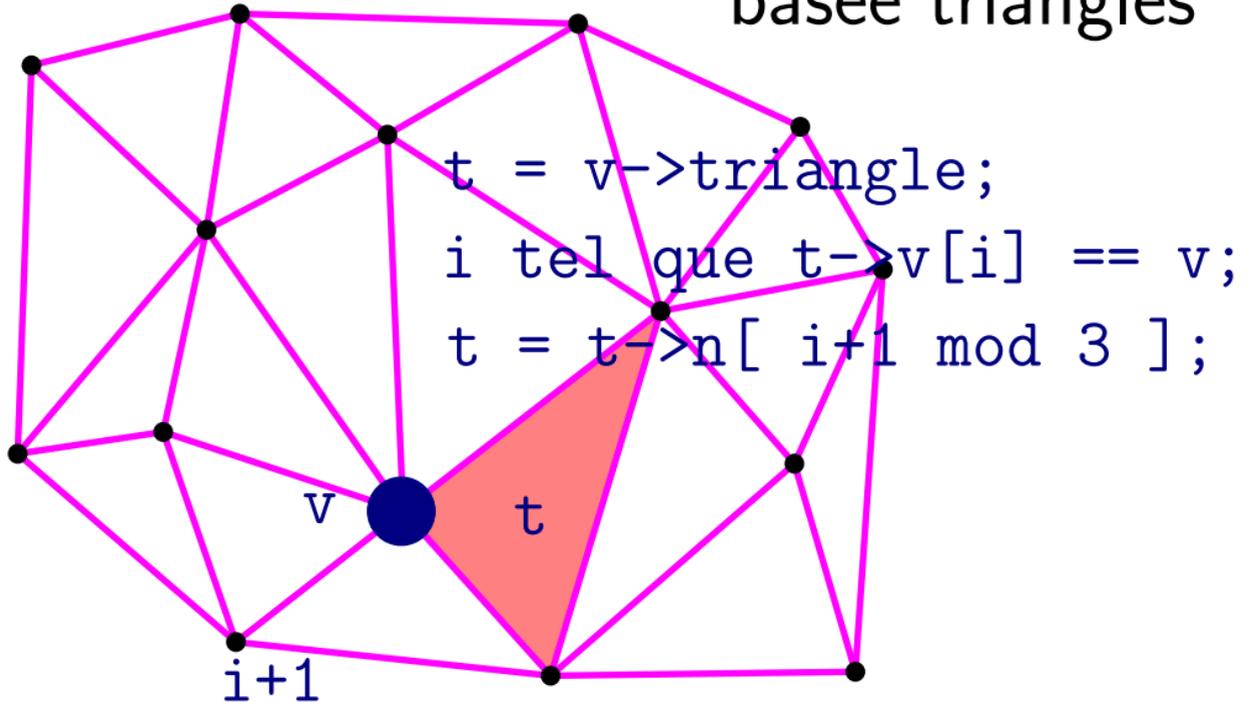


```
t = v->triangle;  
i tel que t->v[i] == v;
```

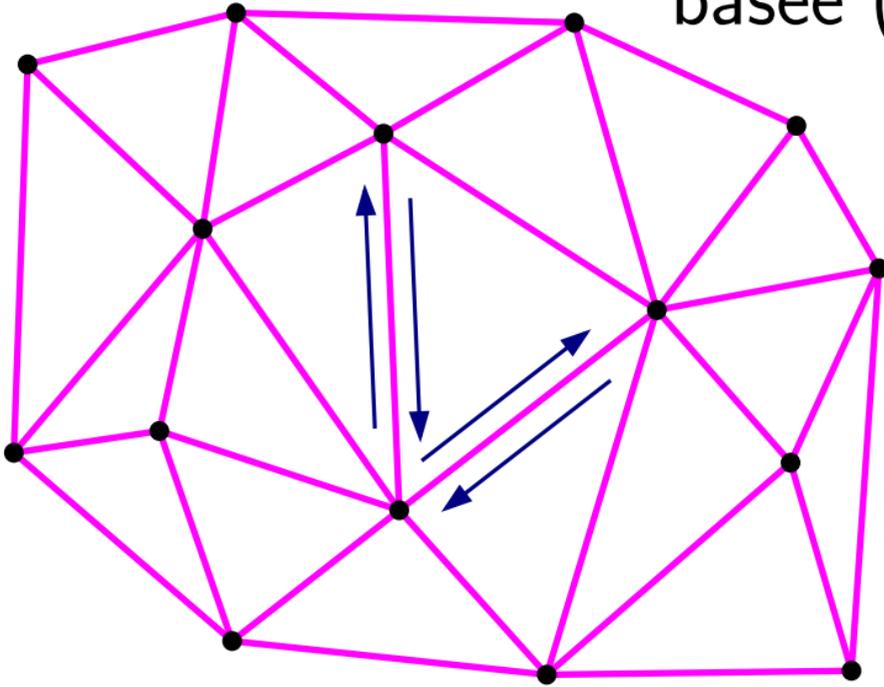
Représentation basée triangles



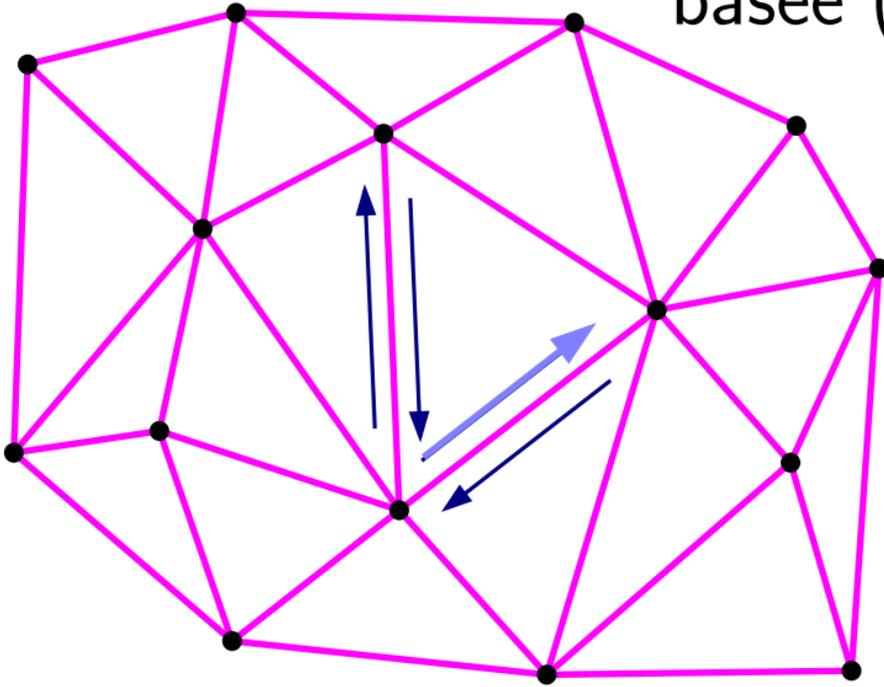
Représentation basée triangles



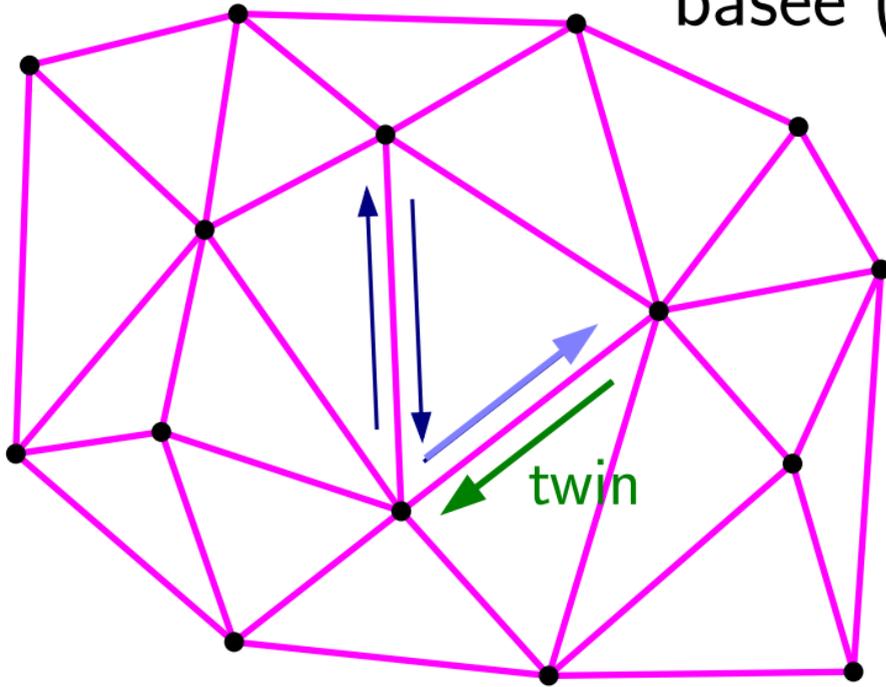
Représentation basée (demi) arêtes



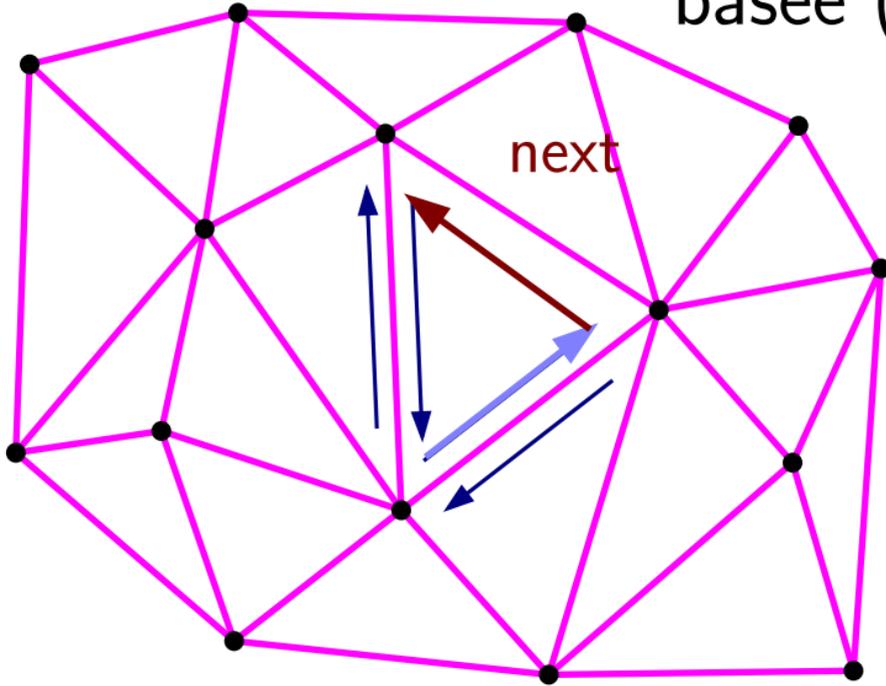
Représentation basée (demi) arêtes



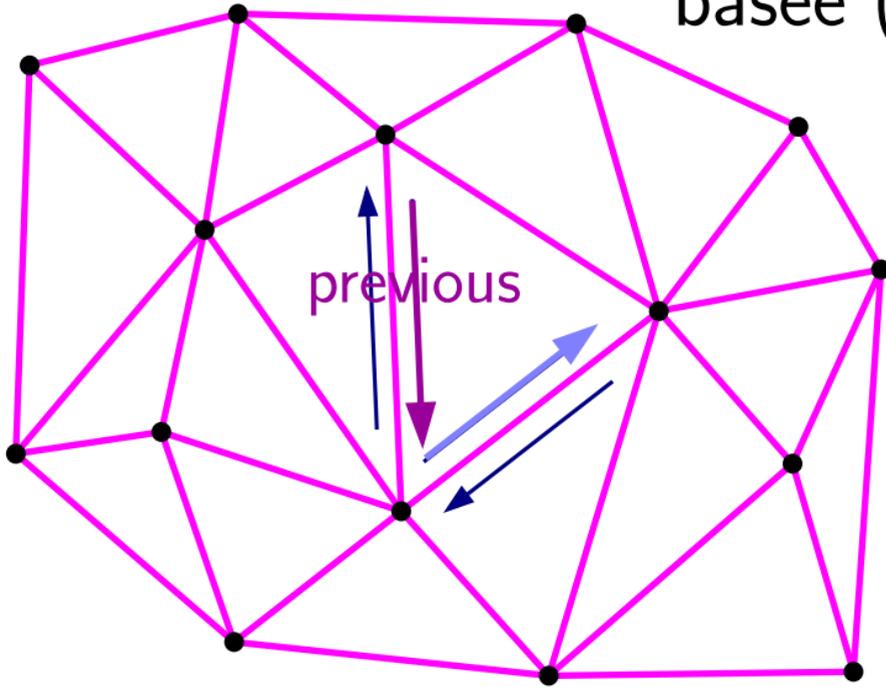
Représentation basée (demi) arêtes



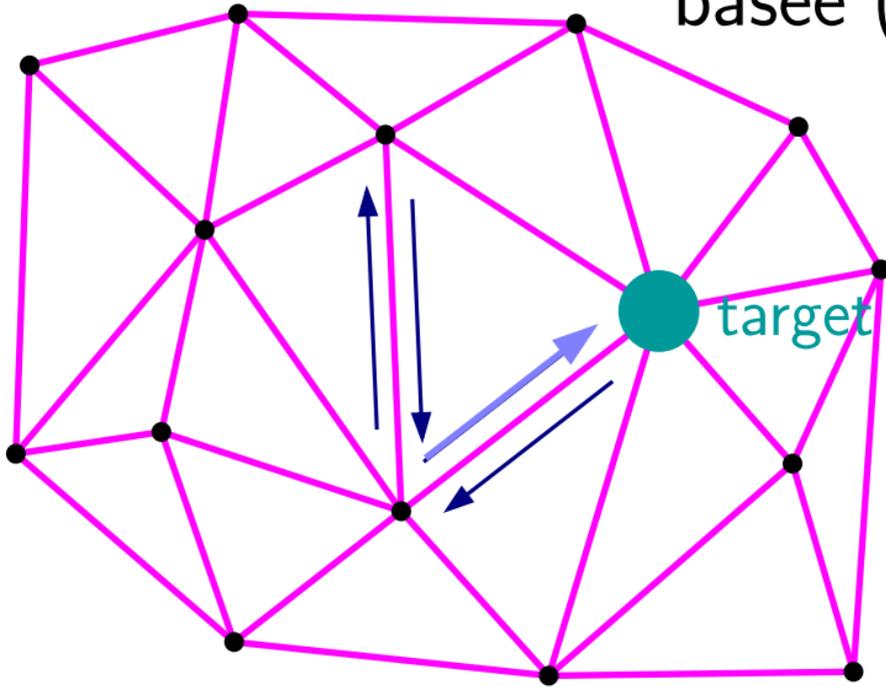
Représentation basée (demi) arêtes



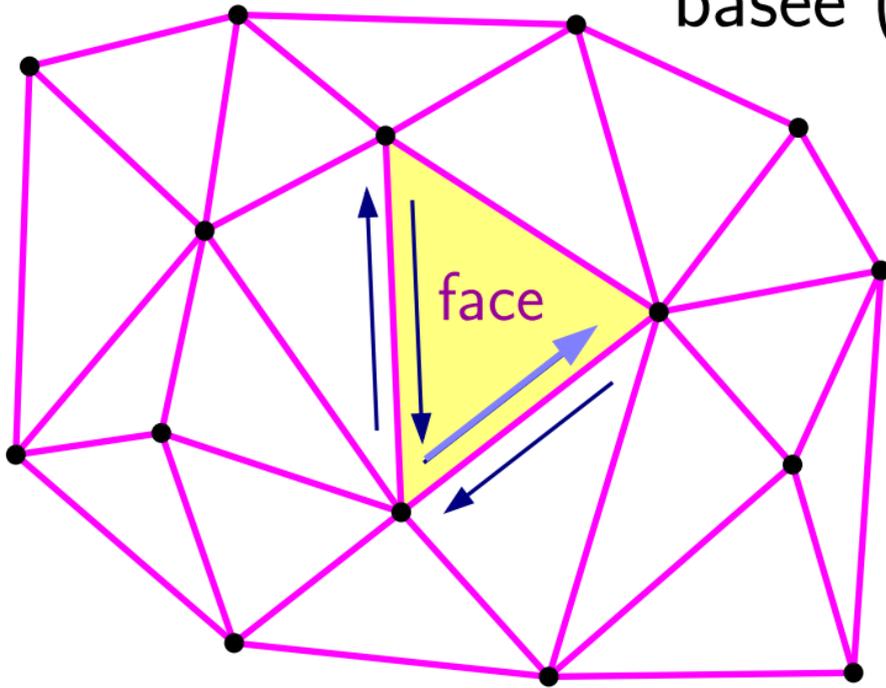
Représentation basée (demi) arêtes



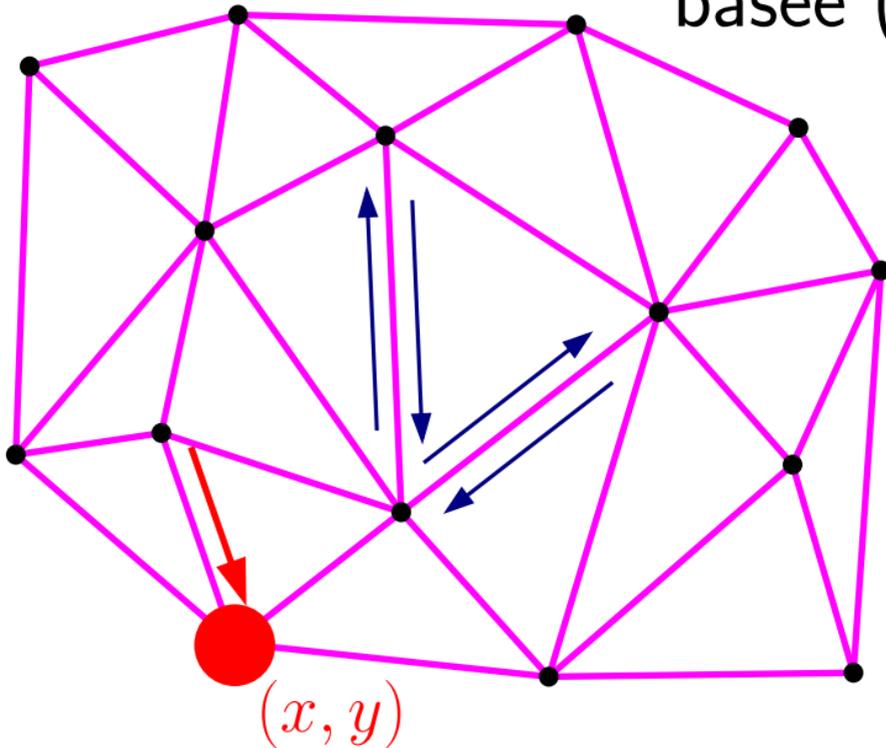
Représentation basée (demi) arêtes



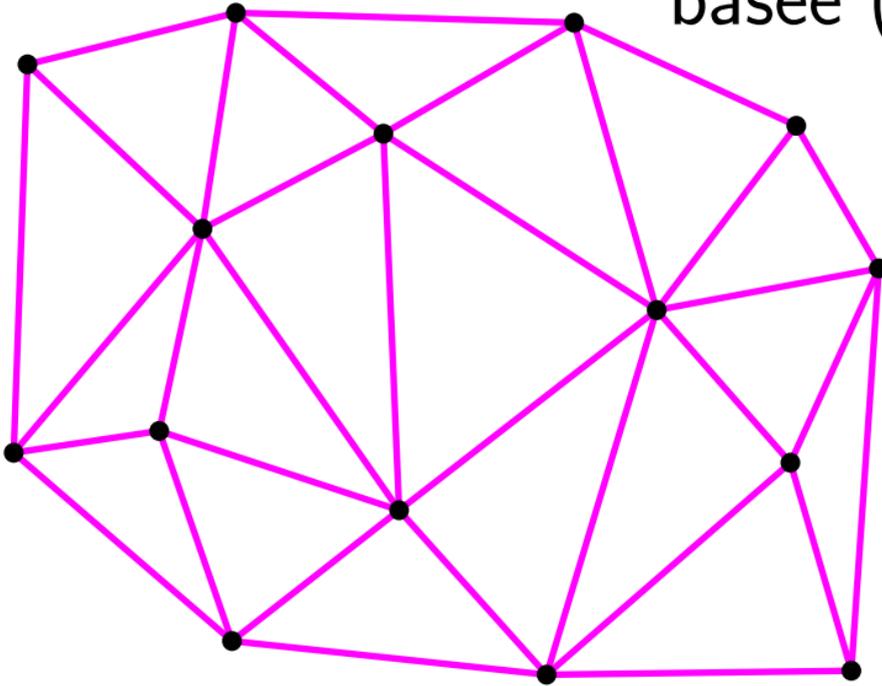
Représentation basée (demi) arêtes



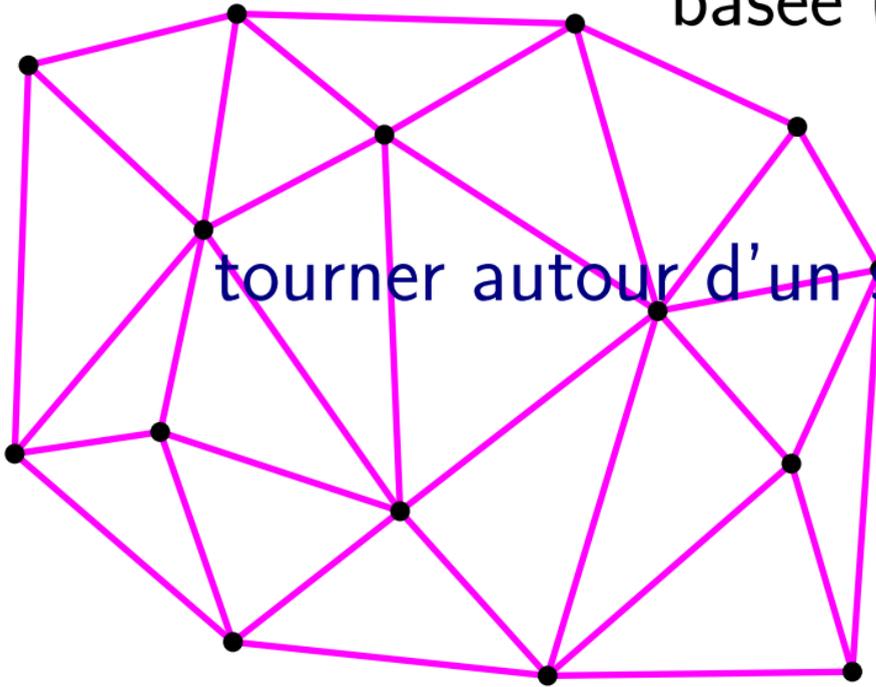
Représentation basée (demi) arêtes



Représentation basée (demi) arêtes

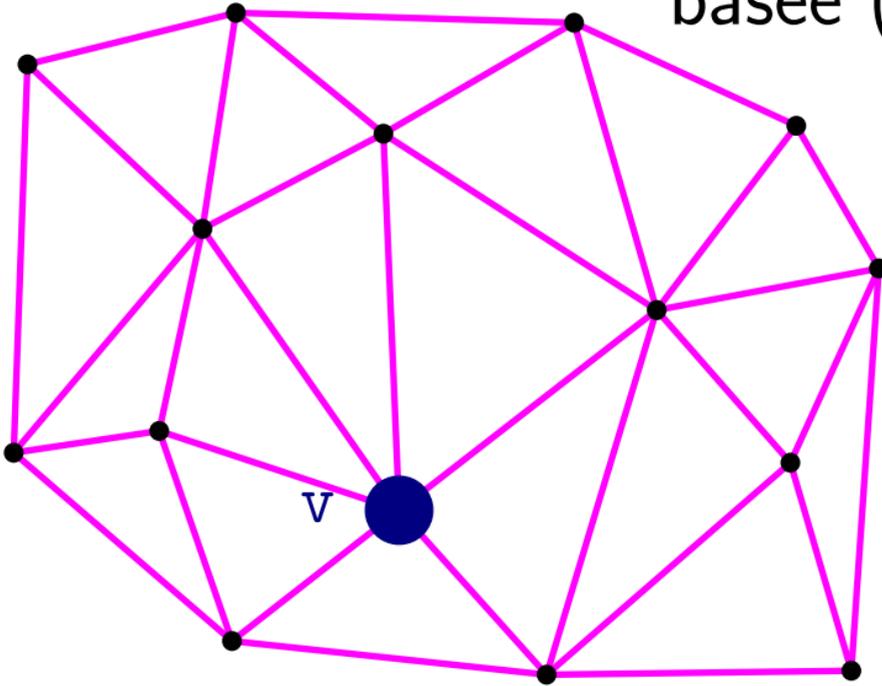


Représentation basée (demi) arêtes

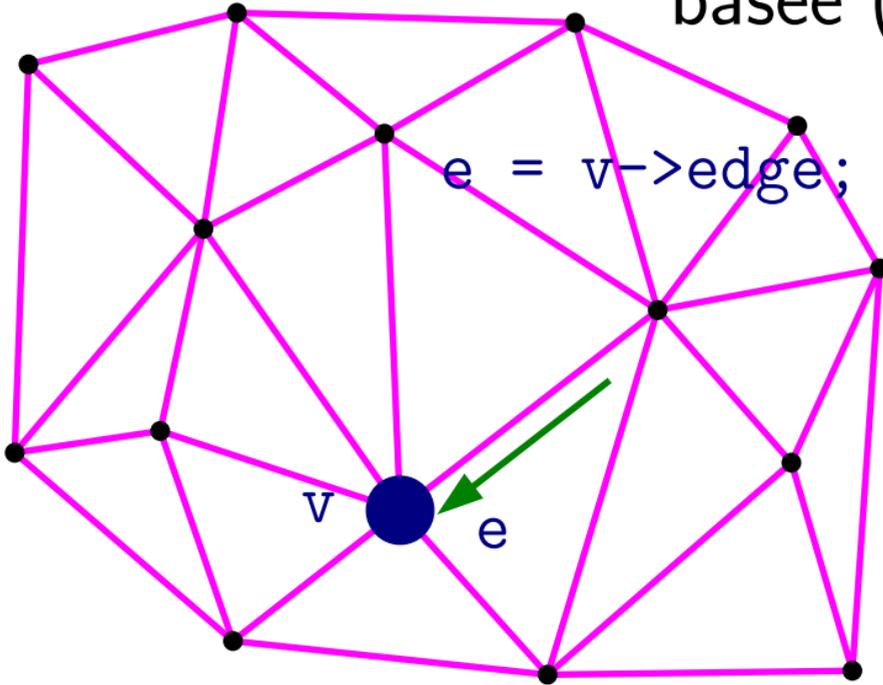


tourner autour d'un sommet

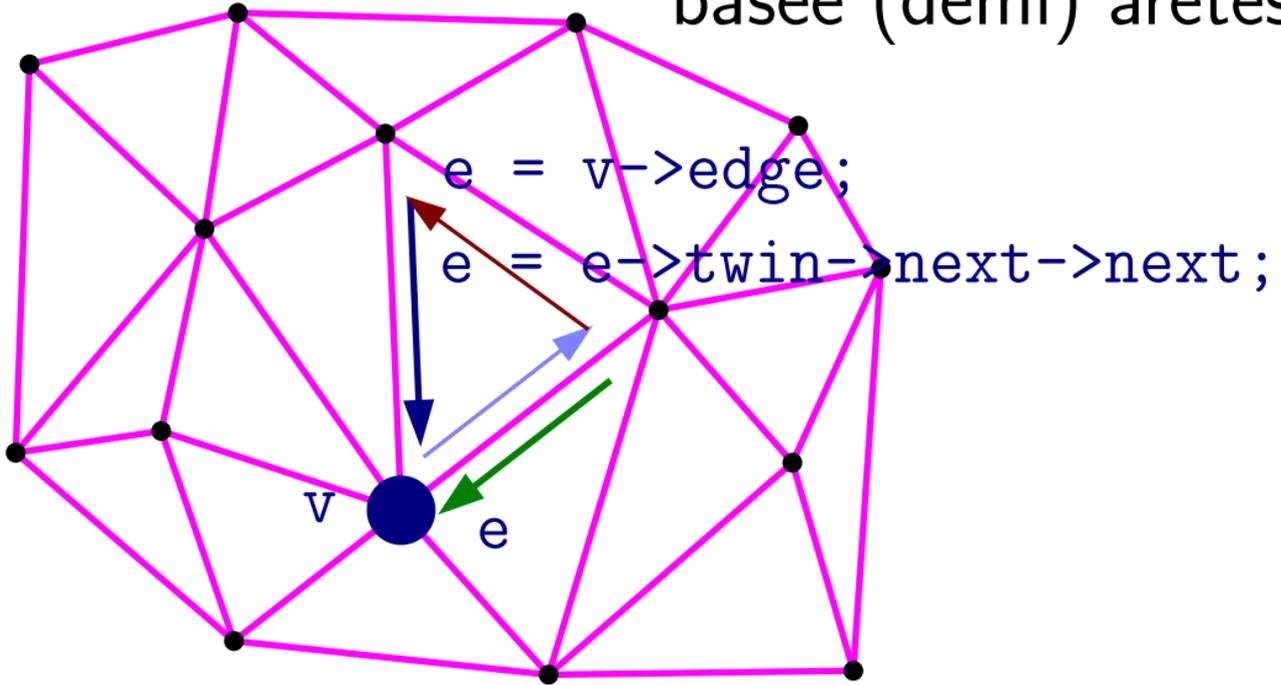
Représentation basée (demi) arêtes

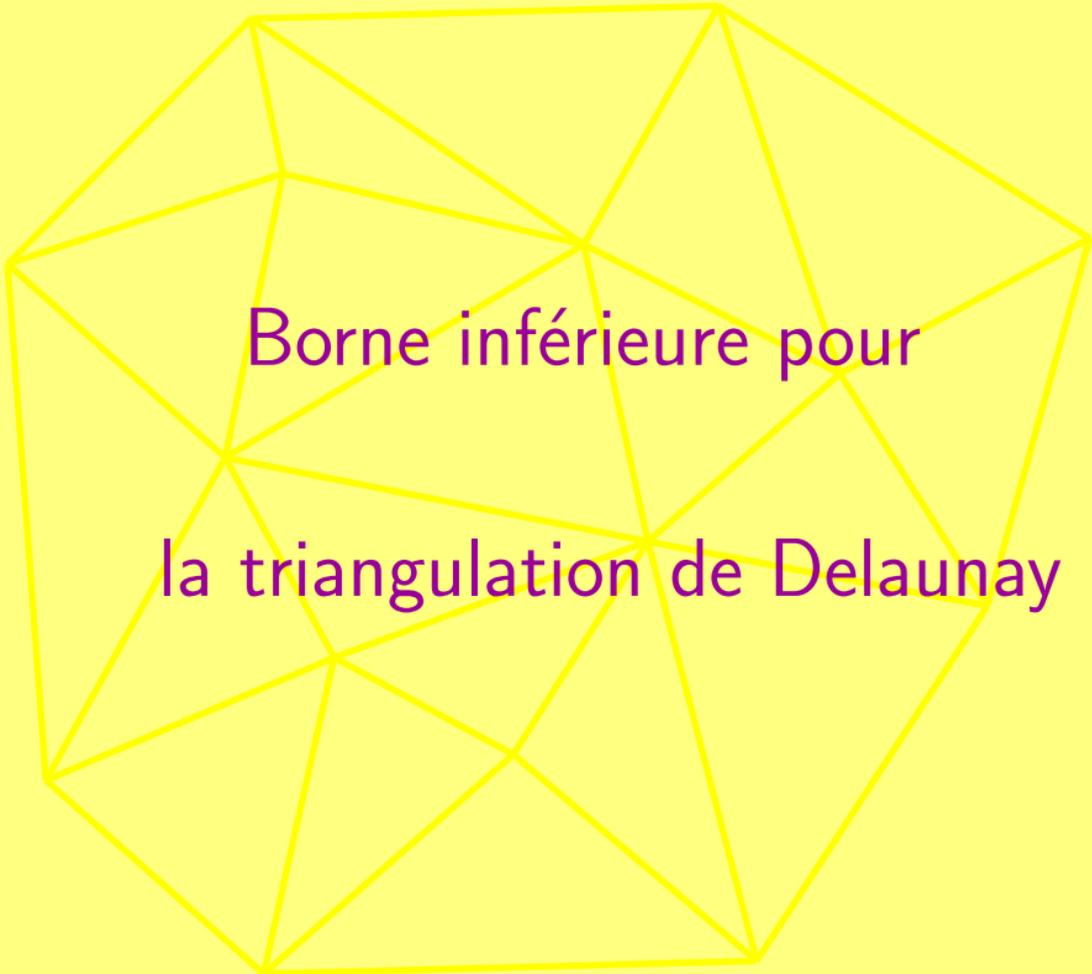


Représentation basée (demi) arêtes



Représentation basée (demi) arêtes





Borne inférieure pour
la triangulation de Delaunay

$$\Omega(f(n))$$

Il n'existe pas d'algorithme

résolvant toutes
les instances du problème

avec moins de $f(n)$ opérations

Borne inférieure pour le tri

Borne inférieure pour le tri

Trier \iff trouver une permutation

Borne inférieure pour le tri

Trier \iff trouver une permutation

Ordre $\neq \implies$ exécution \neq

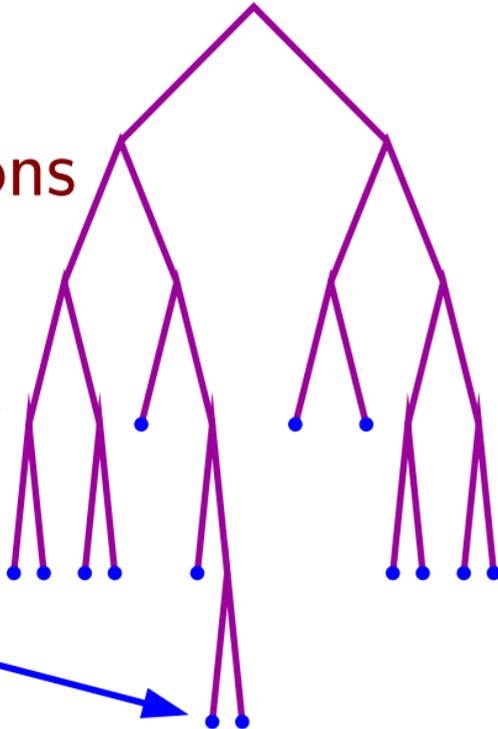
Borne inférieure pour le tri

Arbre des executions

décision



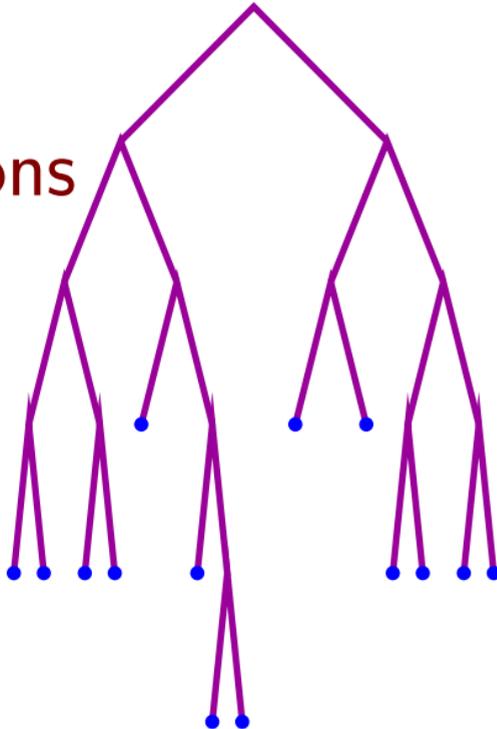
resultat (permutation)



Borne inférieure pour le tri

Arbre des executions

Arbre binaire
 $n!$ feuilles



$$\text{hauteur} \geq \log_2 n! \simeq n \log n$$

Borne inférieure pour le tri

$$\Omega(n \log n)$$

Borne inférieure pour Delaunay

Delaunay sert à trier

Borne inférieure pour Delaunay

Delaunay sert à trier

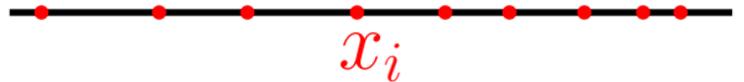
Prendre un problème de tri

Supposer que l'on sait faire Delaunay

Utiliser Delaunay pour trier

Borne inférieure pour Delaunay

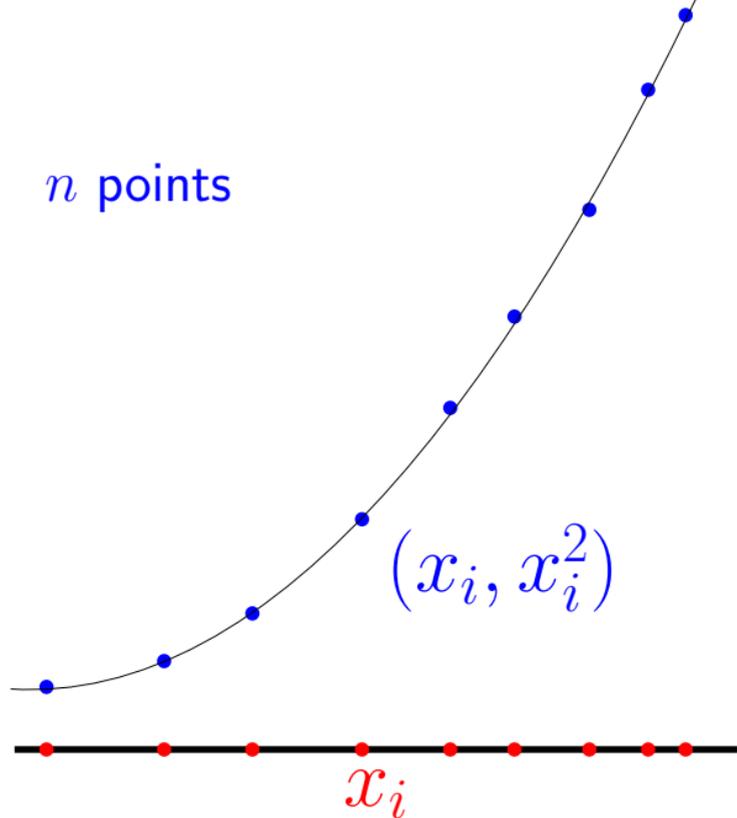
x_1, x_2, \dots, x_n à trier



Borne inférieure pour Delaunay

x_1, x_2, \dots, x_n à trier

$(x_1, x_1^2), \dots, (x_n, x_n^2)$ n points



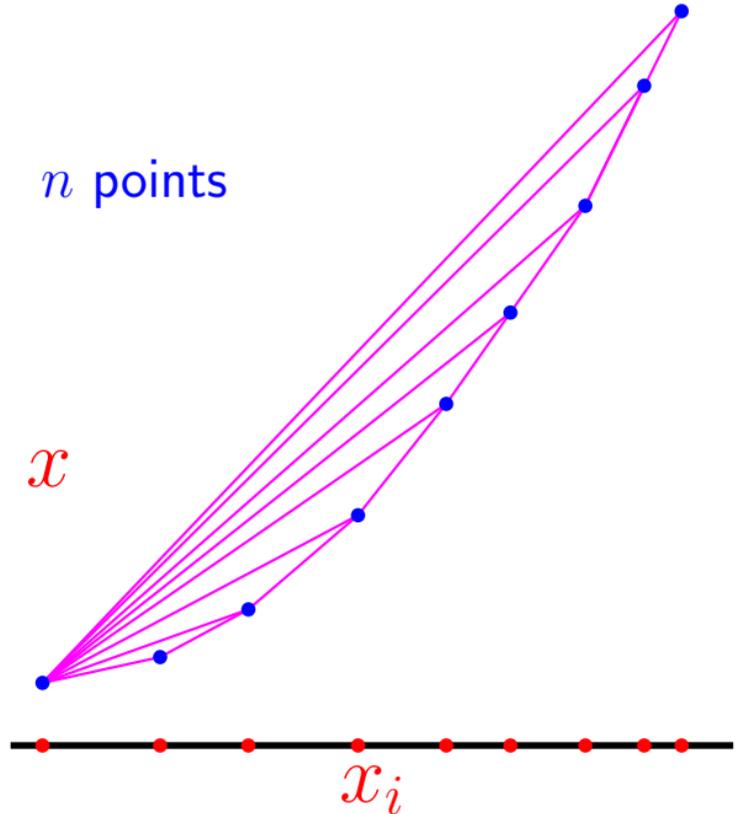
Borne inférieure pour Delaunay

x_1, x_2, \dots, x_n à trier

$(x_1, x_1^2), \dots, (x_n, x_n^2)$ n points

Delaunay

→ ordre en x



Borne inférieure pour Delaunay

x_1, x_2, \dots, x_n à trier

$(x_1, x_1^2), \dots, (x_n, x_n^2)$

n points

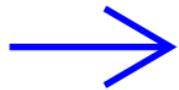


$O(n)$

Delaunay



$f(n)$



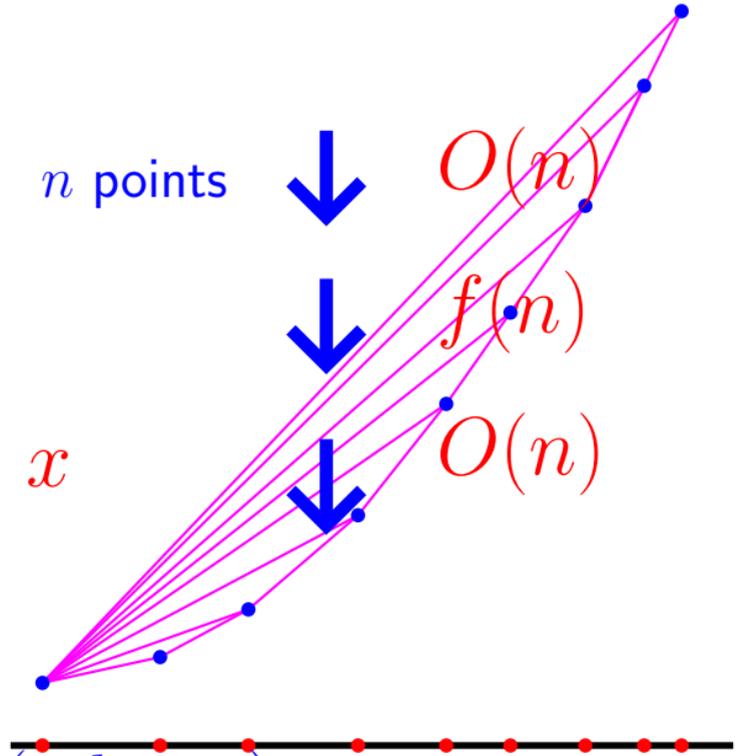
ordre en x



$O(n)$

$O(n) + f(n) \in O(n \log n)$

x_i



Borne inférieure pour Delaunay

x_1, x_2, \dots, x_n à trier

$$\Omega(n \log n)$$



Borne inférieure pour Delaunay

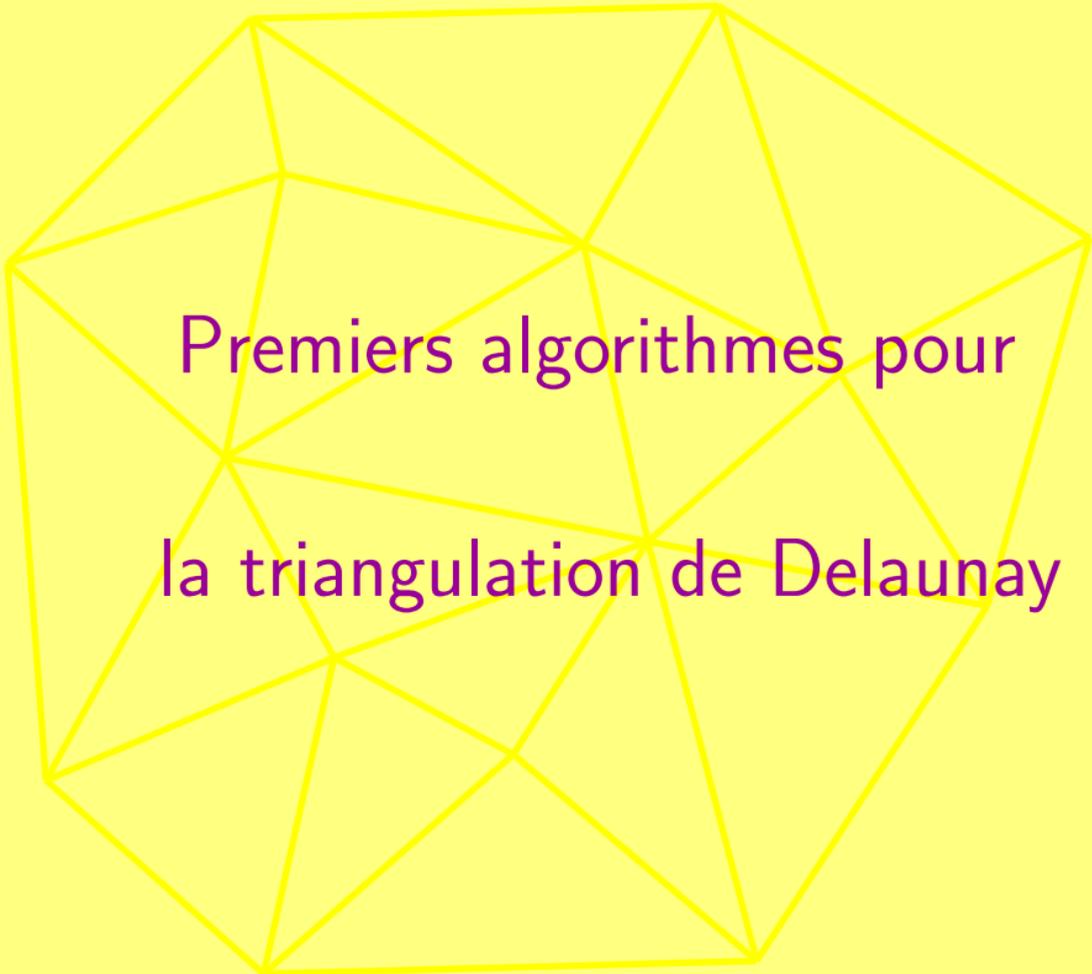
Borne inférieure pour Delaunay

Delaunay sert à trier

Borne inférieure pour Delaunay

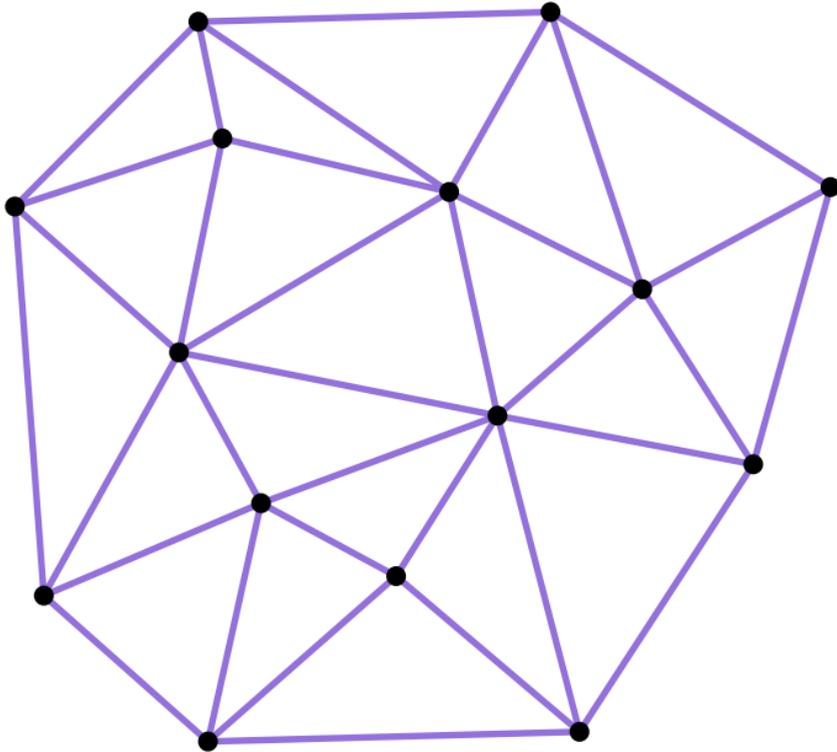
Delaunay sert à trier

$$\Omega(n \log n)$$

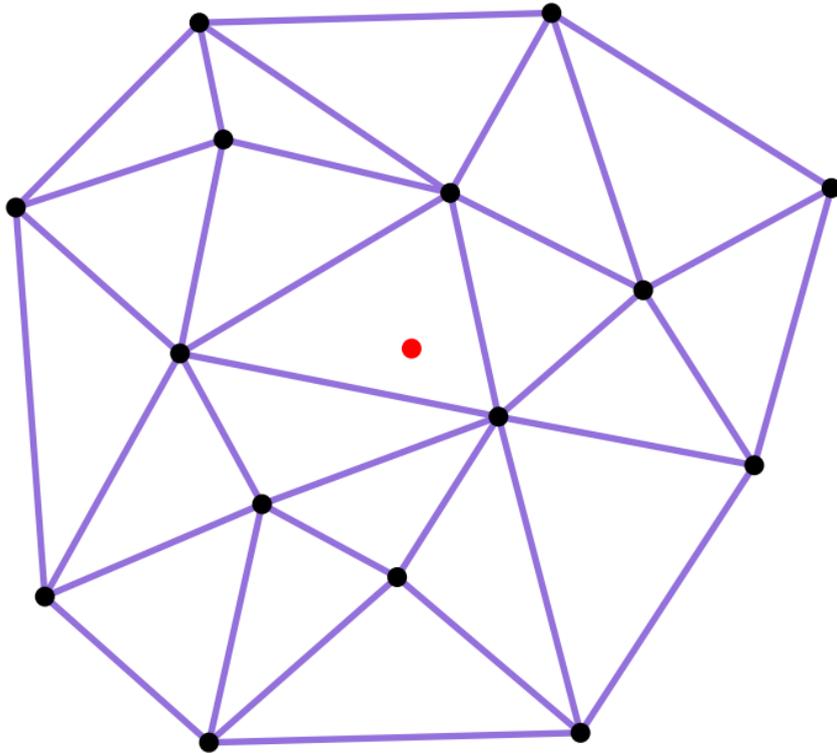


Premiers algorithmes pour
la triangulation de Delaunay

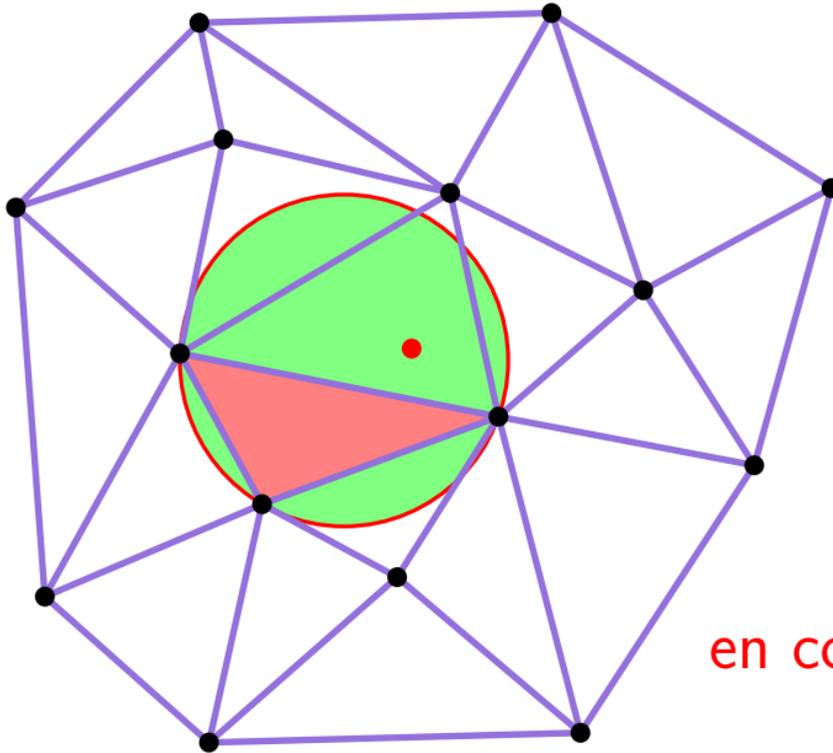
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental

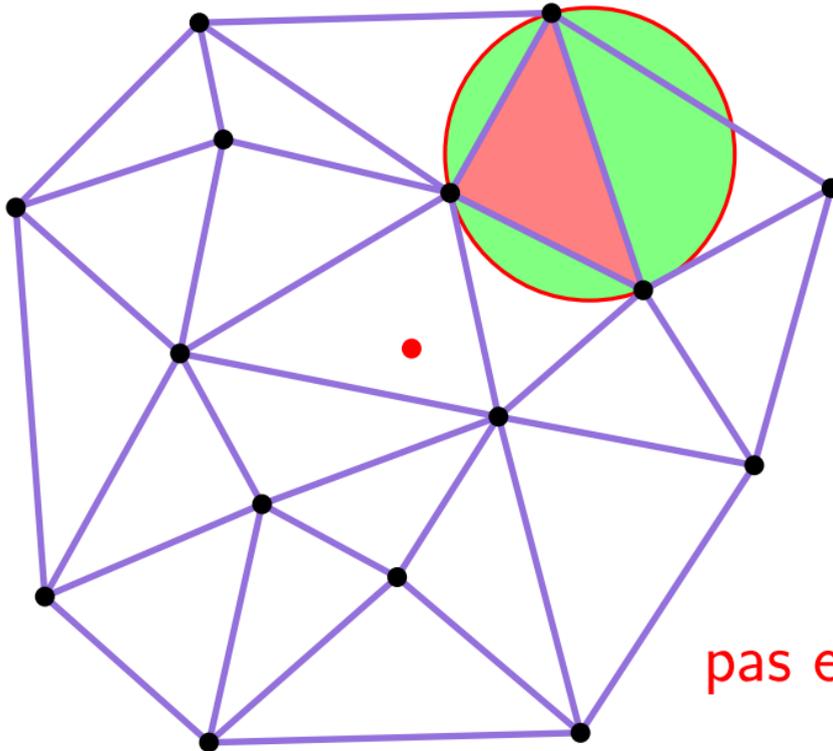


Algorithme incrémental



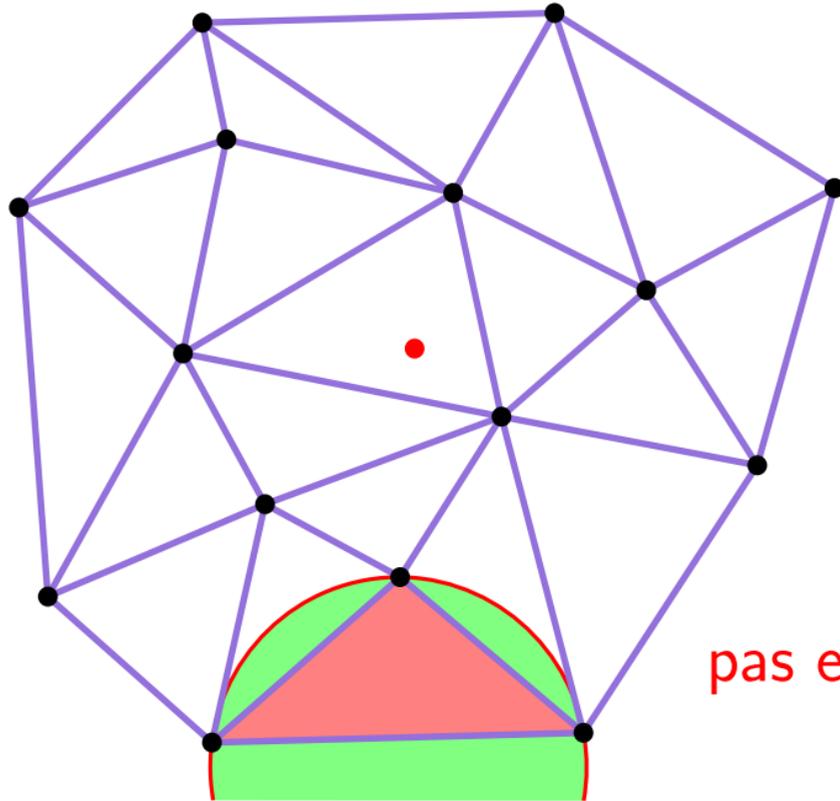
en conflit

Algorithme incrémental



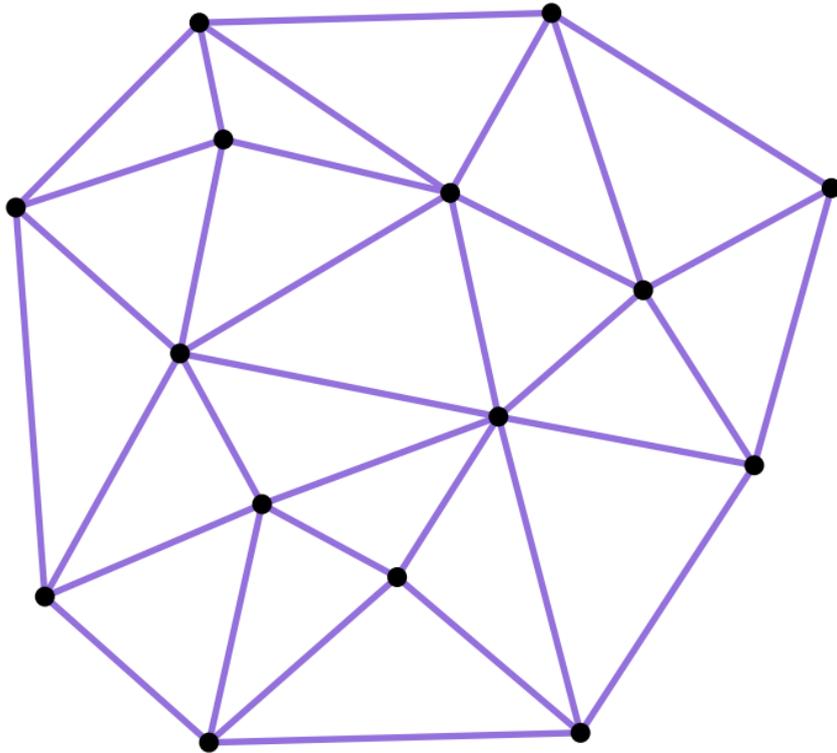
pas en conflit

Algorithme incrémental

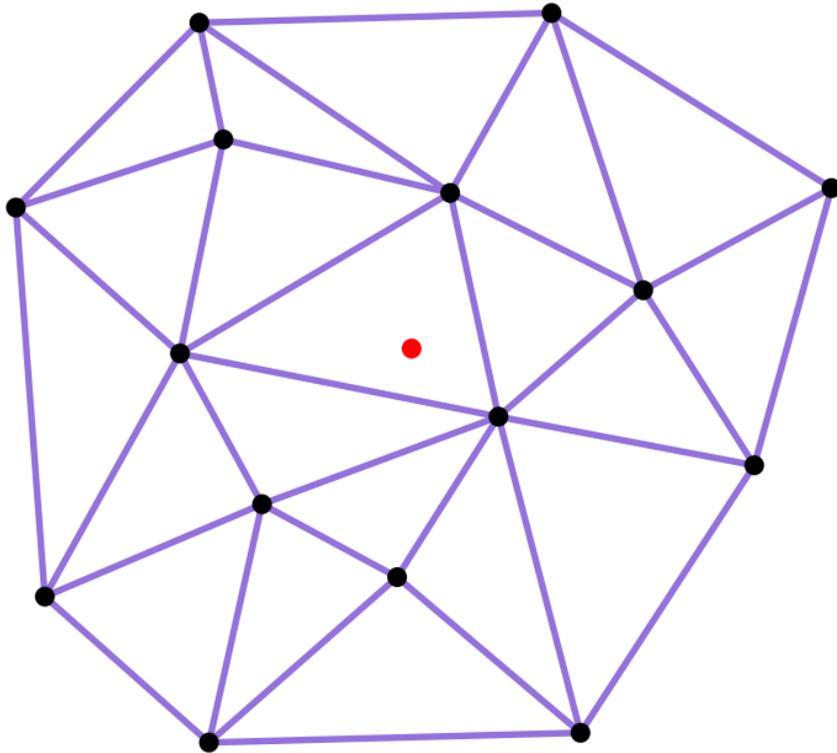


pas en conflit

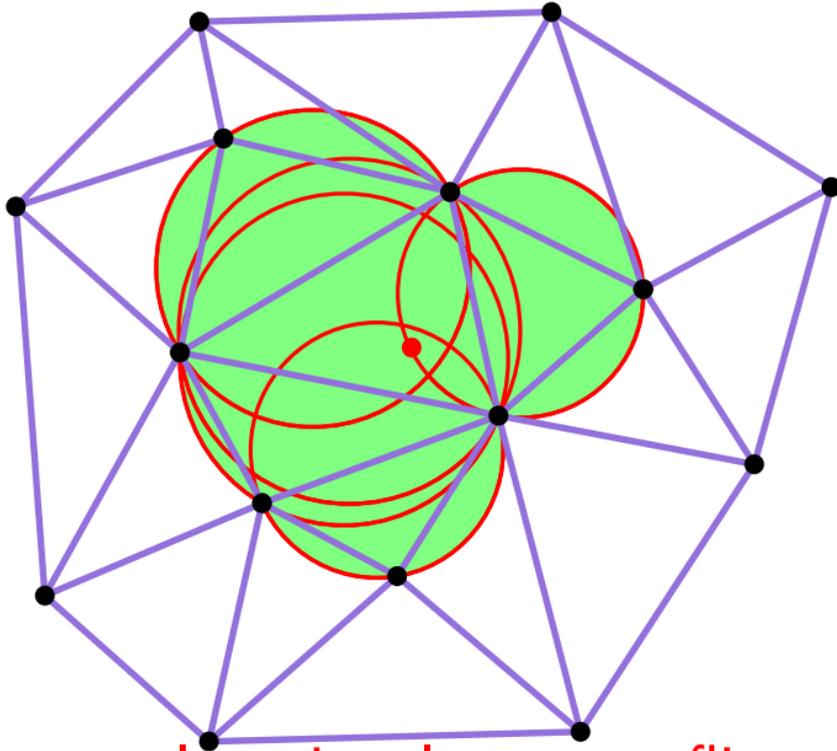
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental

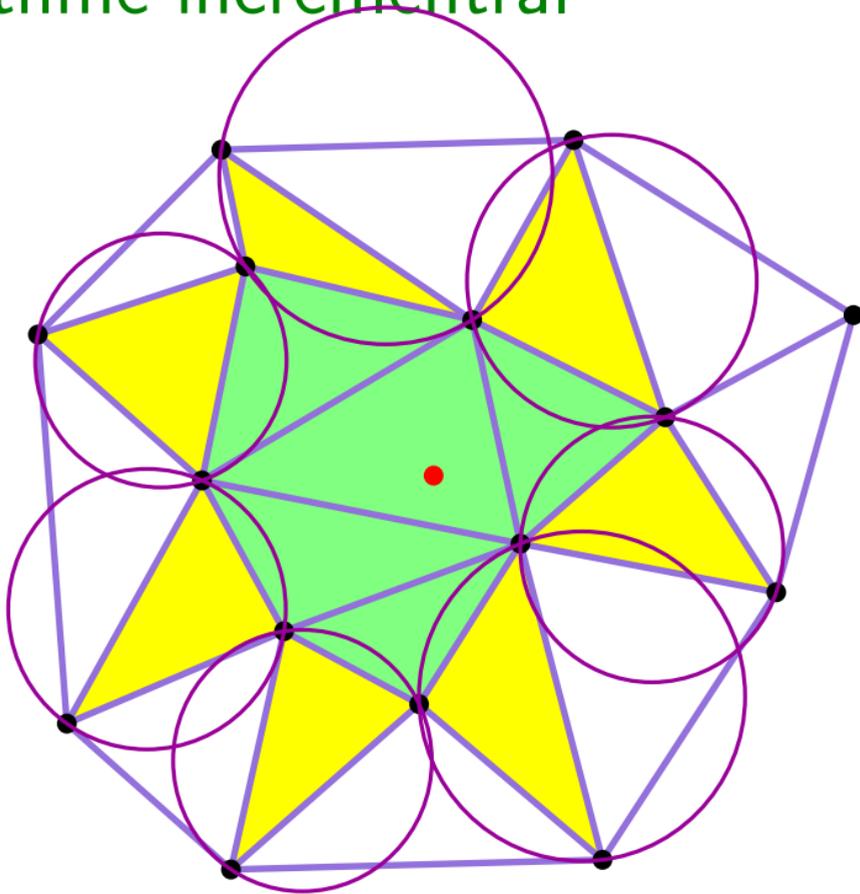


Algorithme incrémental

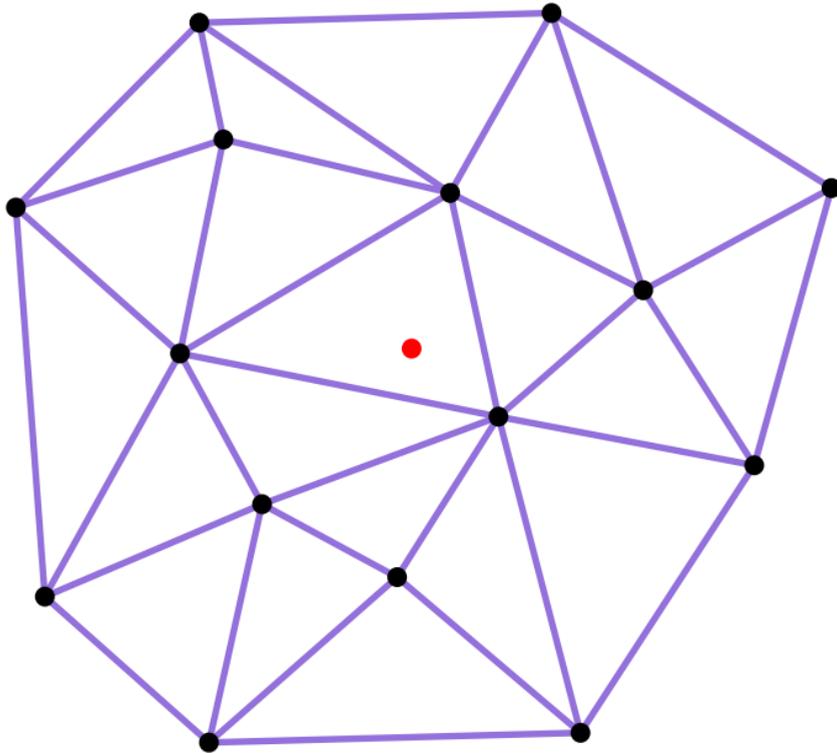


Trouver les triangles en conflit

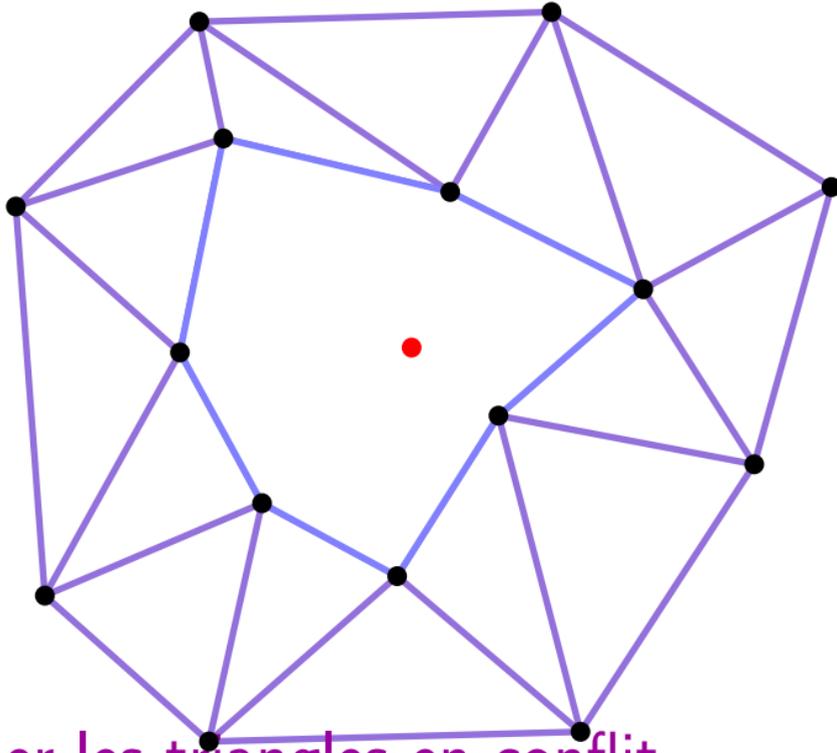
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental

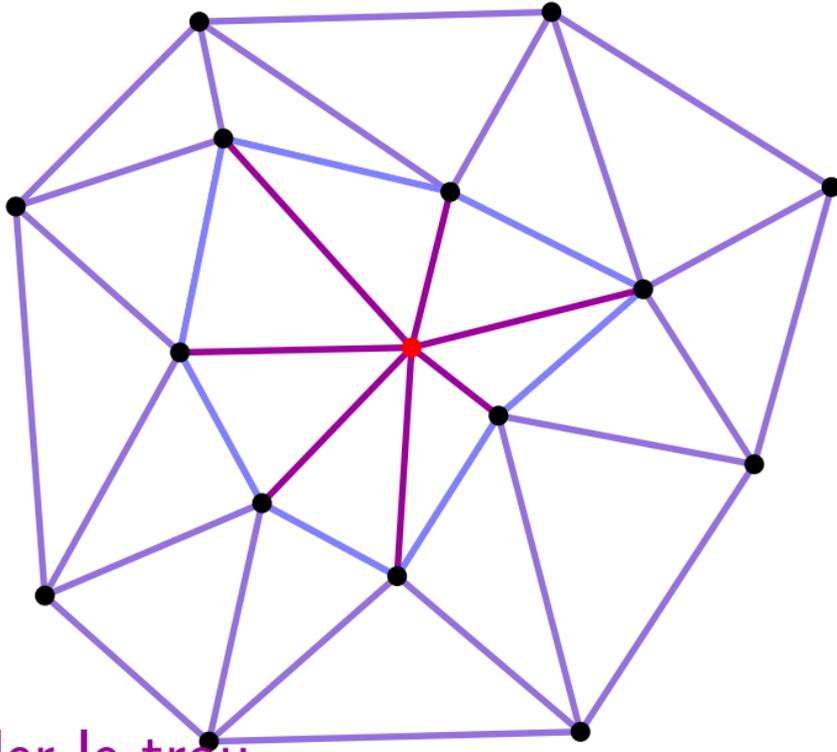


Algorithme incrémental



Supprimer les triangles en conflit

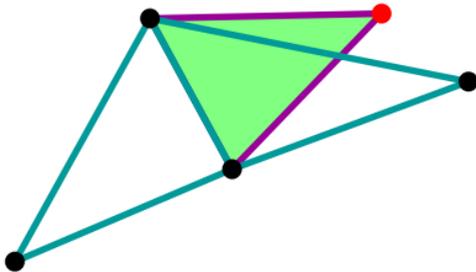
Algorithme incrémental



Trianguler le trou

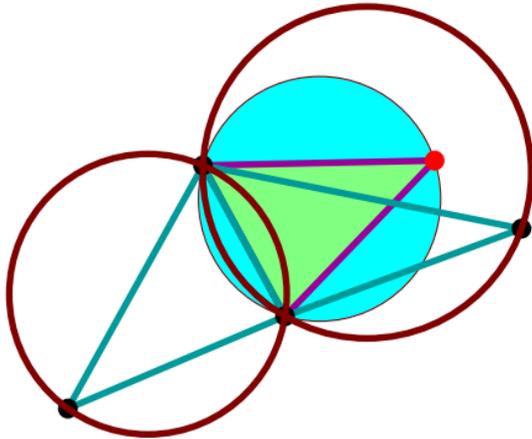
Algorithme incrémental

Un nouveau triangle est de Delaunay



Algorithme incrémental

Un nouveau triangle est de Delaunay



Algorithme incrémental

Complexité

$O(n)$ pour chaque insertion

$O(n^2)$

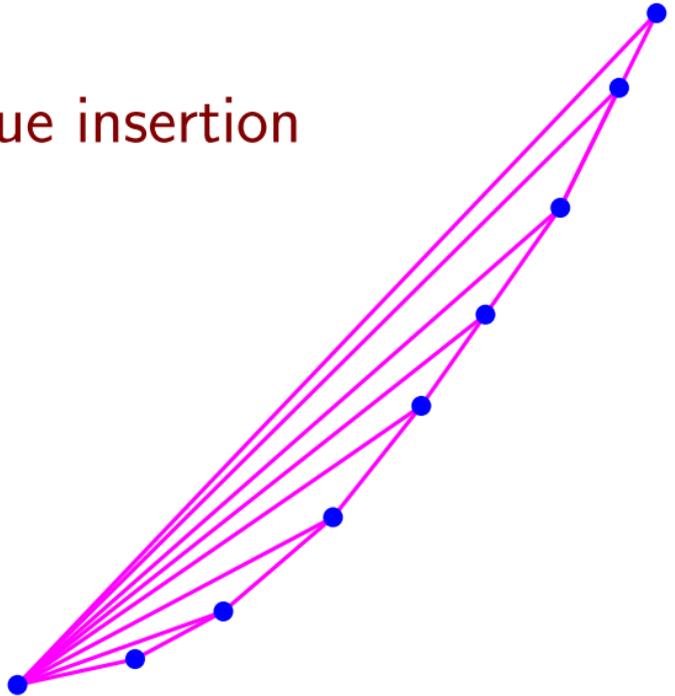
Algorithme incrémental

Complexité

$O(n)$ pour chaque insertion

$O(n^2)$

$\Omega(n^2)$



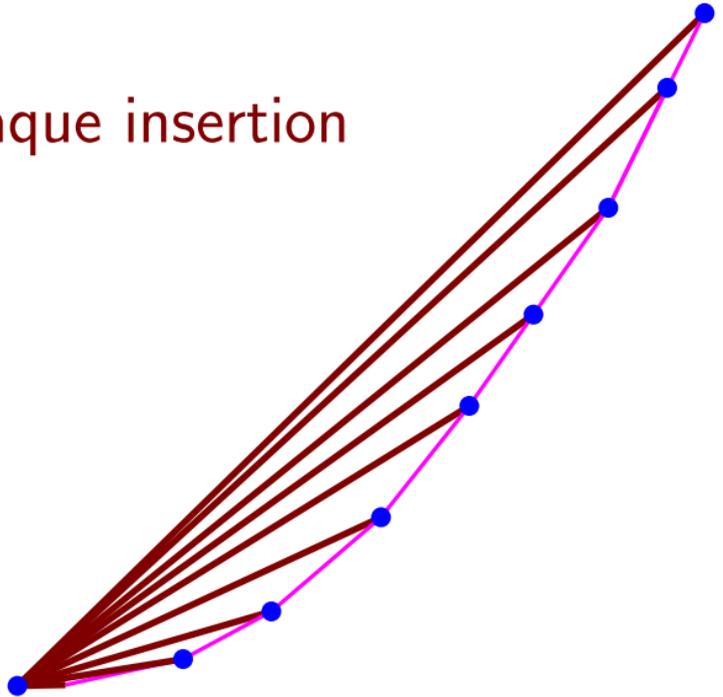
Algorithme incrémental

Complexité

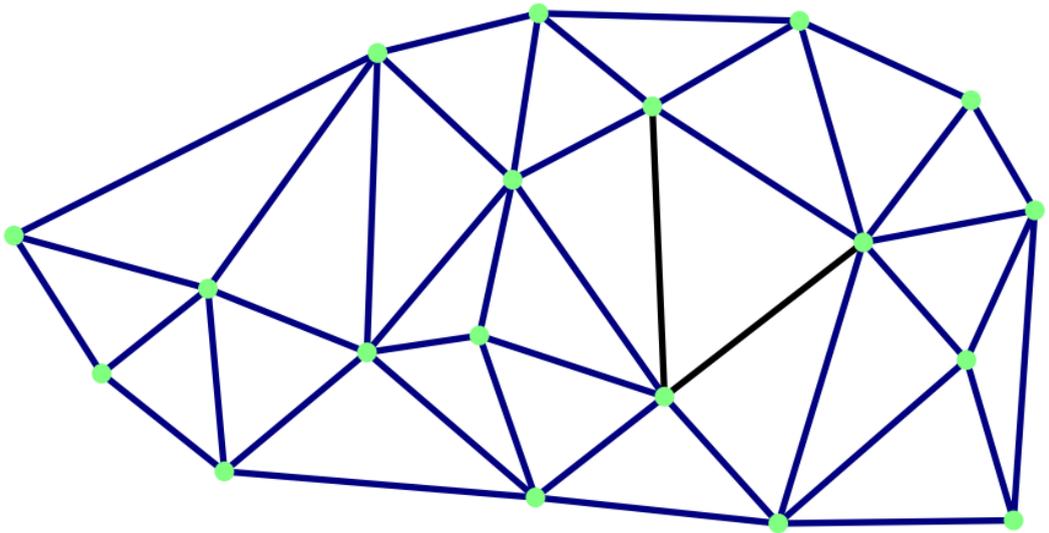
$O(n)$ pour chaque insertion

$O(n^2)$

$\Omega(n^2)$

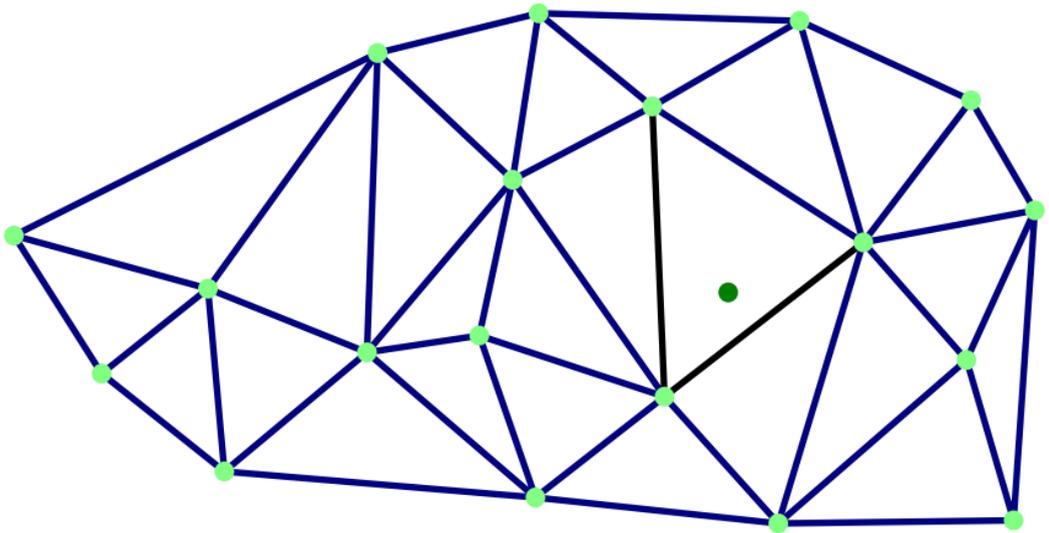


Algorithme incrémental



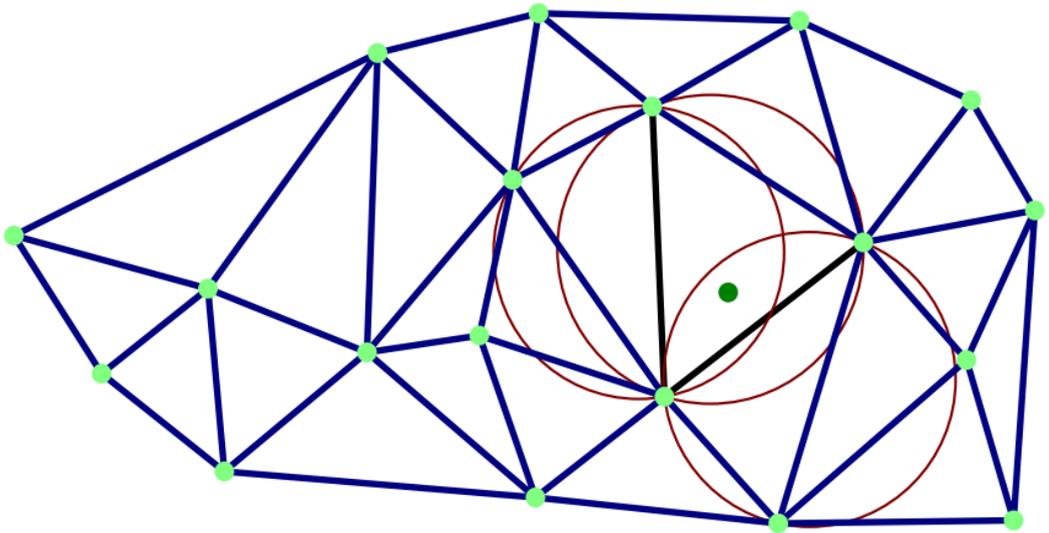
Algorithme incrémental

Insertion



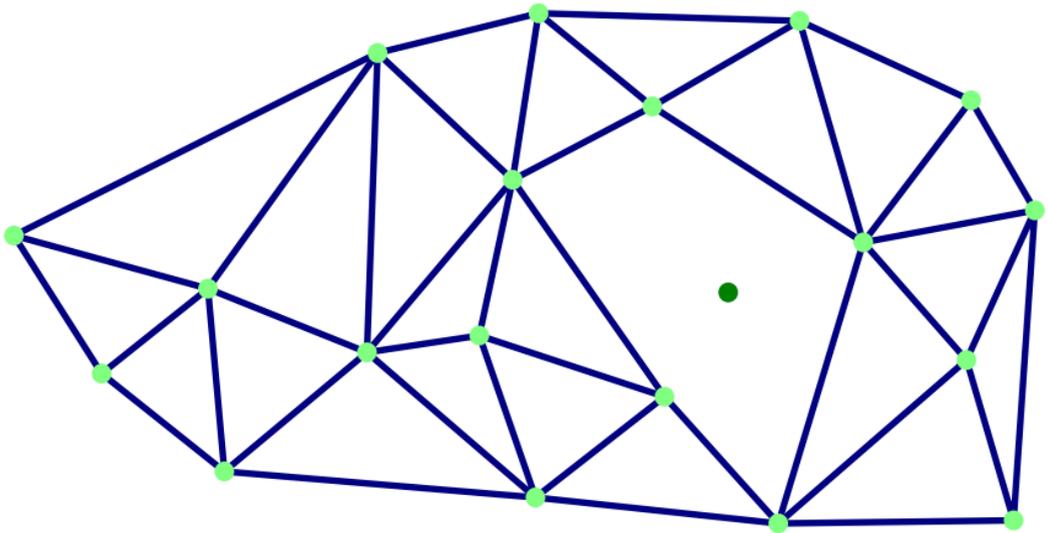
Algorithme incrémental

Insertion



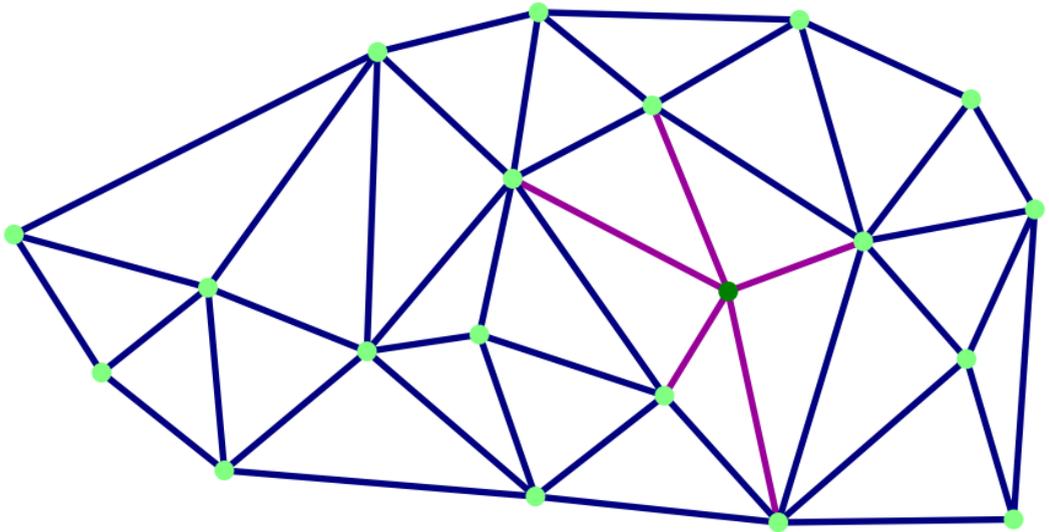
Algorithme incrémental

Insertion



Algorithme incrémental

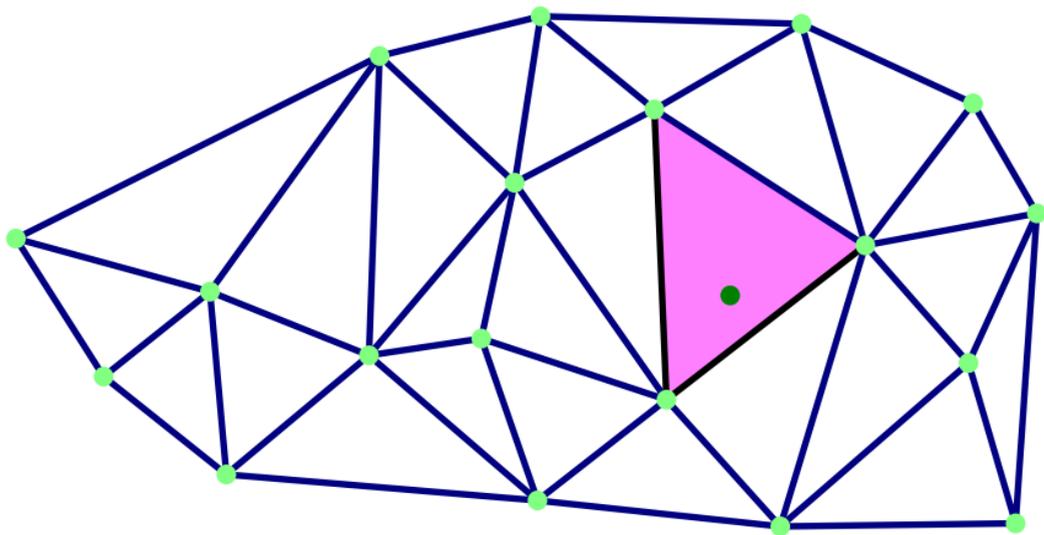
Insertion



Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

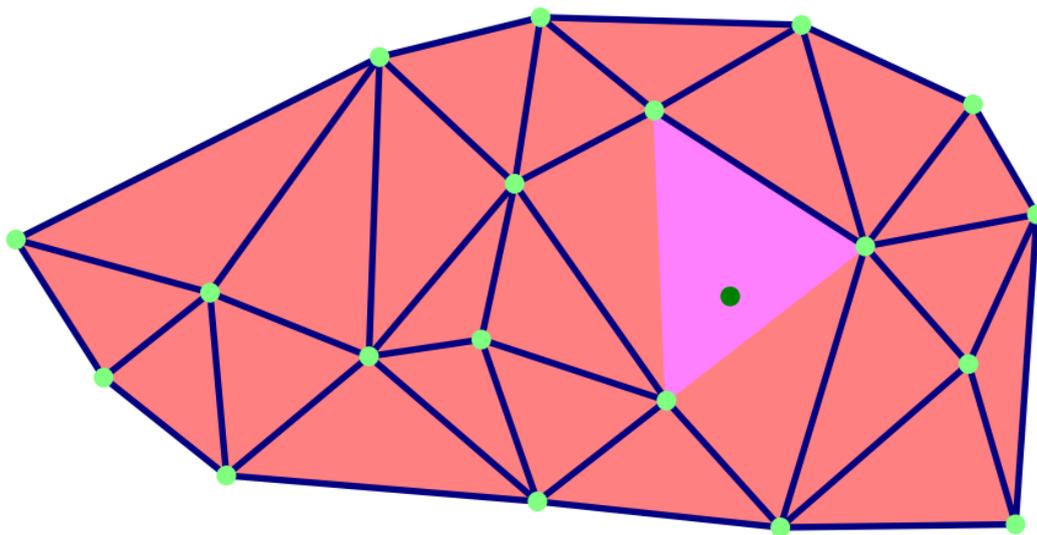


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Tous



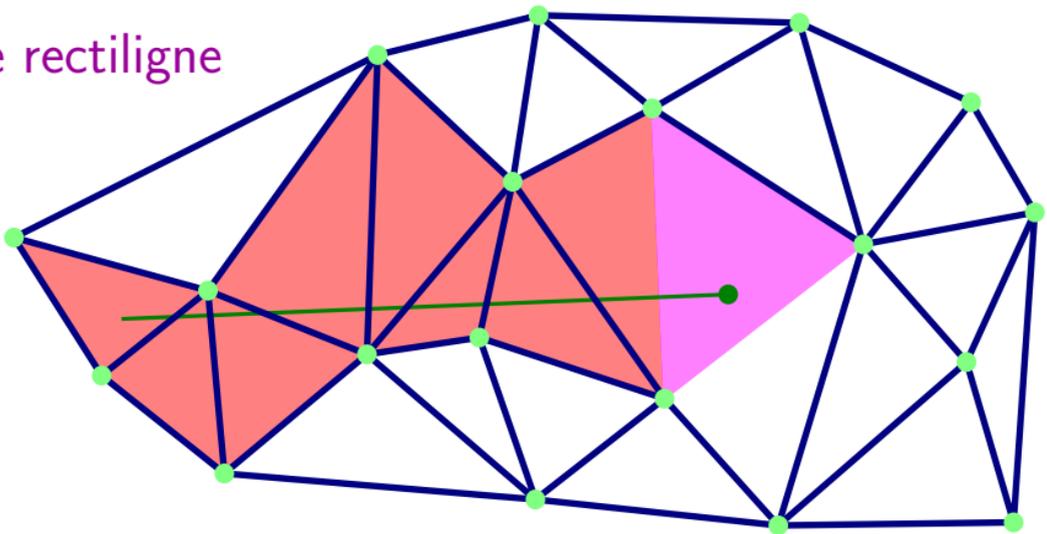
$$O(n)$$

Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Marche rectiligne



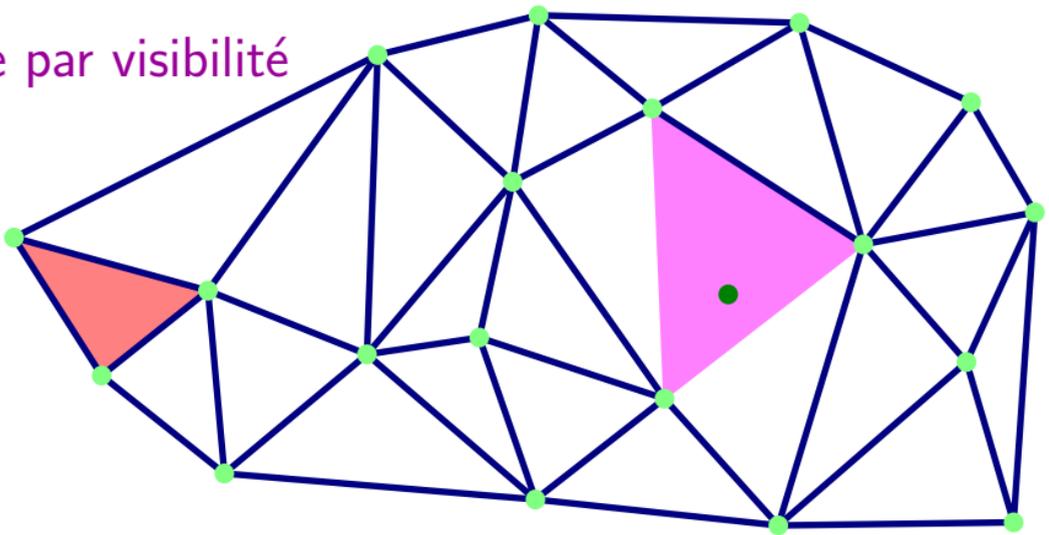
$O(\sqrt{n})$ en moyenne

Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Marche par visibilité

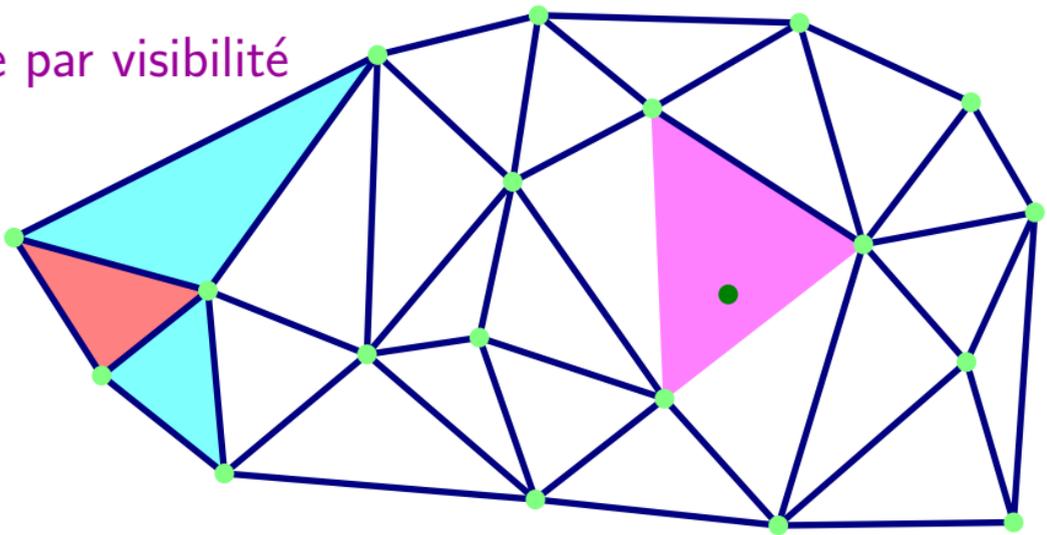


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Marche par visibilité

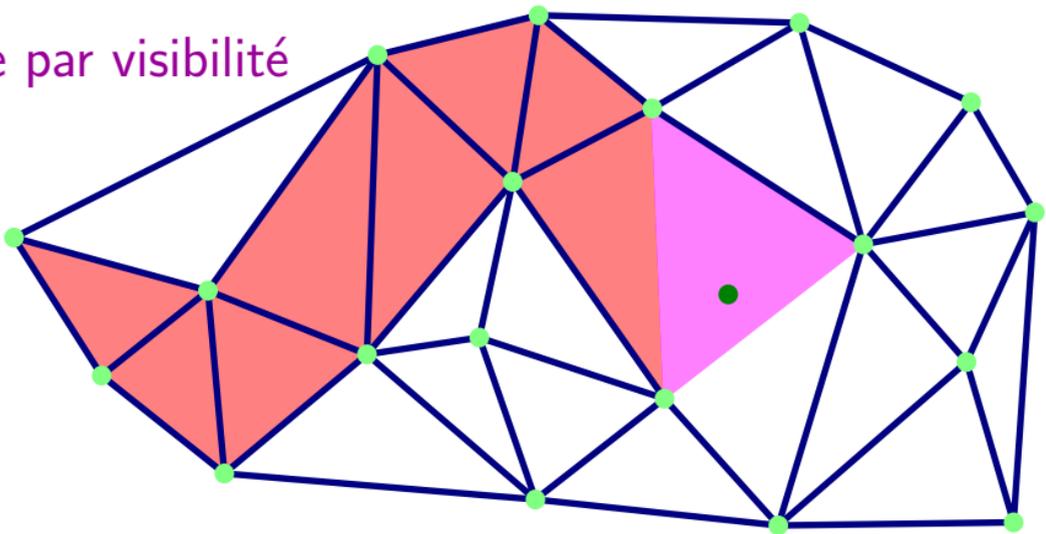


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Marche par visibilité



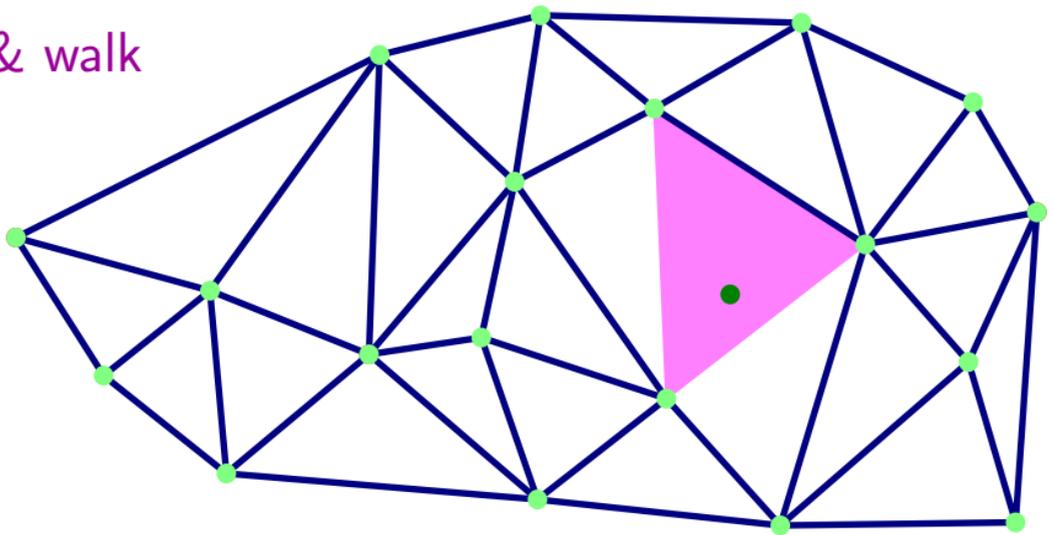
$O(\sqrt{n})$??? en moyenne

Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Jump & walk

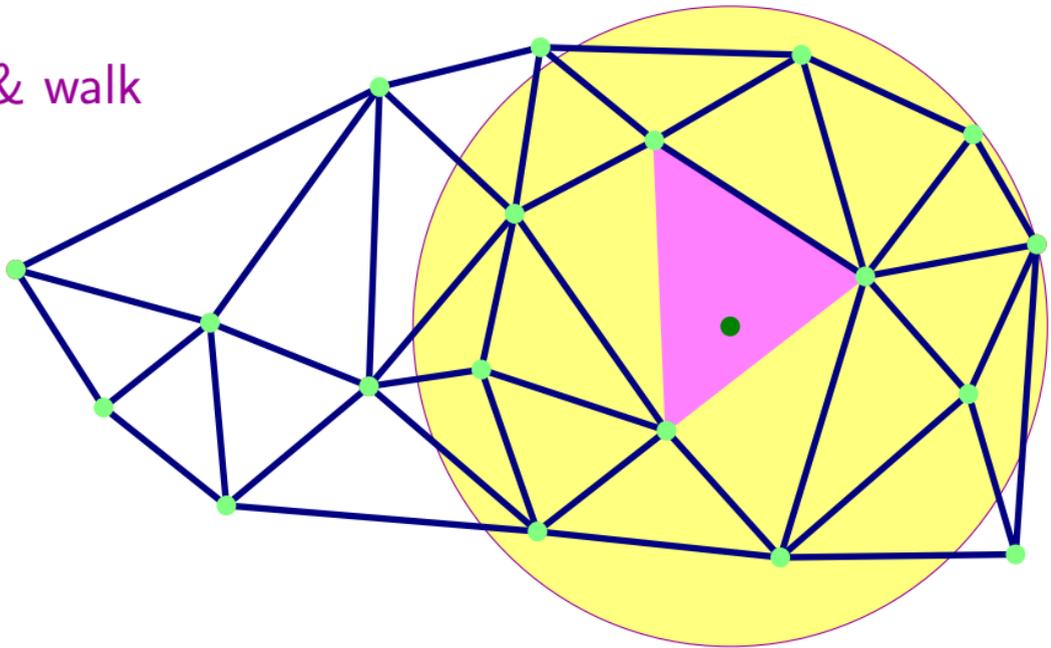


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Jump & walk

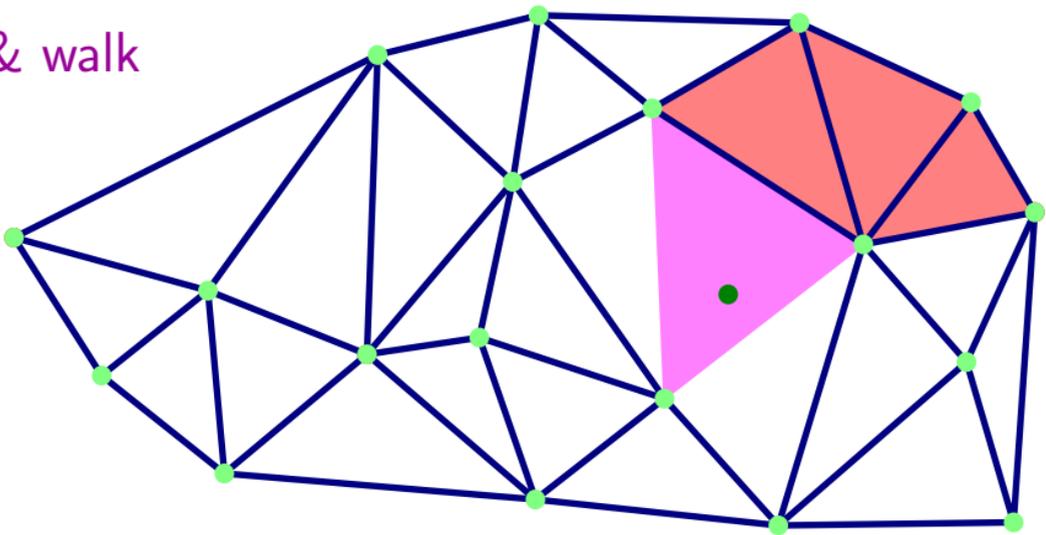


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Jump & walk



$O(\sqrt[3]{n})$ en moyenne

Algorithme incrémental

Complexité

$$O(n^2)$$

$$O(n\sqrt{n}) \text{ en moyenne}$$

$$O(n\sqrt[3]{n}) \text{ en moyenne}$$

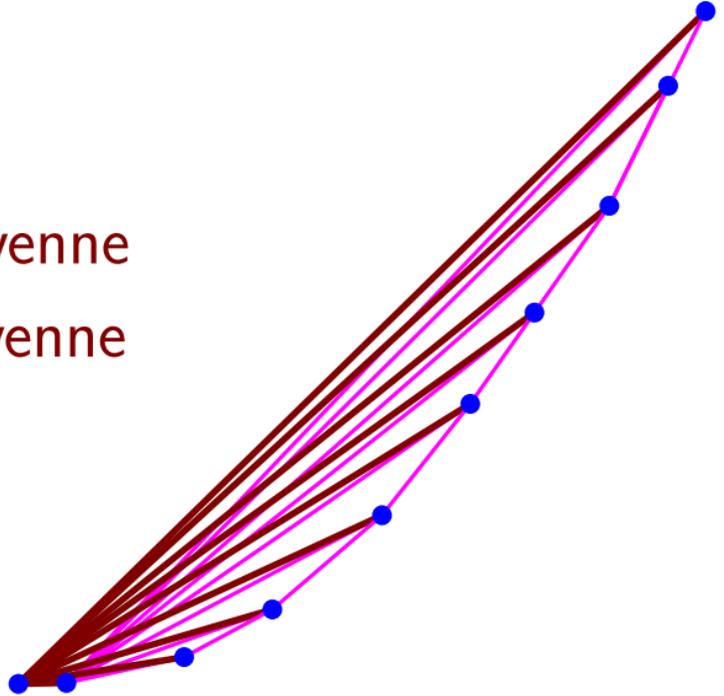
Algorithme incrémental

Complexité

$$O(n^2)$$

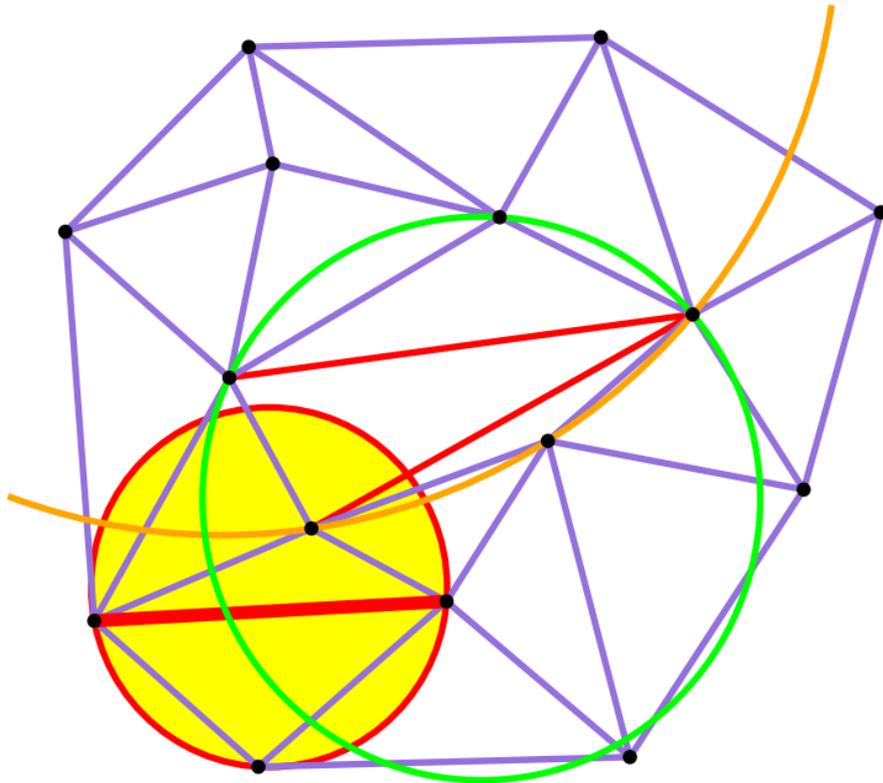
$O(n\sqrt{n})$ en moyenne

$O(n\sqrt[3]{n})$ en moyenne

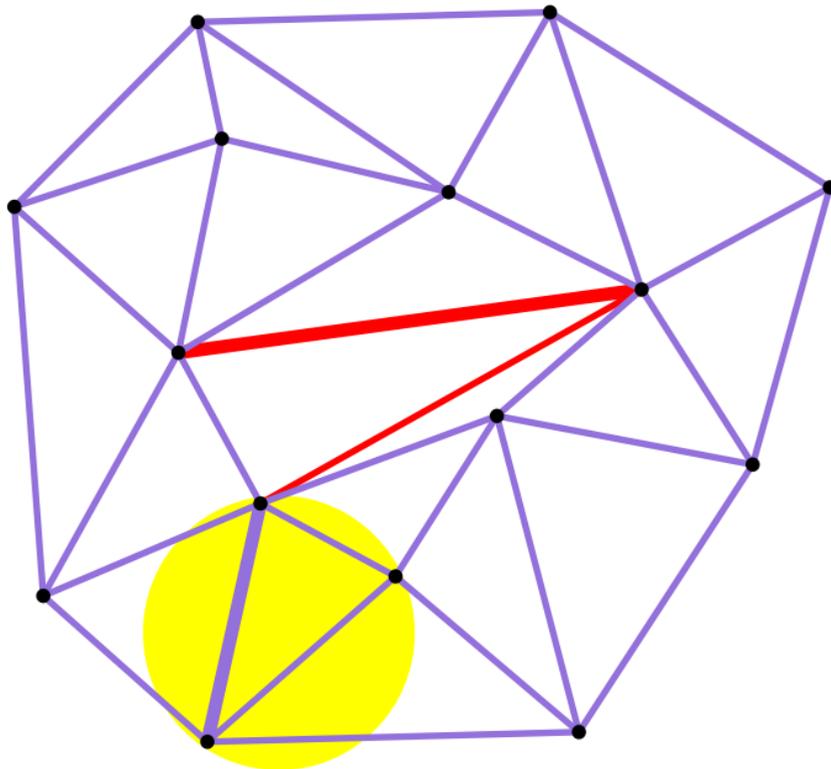


$\Omega(n^2)$ dans le cas le pire

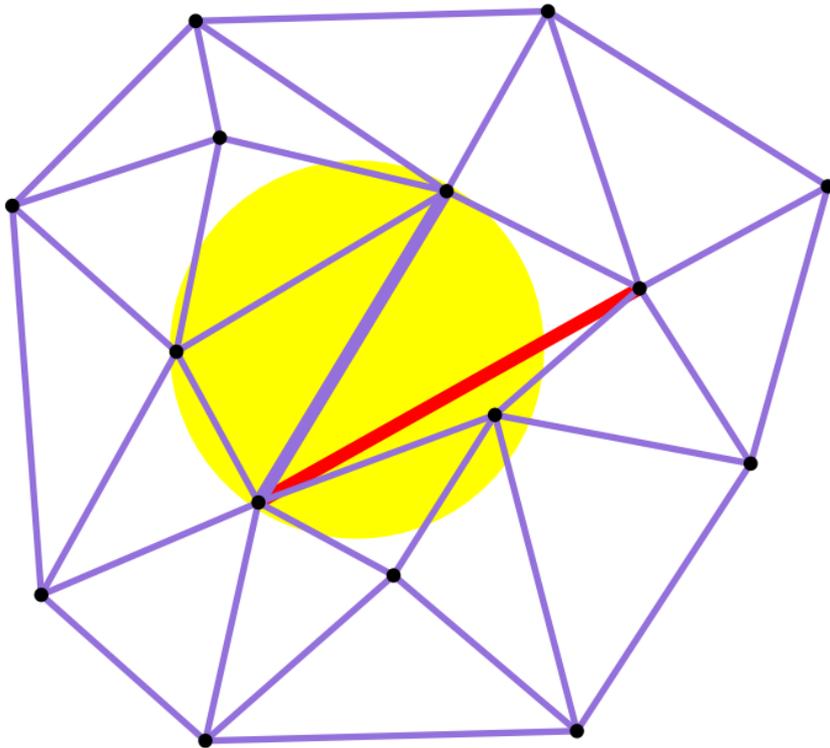
Bascule de diagonales



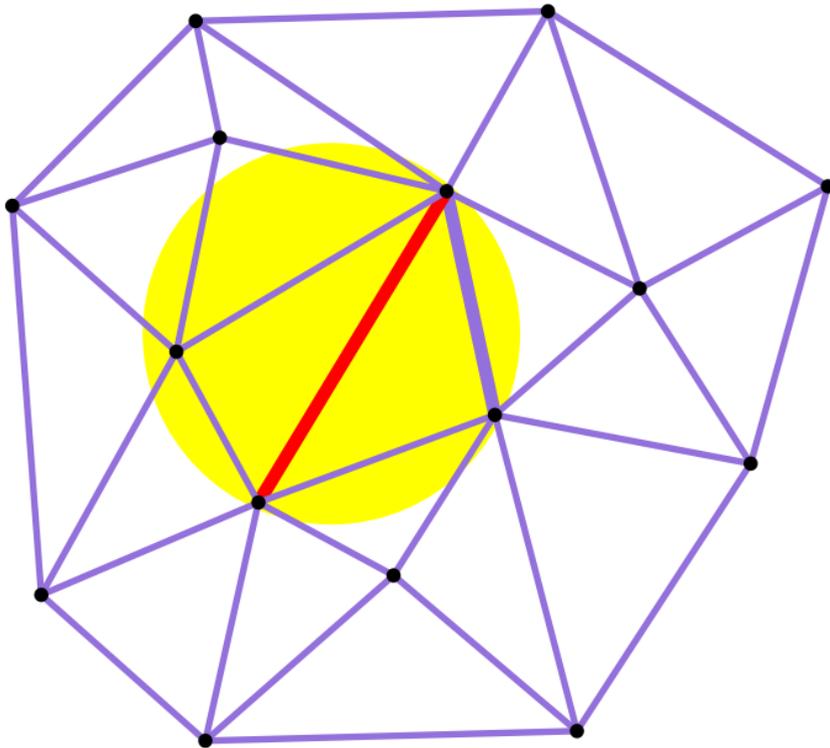
Bascule de diagonales



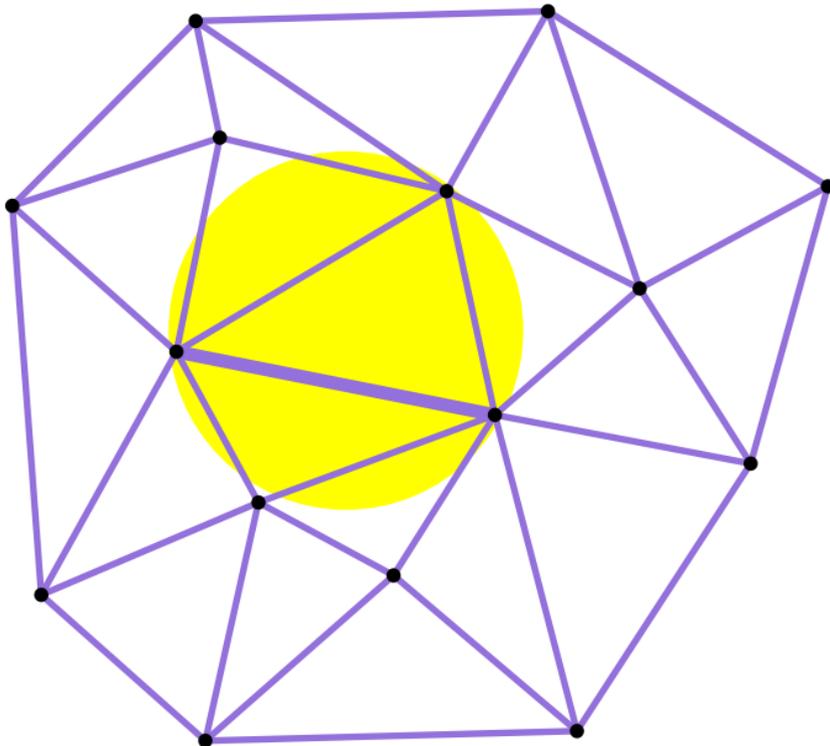
Bascule de diagonales



Bascule de diagonales



Bascule de diagonales



Bascule de diagonales

Complexité

Algorithme en $O(n^2)$

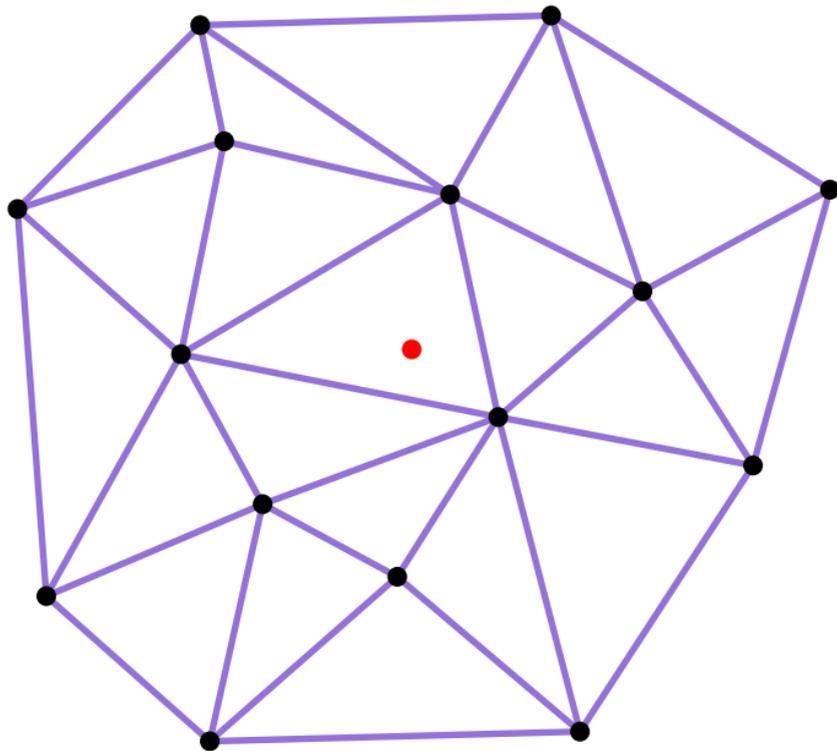
Bascule de diagonales

Complexité

Algorithme en $O(n^2)$

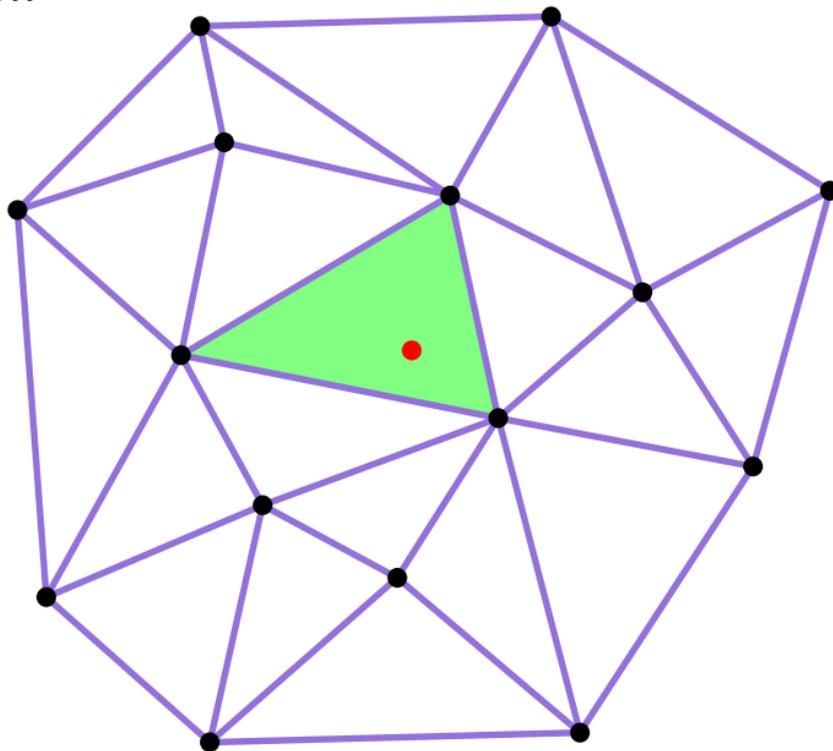
Une arête basculée n'est
jamais reconstruite
(les nouvelles arêtes
sont toujours dessous)

Bascule de diagonales et algorithme incrémental



Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

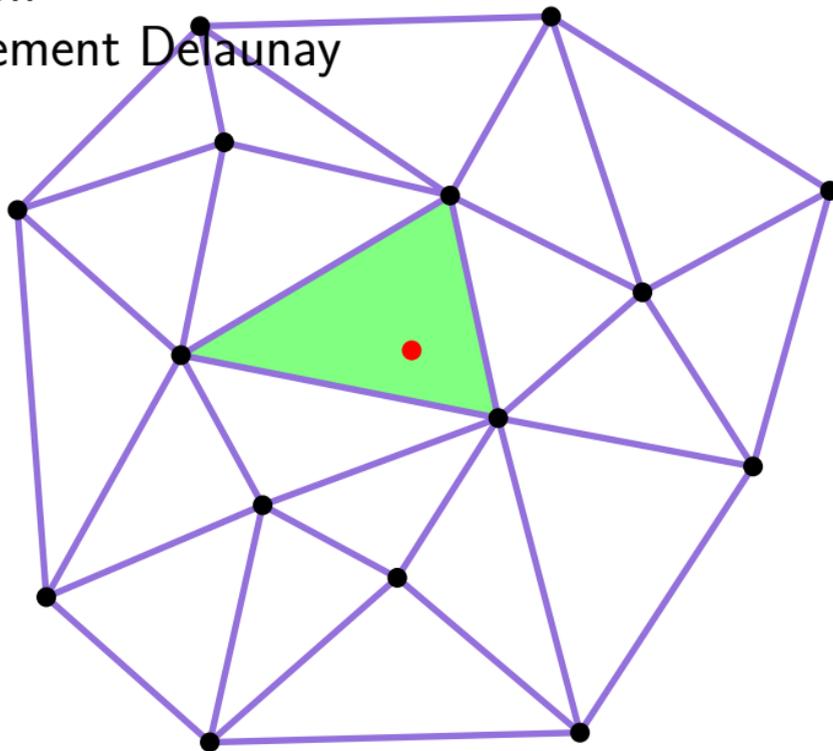


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

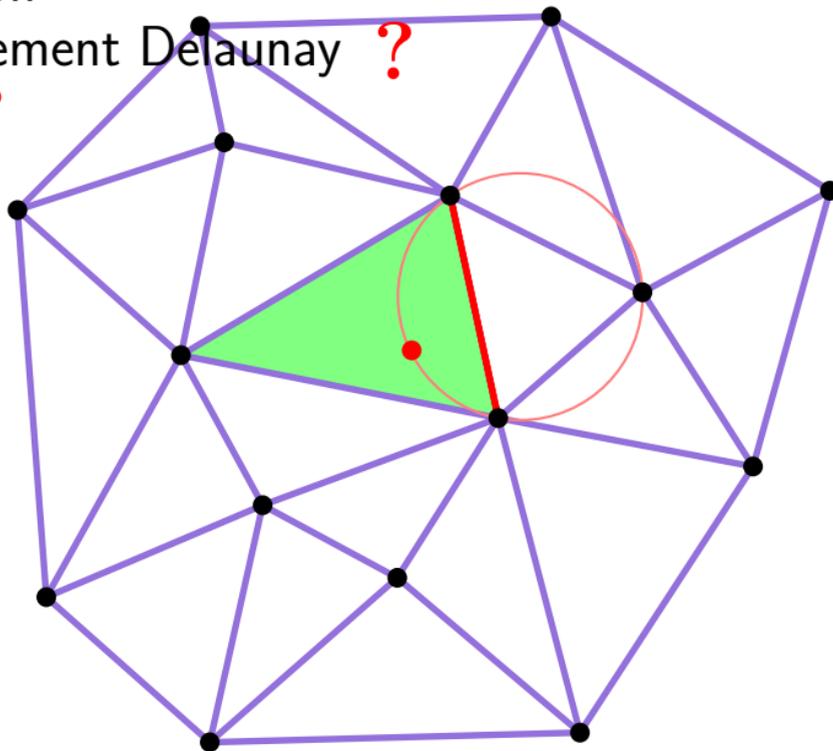


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



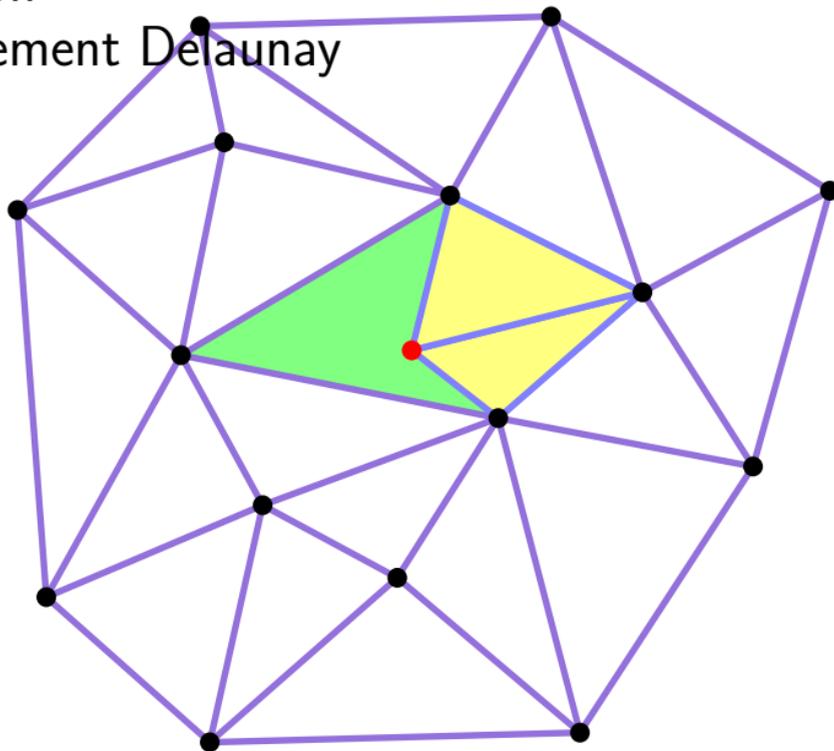
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

OUI

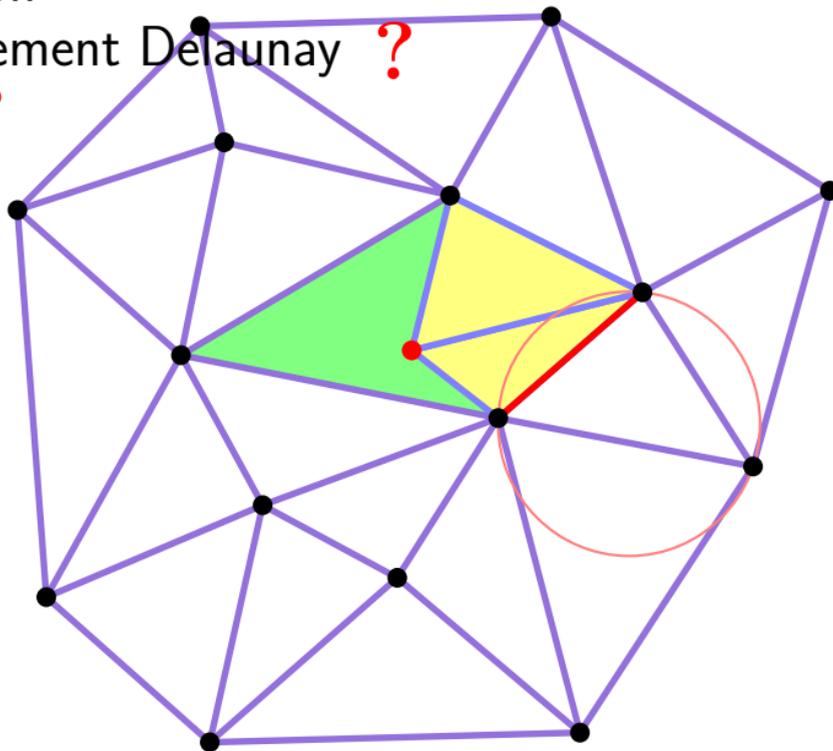


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



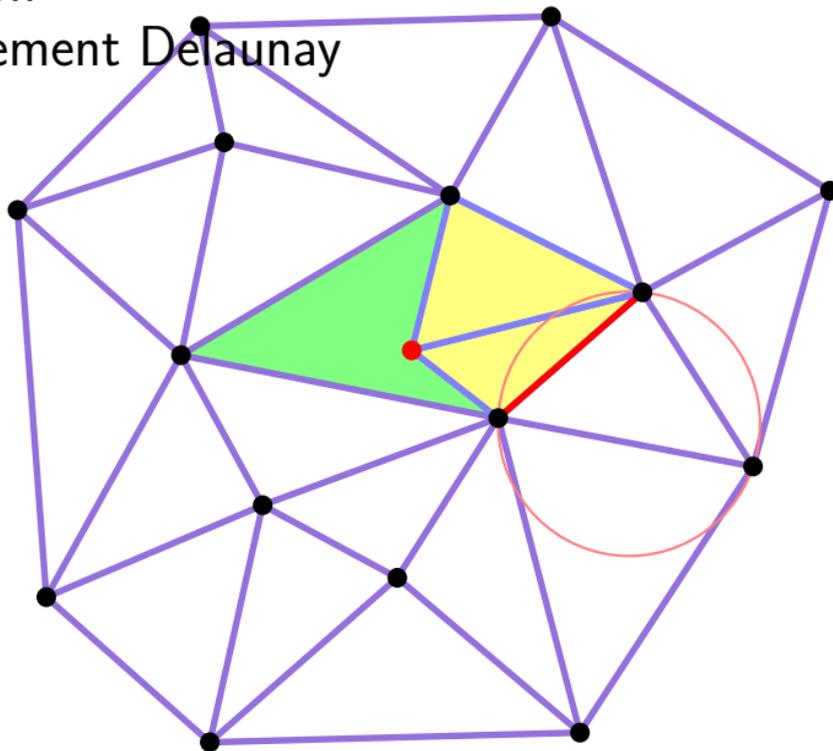
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

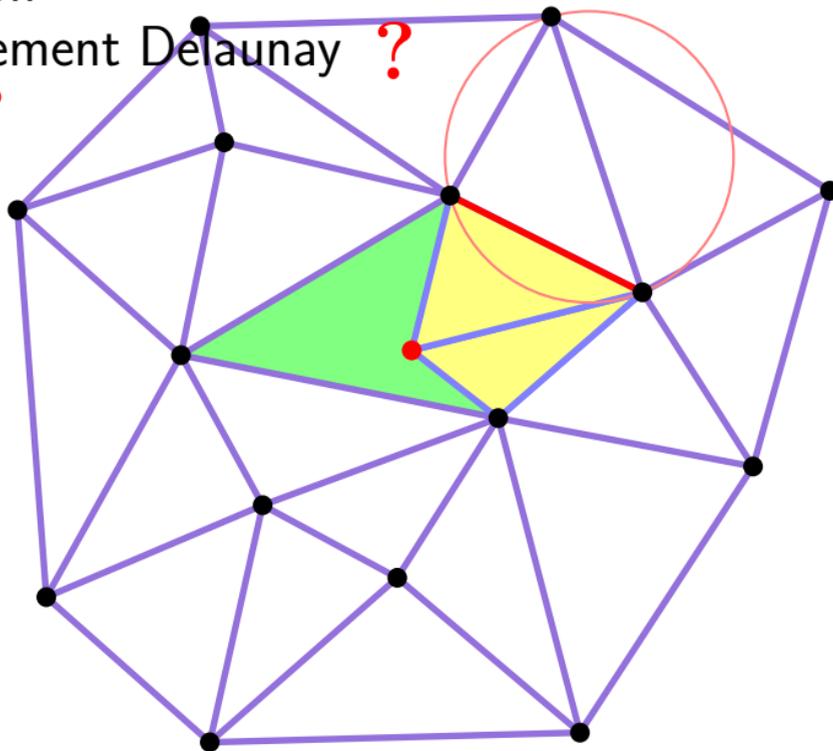


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



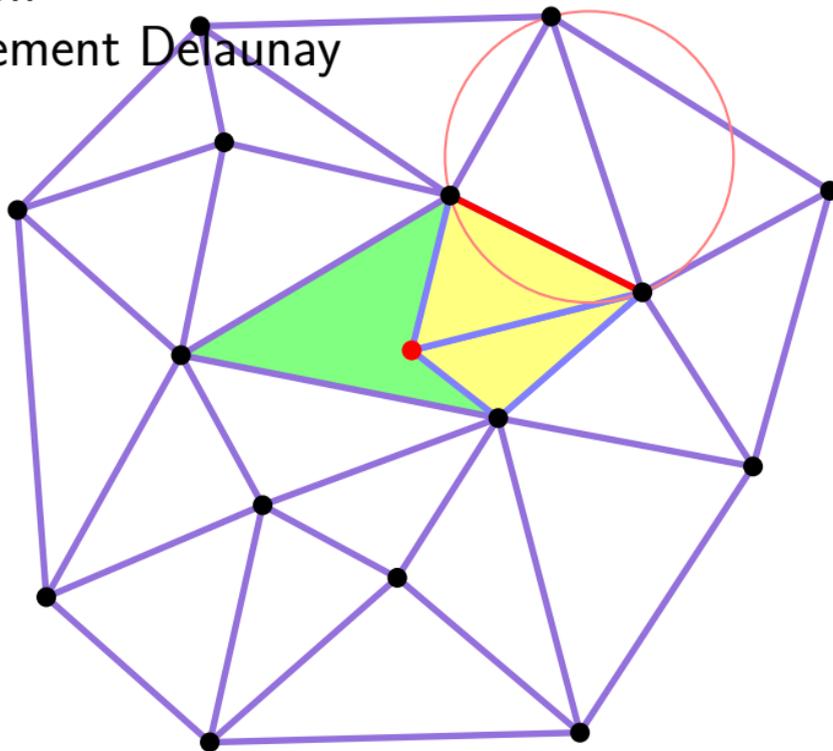
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

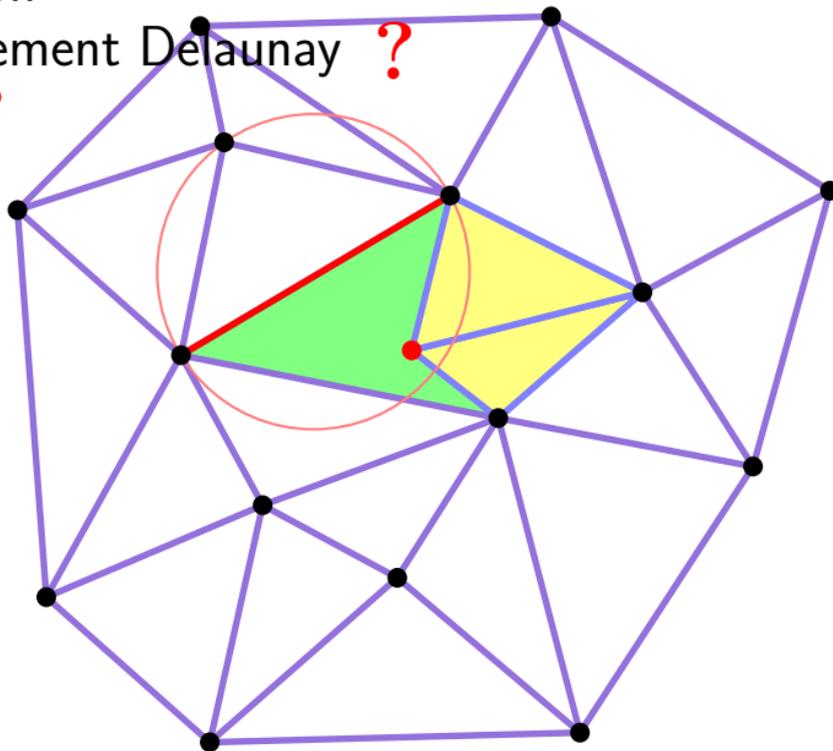


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



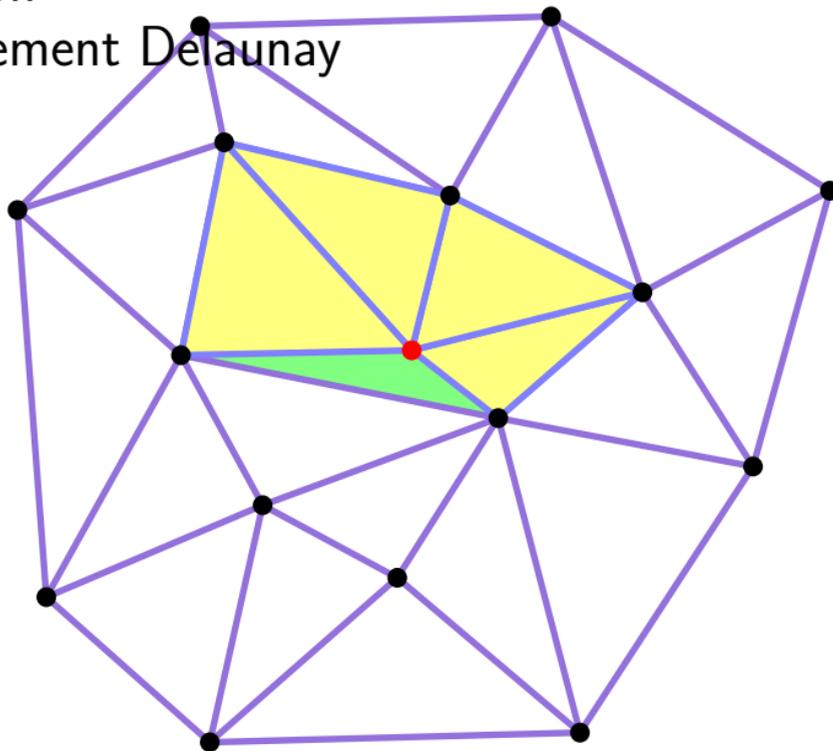
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

OUI

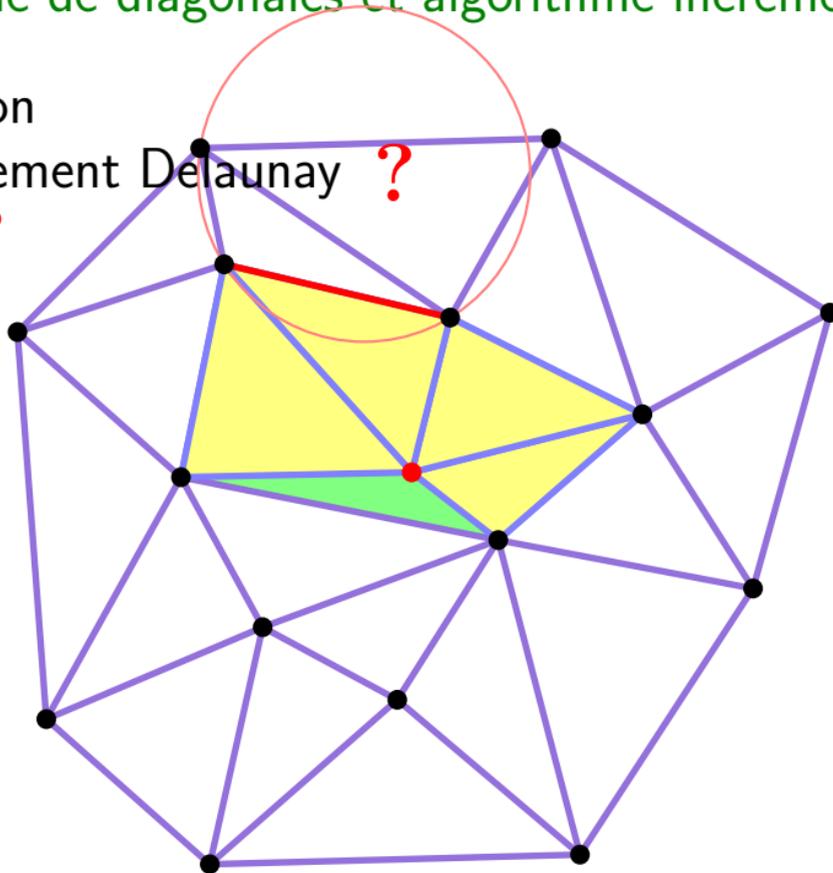


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



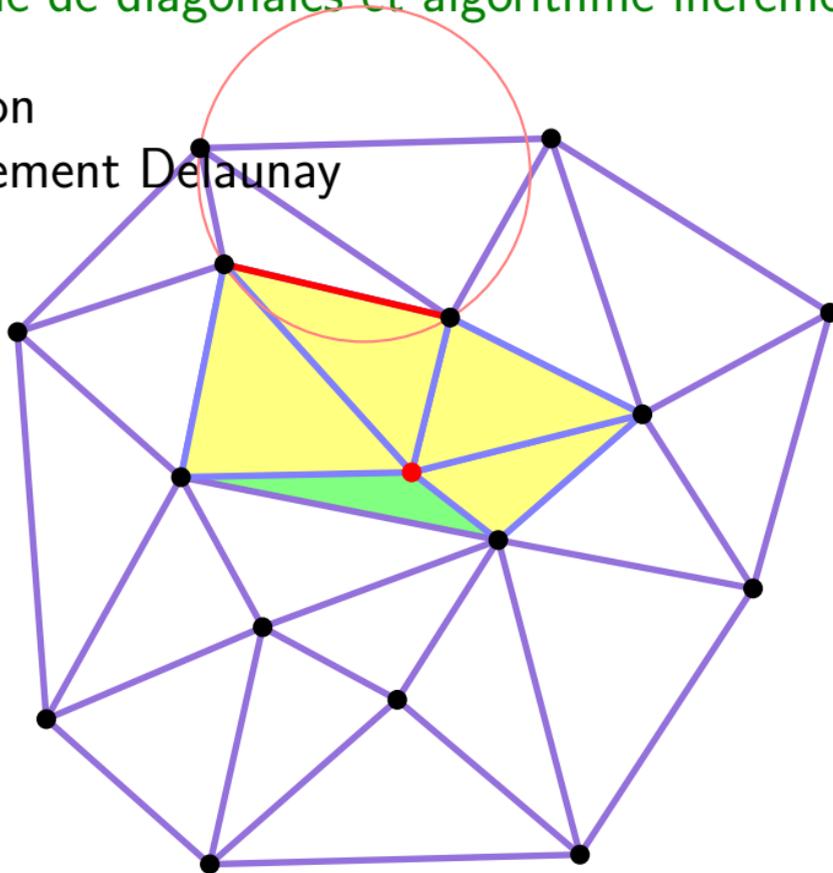
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

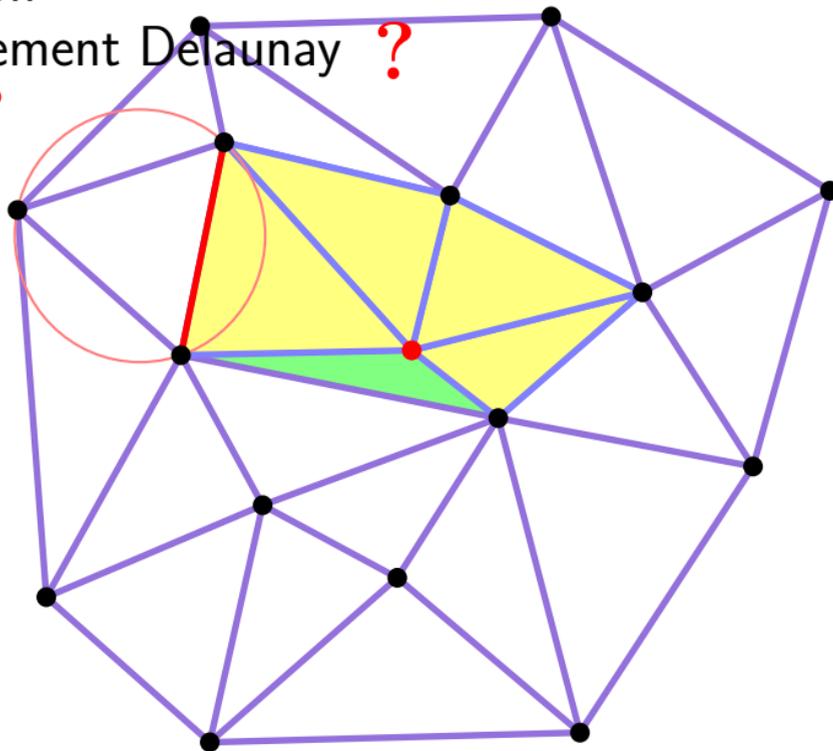


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



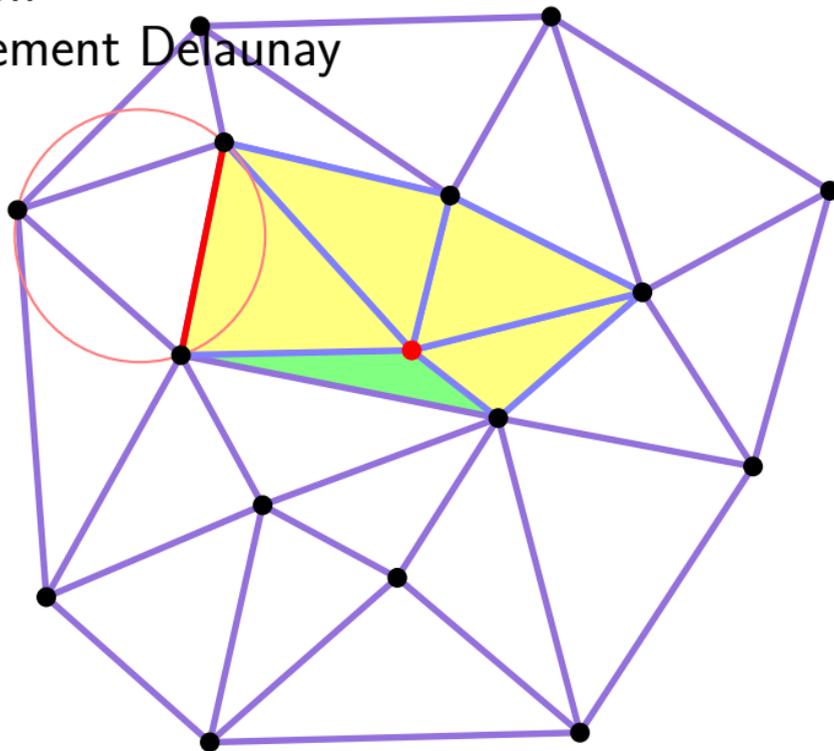
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

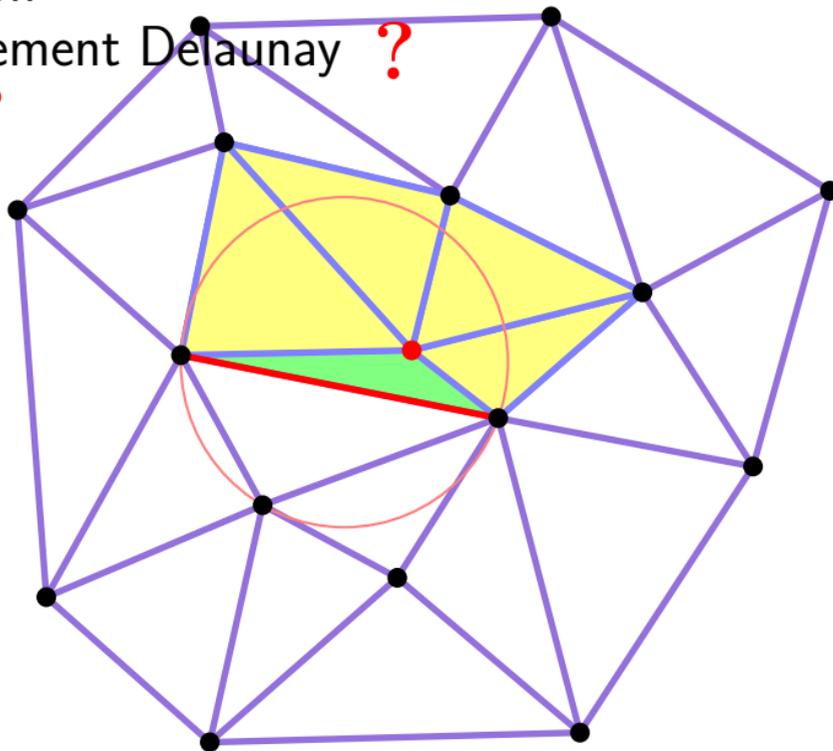


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



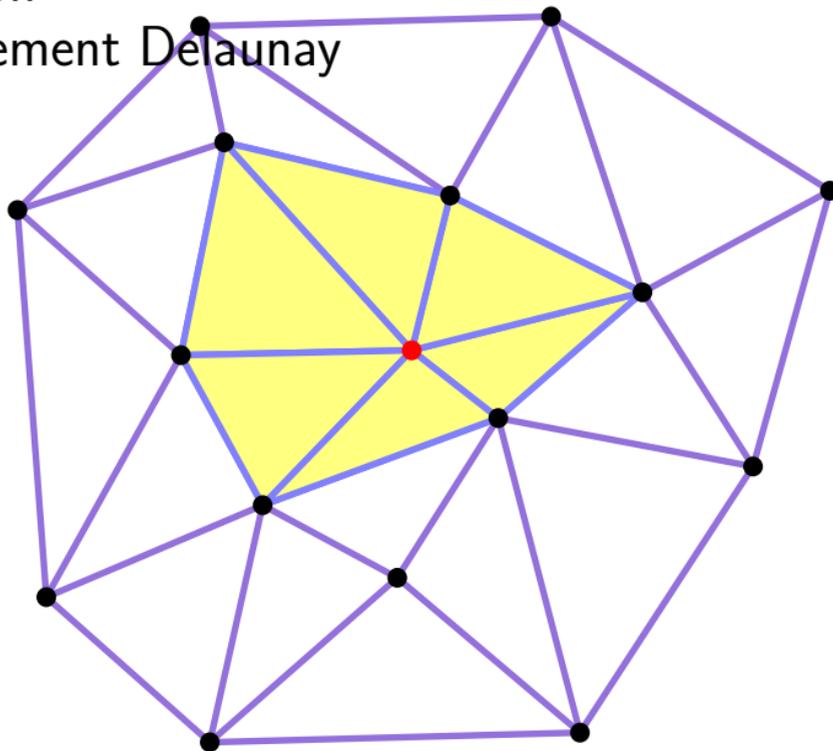
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

OUI

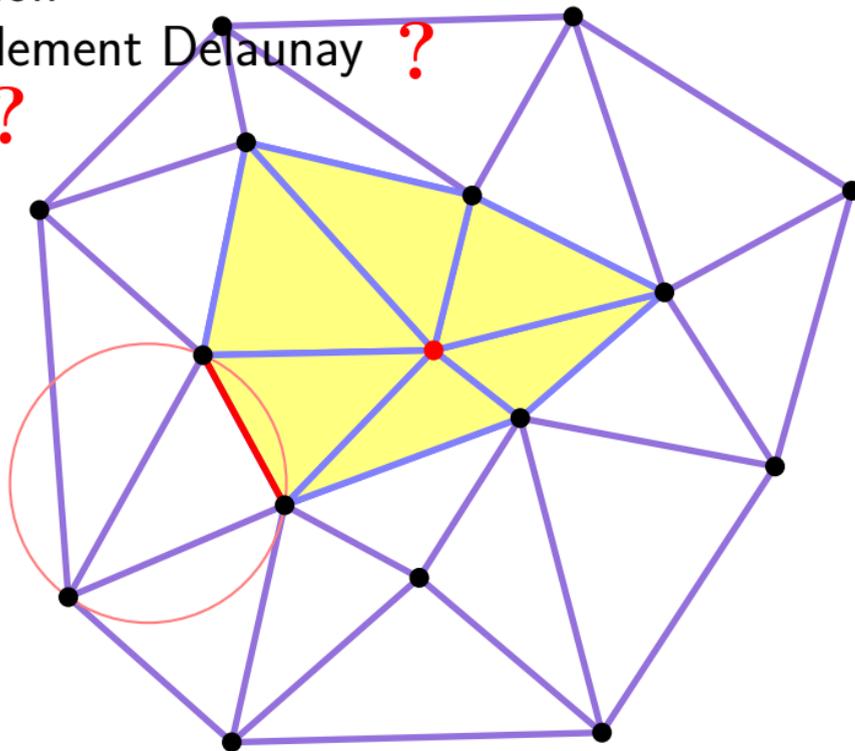


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



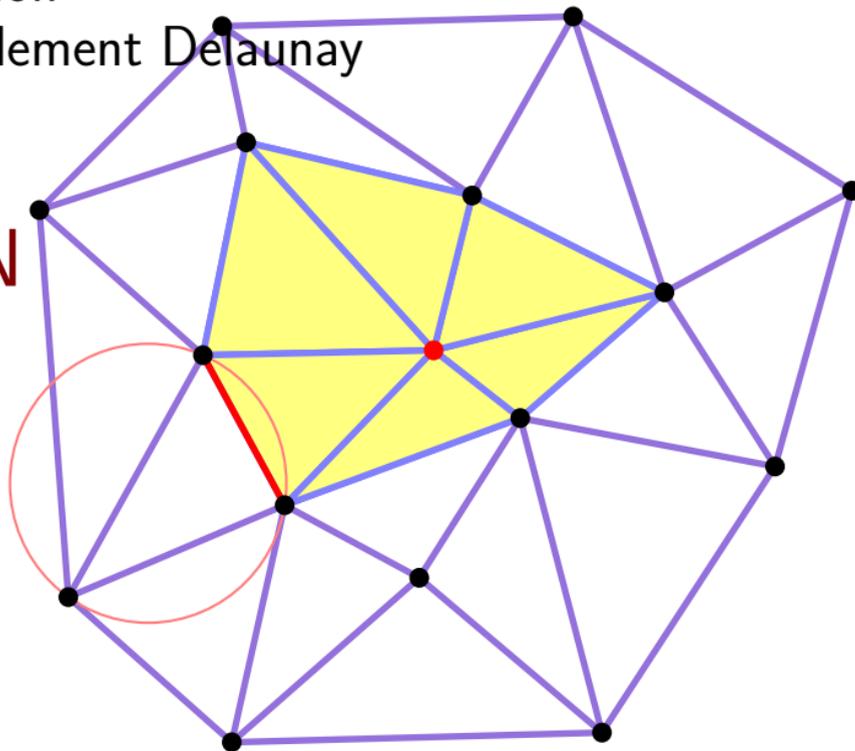
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

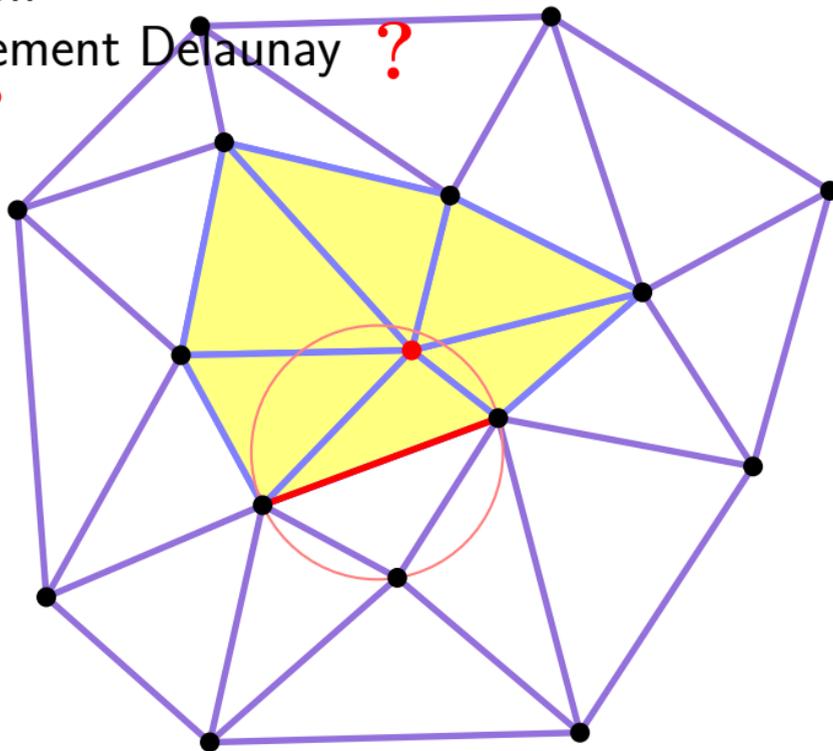


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



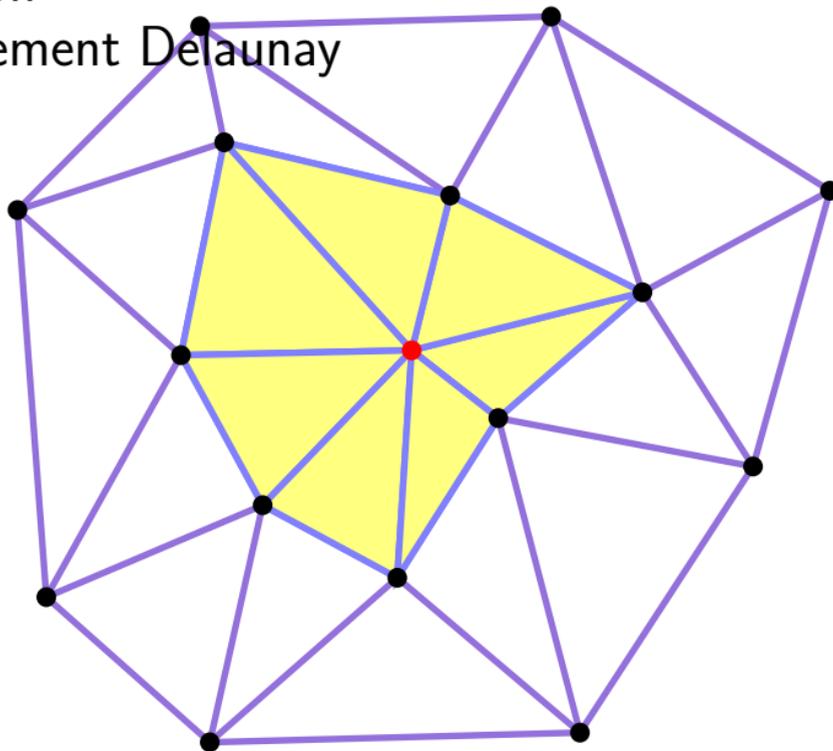
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

OUI

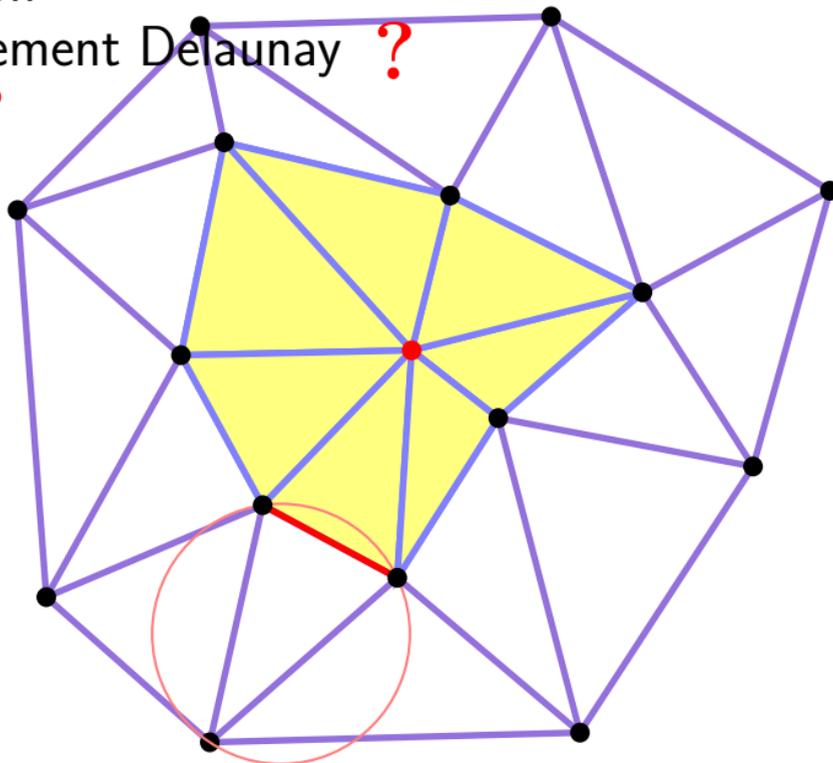


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



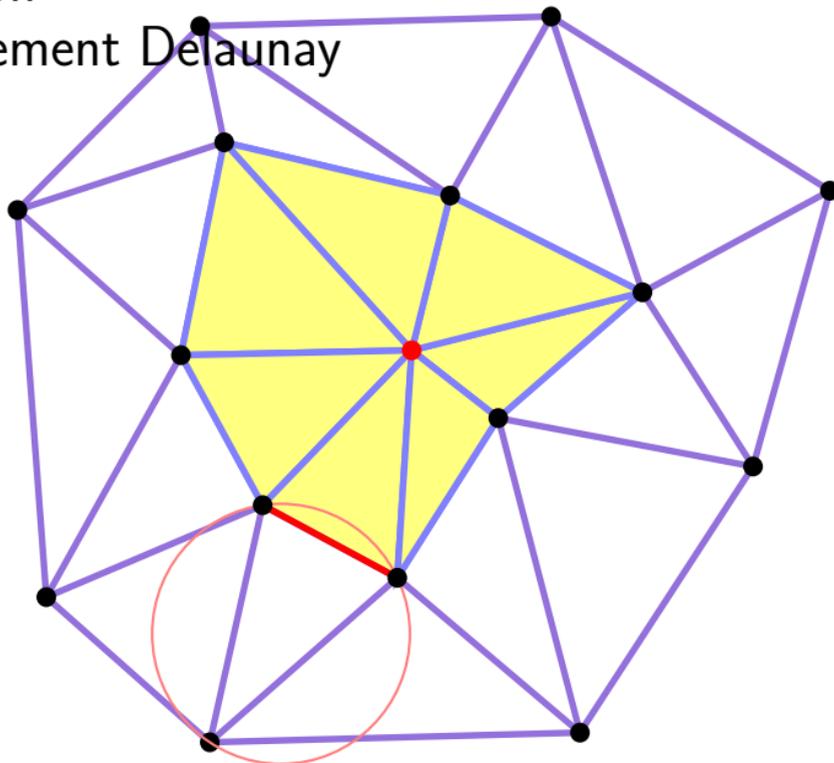
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

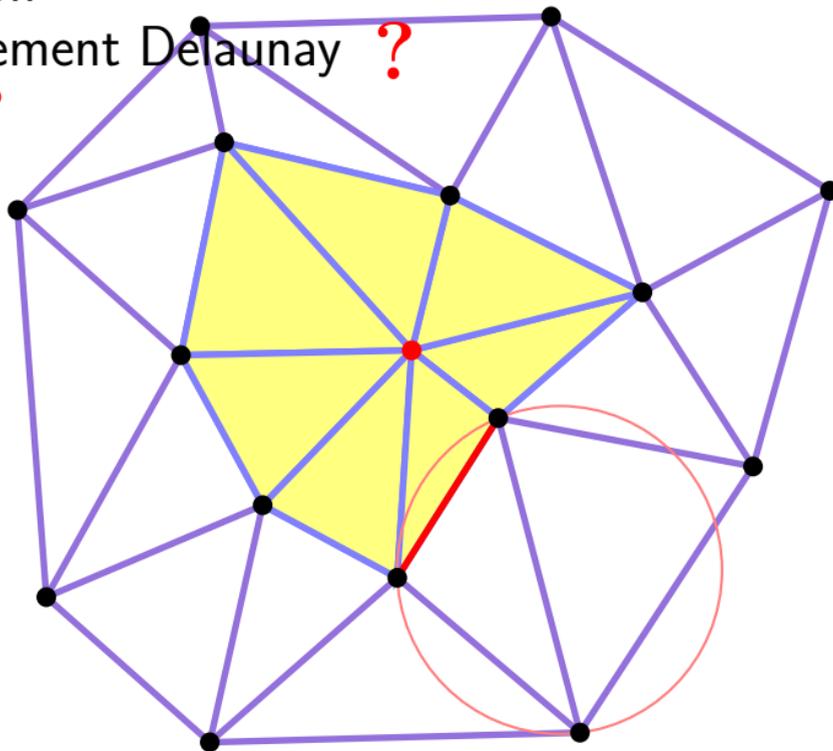


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



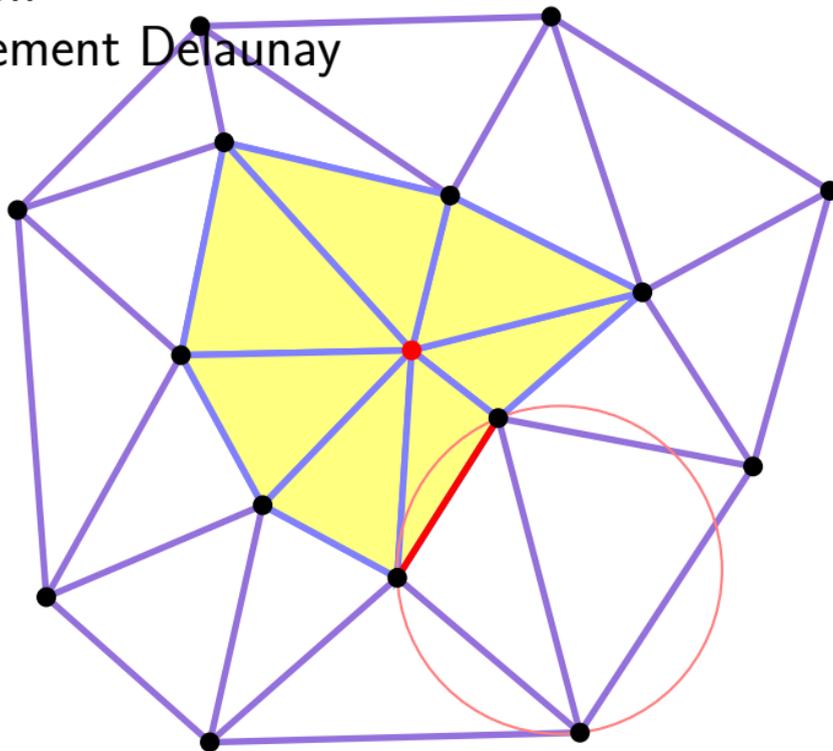
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

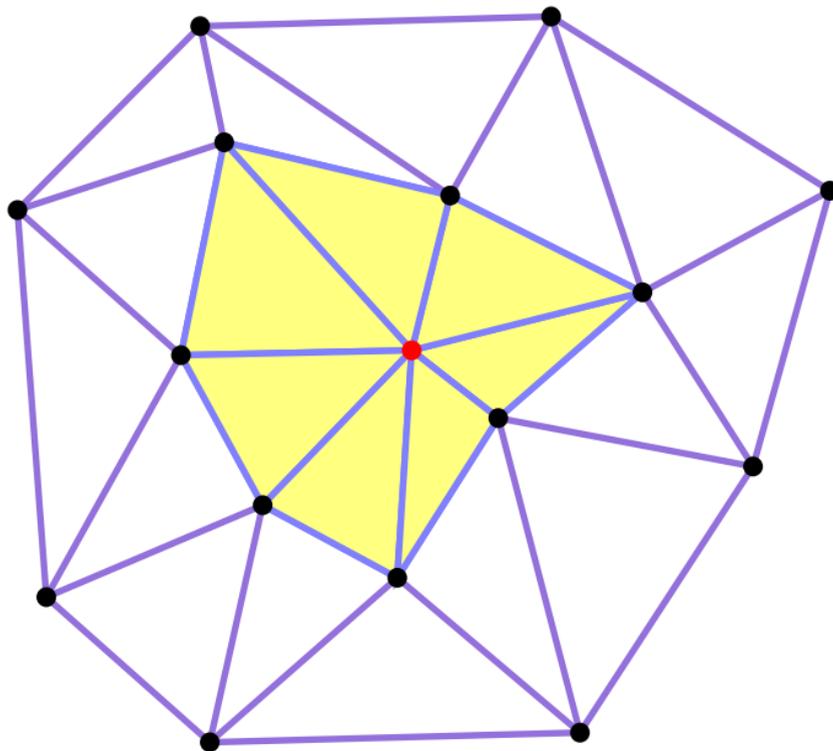
Bascule

NON

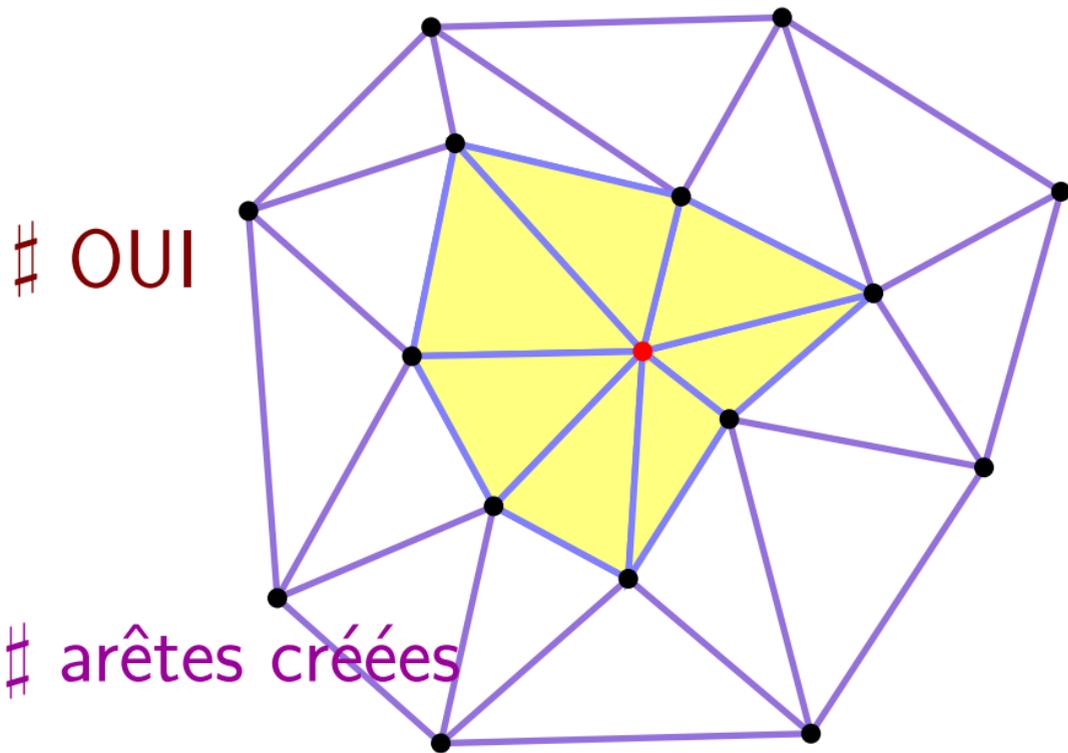


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

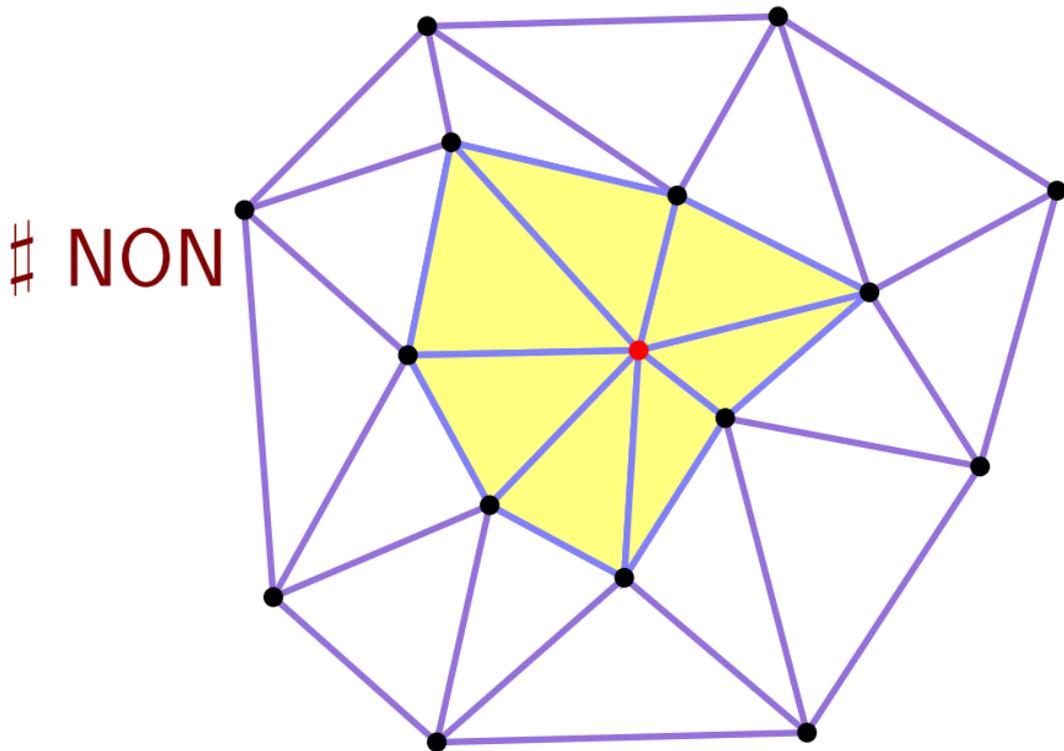
OUI



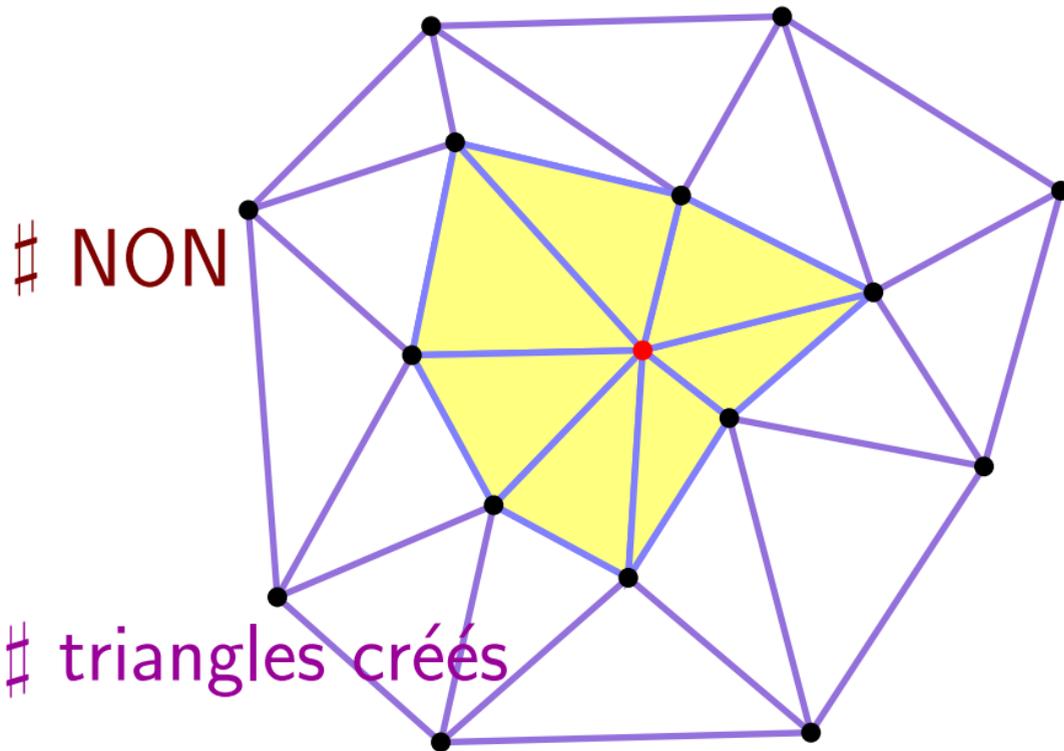
Bascule de diagonales et algorithme incrémental



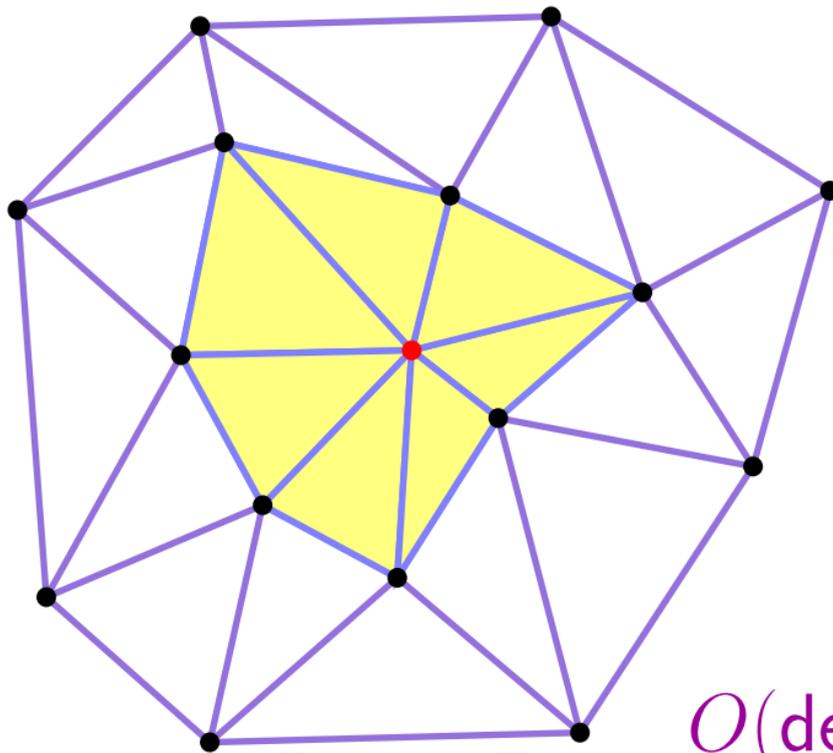
Bascule de diagonales et algorithme incrémental



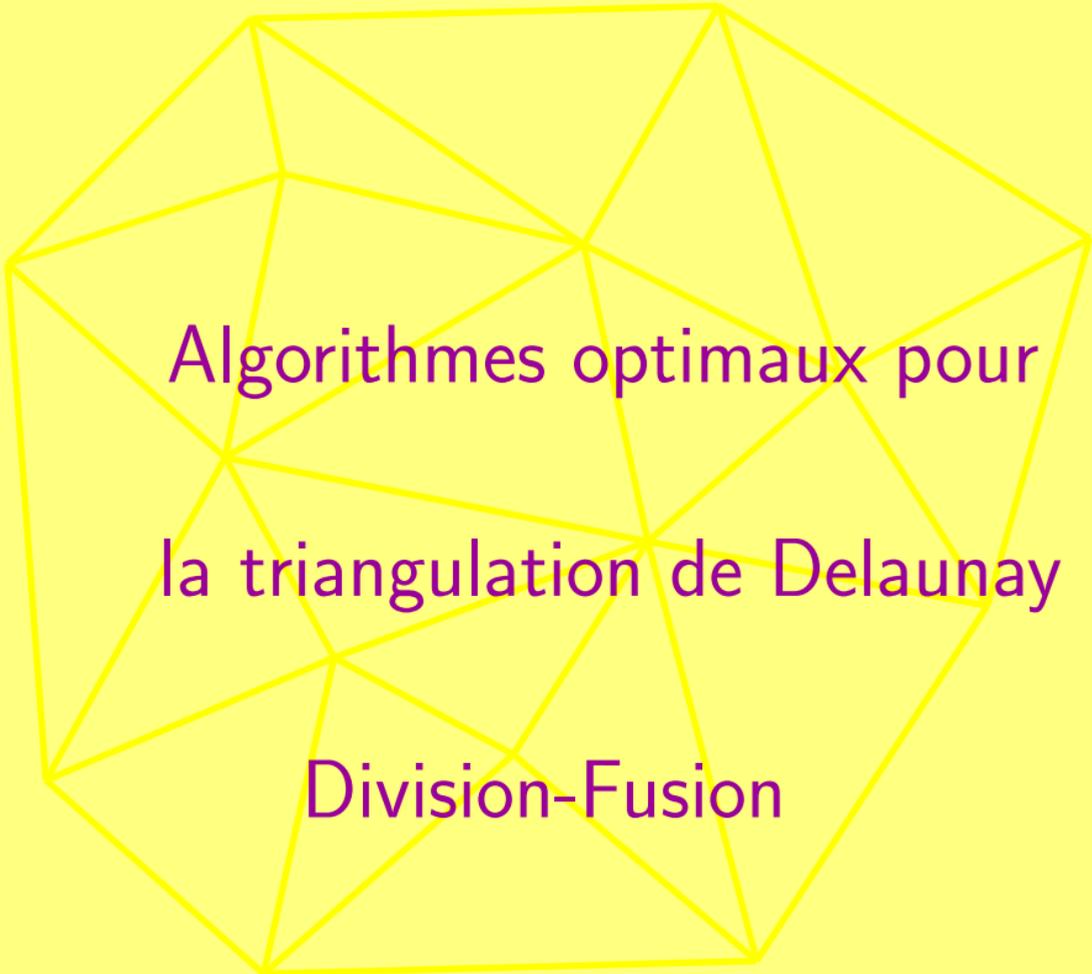
Bascule de diagonales et algorithme incrémental



Bascule de diagonales et algorithme incrémental



$$O(\text{degré}(\bullet))$$



Algorithmes optimaux pour
la triangulation de Delaunay

Division-Fusion

Division-Fusion

Technique classique

exemple: tri

Problème de taille n

 2 sous-problèmes de taille $\frac{n}{2}$

résolution récursive

fusion

Division-Fusion

Problème de taille n

$f(n)$

$O(n)$

2 sous-problèmes de taille $\frac{n}{2}$

résolution récursive

$2 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right)$

fusion

$O(n)$

Division-Fusion

$$f(n) = O(n) + 2f\left(\frac{n}{2}\right)$$

Problème de taille n

$f(n)$

2 sous-problèmes de taille $\frac{n}{2}$

$O(n)$

résolution récursive

$2 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right)$

fusion

$O(n)$

Division-Fusion

$$f(n) = O(n) + 2f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} f(n) = & n + 2f\left(\frac{n}{2}\right) \\ & n + 2\left(\frac{n}{2} + 2f\left(\frac{n}{4}\right)\right) \\ & n + 2\left(\frac{n}{2} + 2\left(\frac{n}{4} + 2f\left(\frac{n}{8}\right)\right)\right) \\ & n + 2\frac{n}{2} + 2 \cdot 2\frac{n}{4} + \dots \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\log_2 n}$

$$f(n) = O(n \log n)$$

Division

Fusion facile !

Partition équilibrée

$O(n)$

Division

Fusion facile !

Partition par une droite

Partition équilibrée

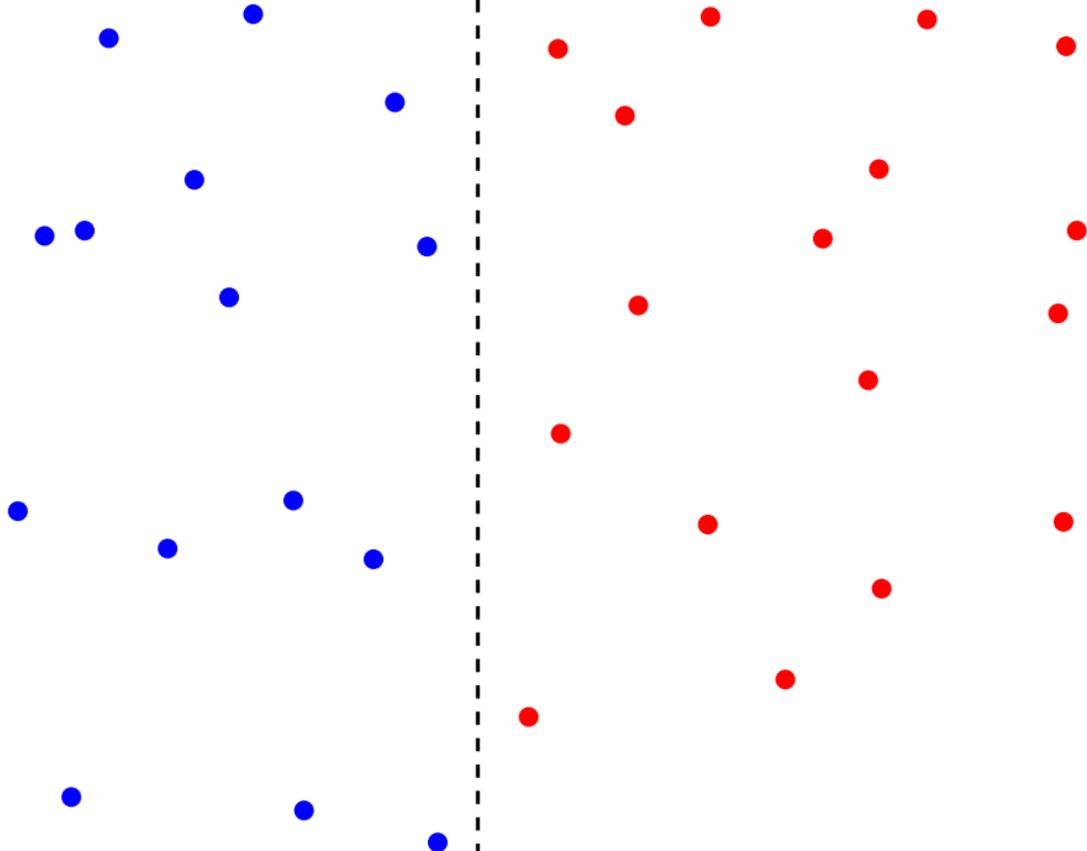
Droite médiane

$O(n)$

Médian linéaire ?

Prétraitement

Division

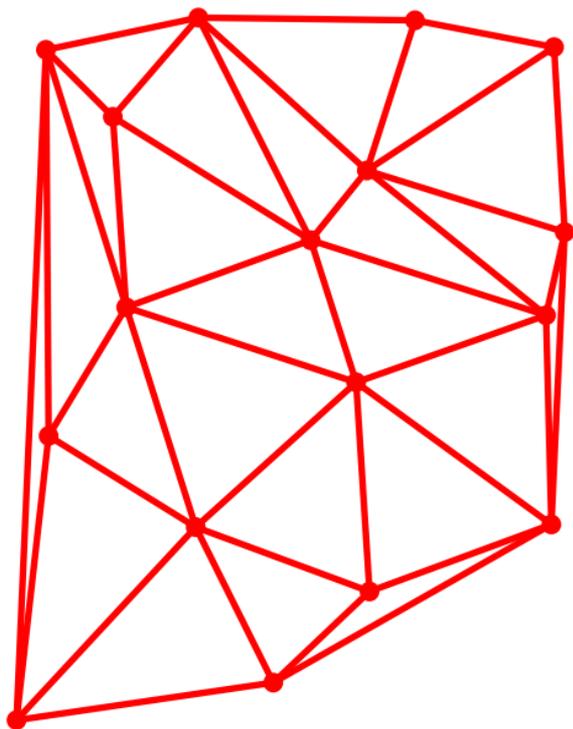
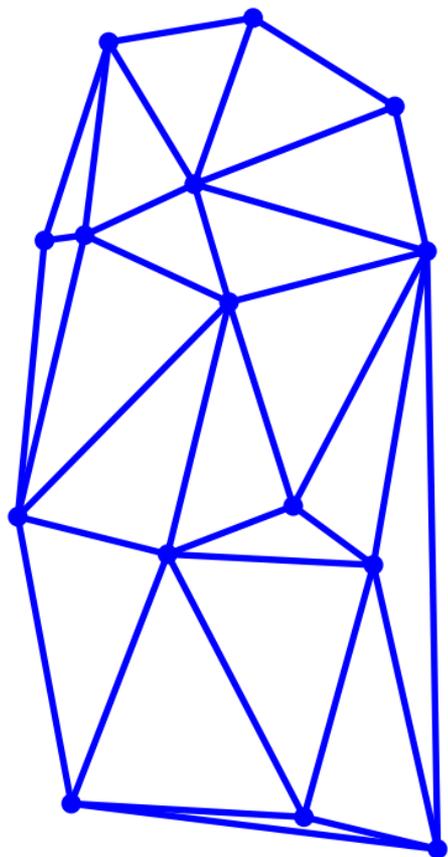


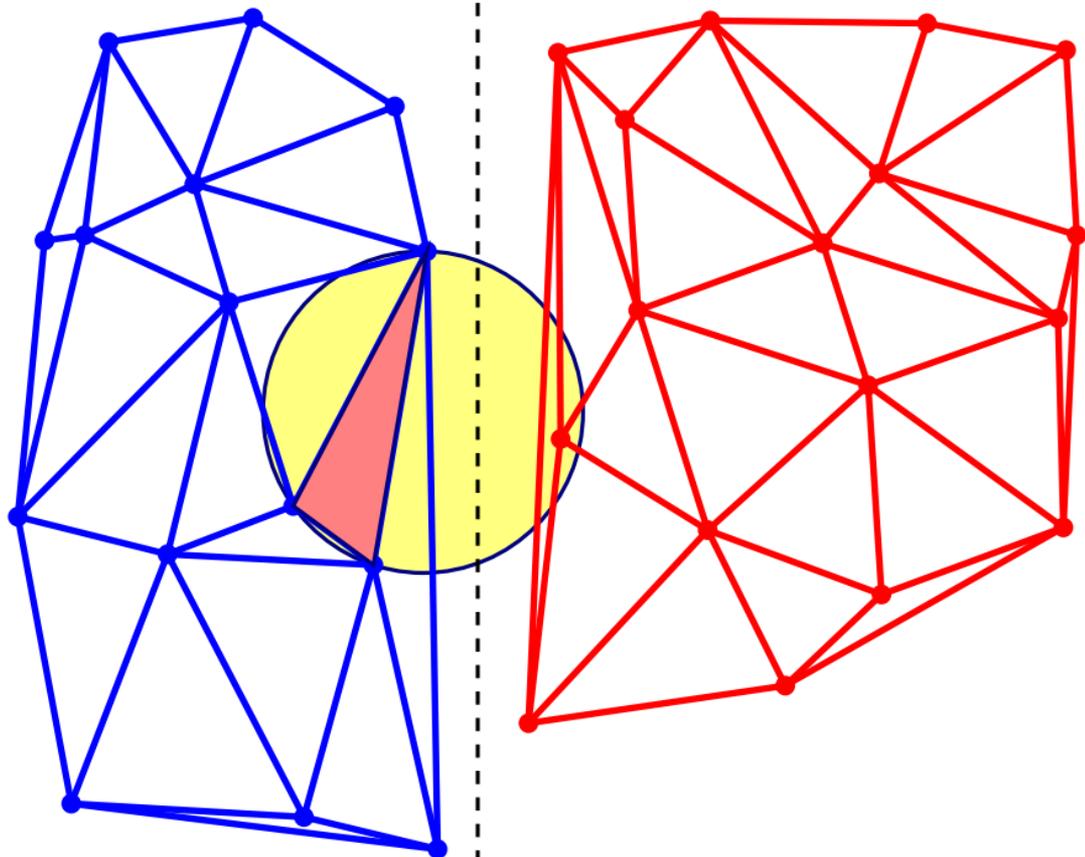
Division

Tri en x

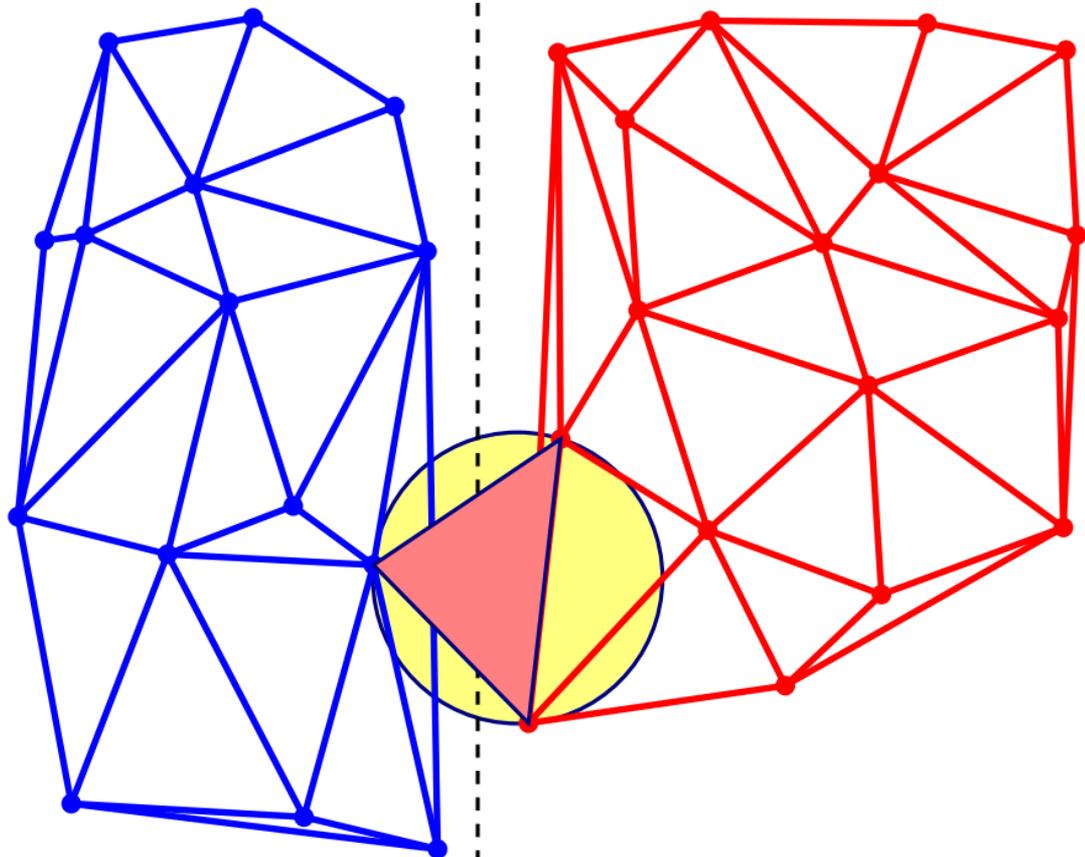
→ tous les médians



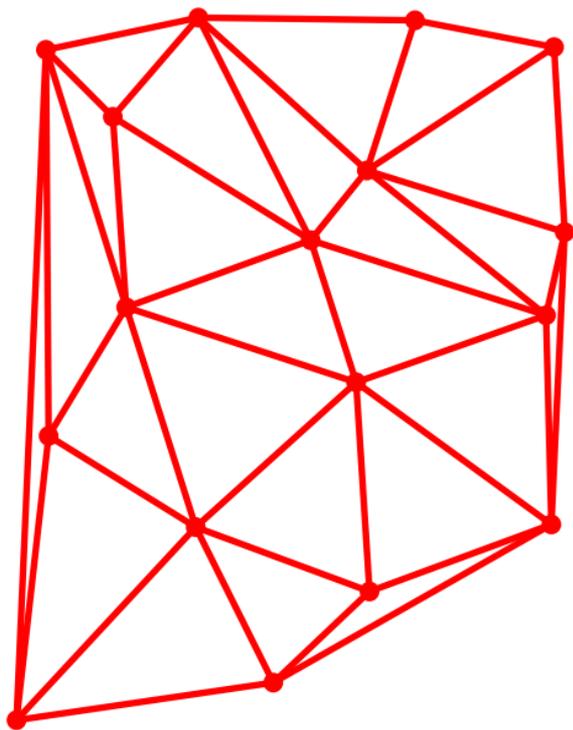
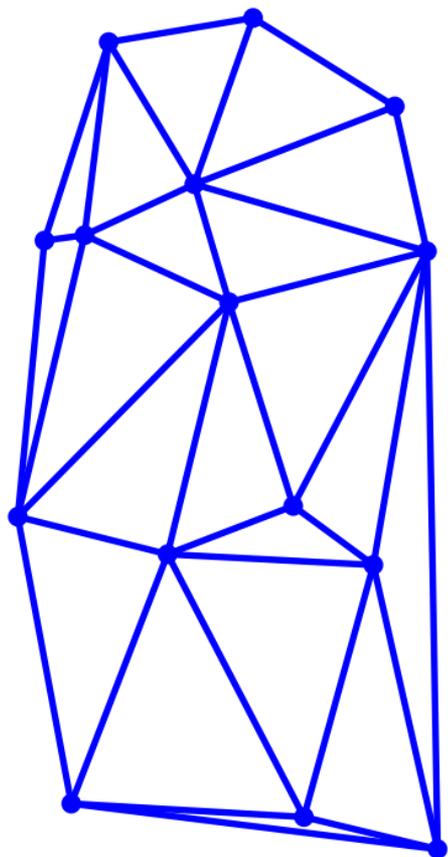




Triangles monocolores à éliminer

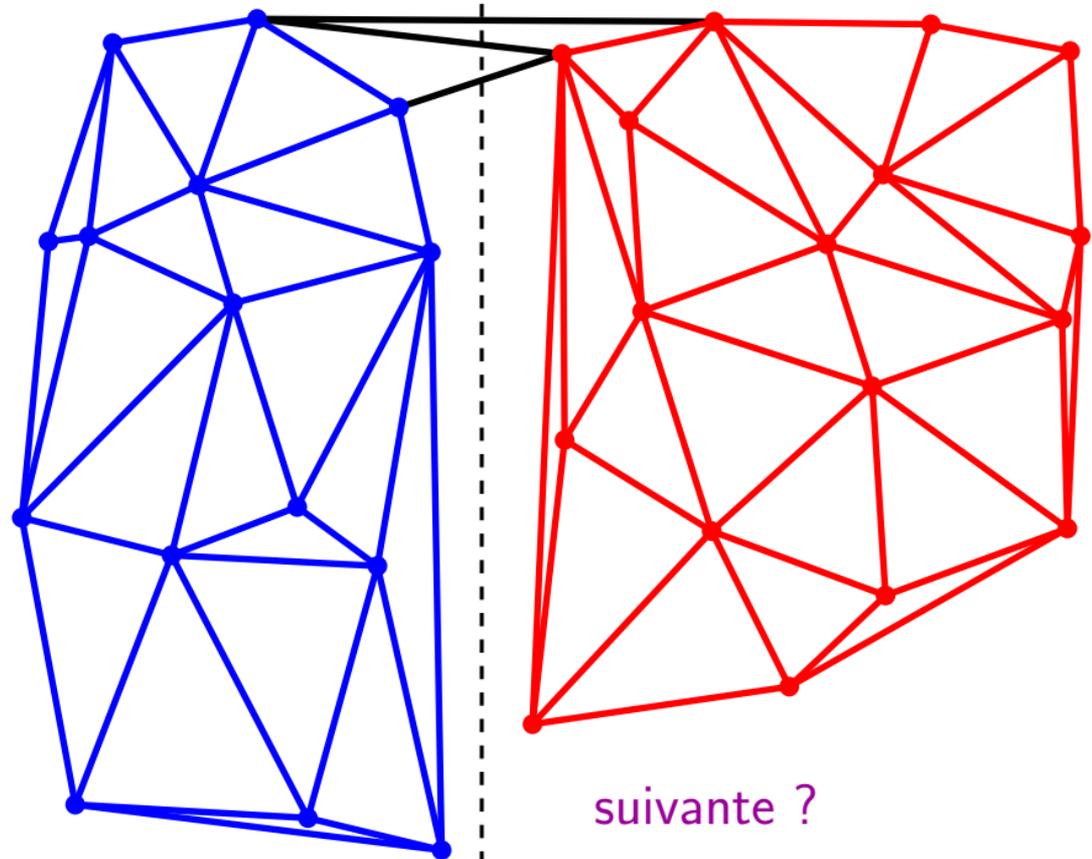


Triangles bicolores à construire



Construction des arêtes bicolorées

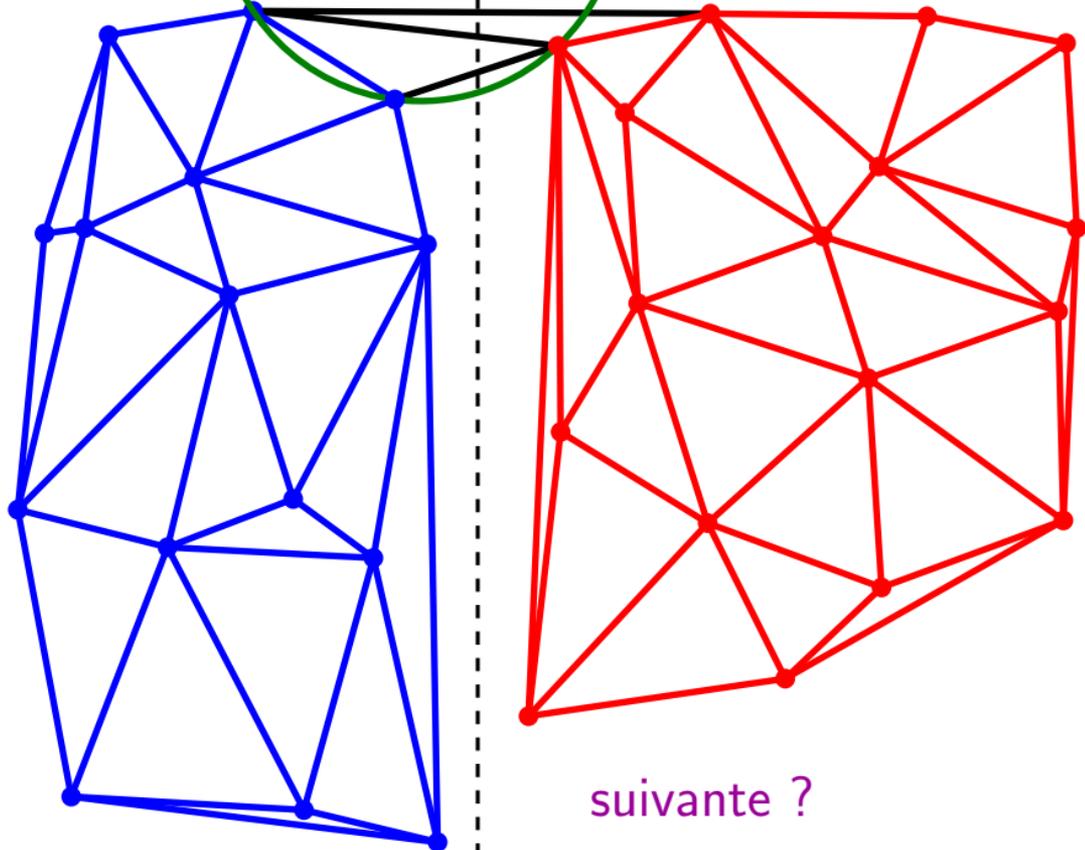
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolorées

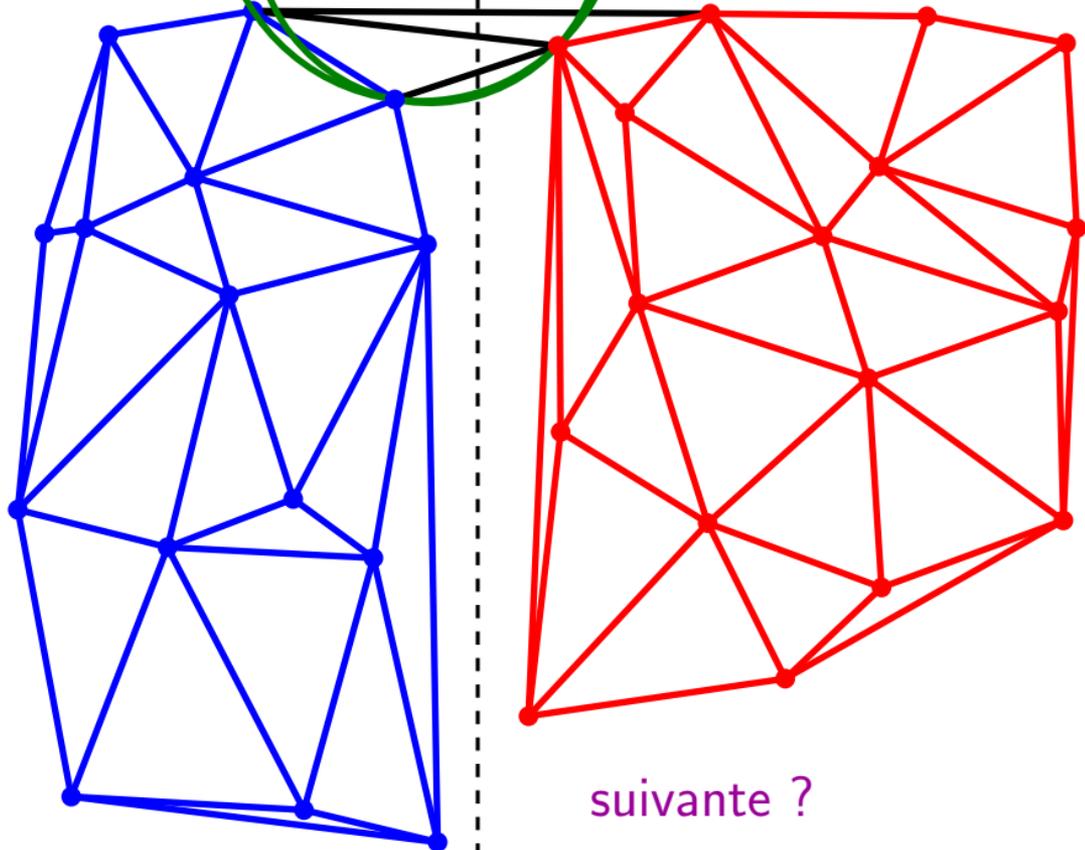
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolorées

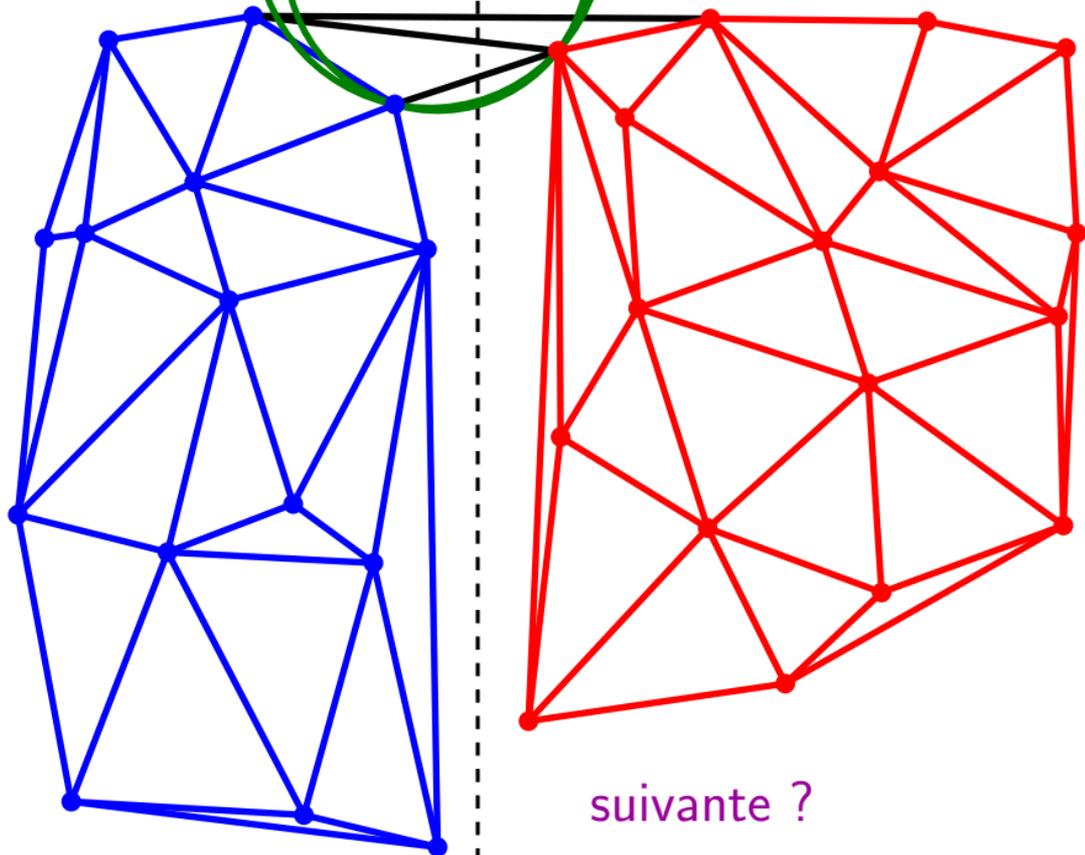
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolores

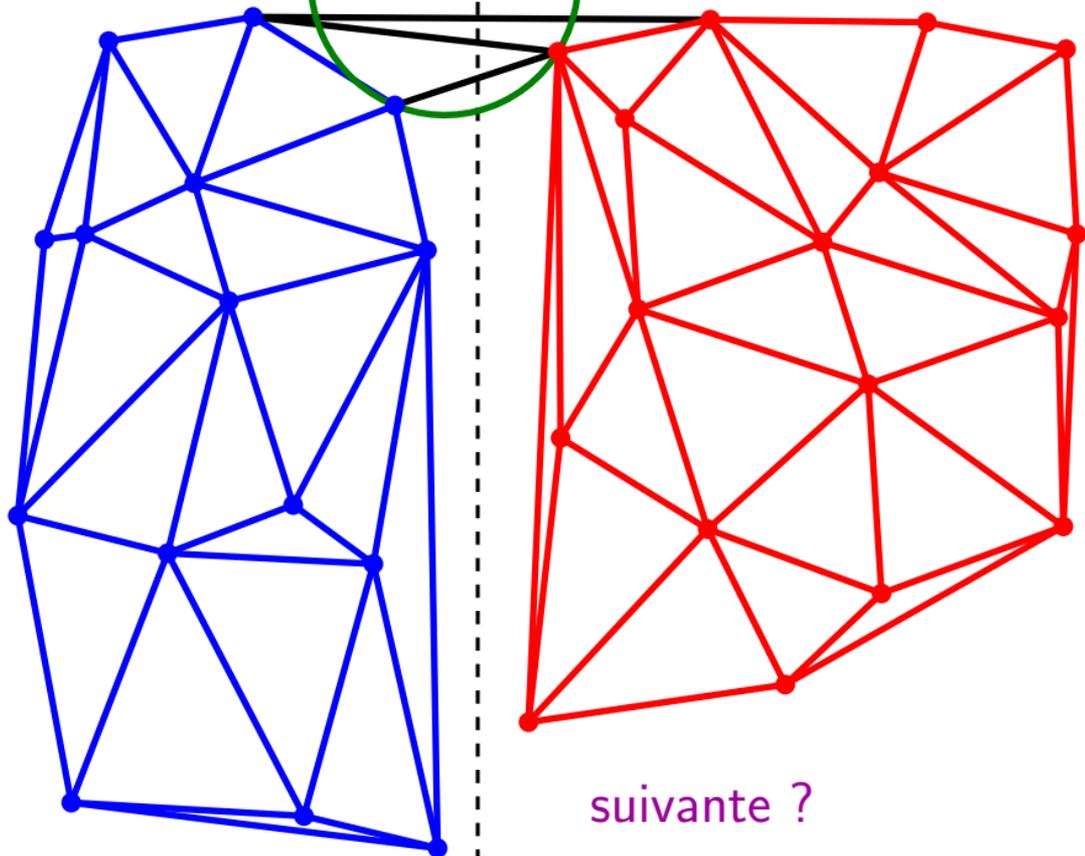
du haut vers le bas



suivante ?

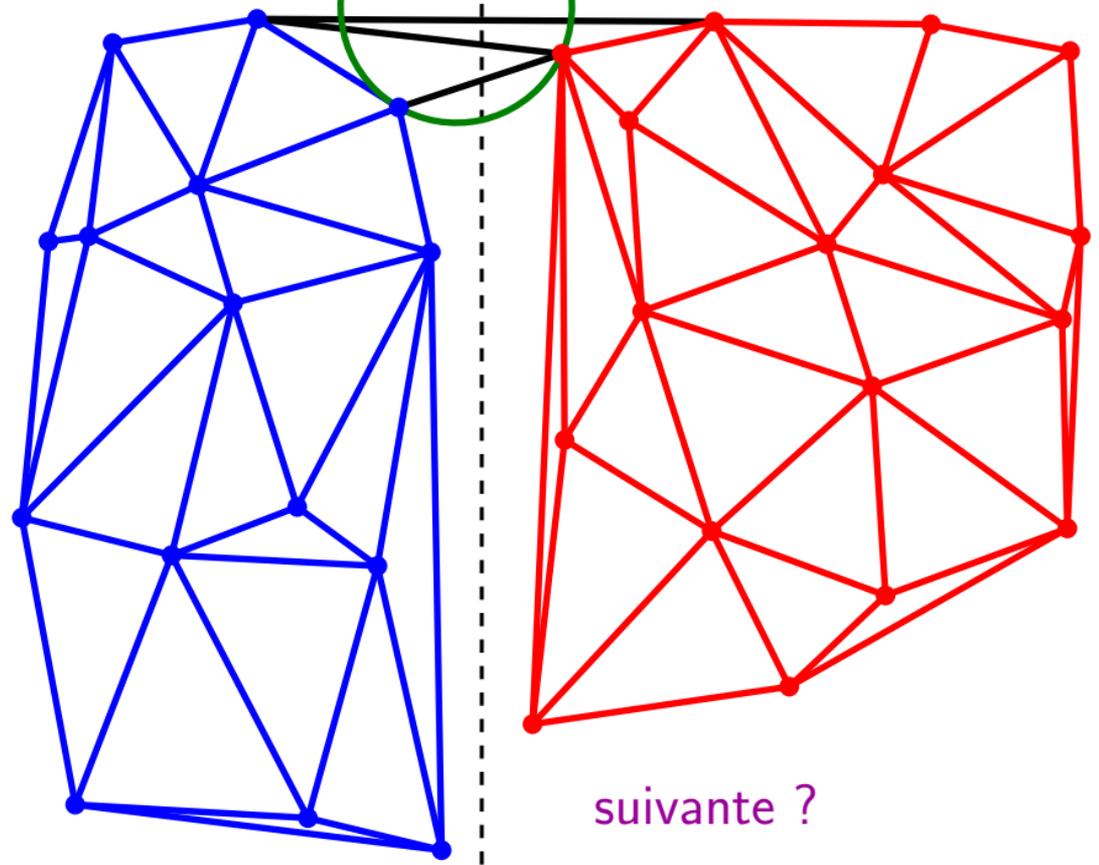
Construction des arêtes (bicolores)

du haut vers le bas



Construction des arêtes bicolorées

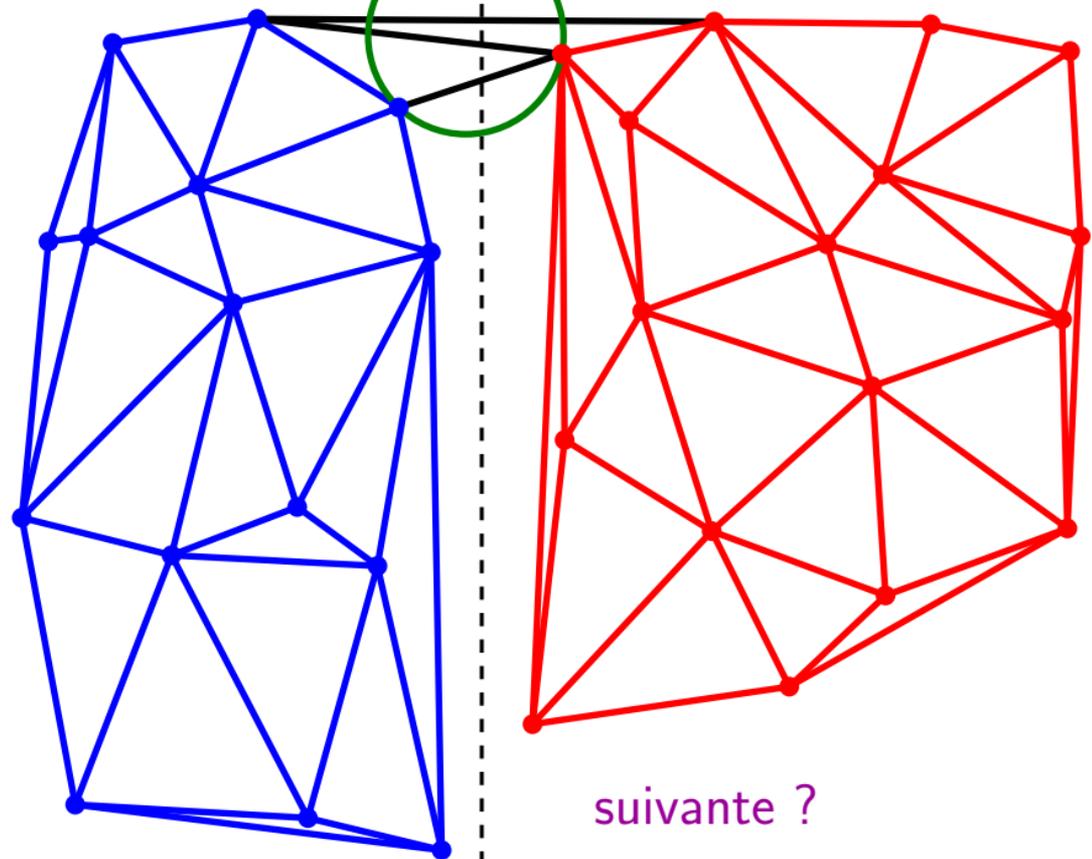
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolorées

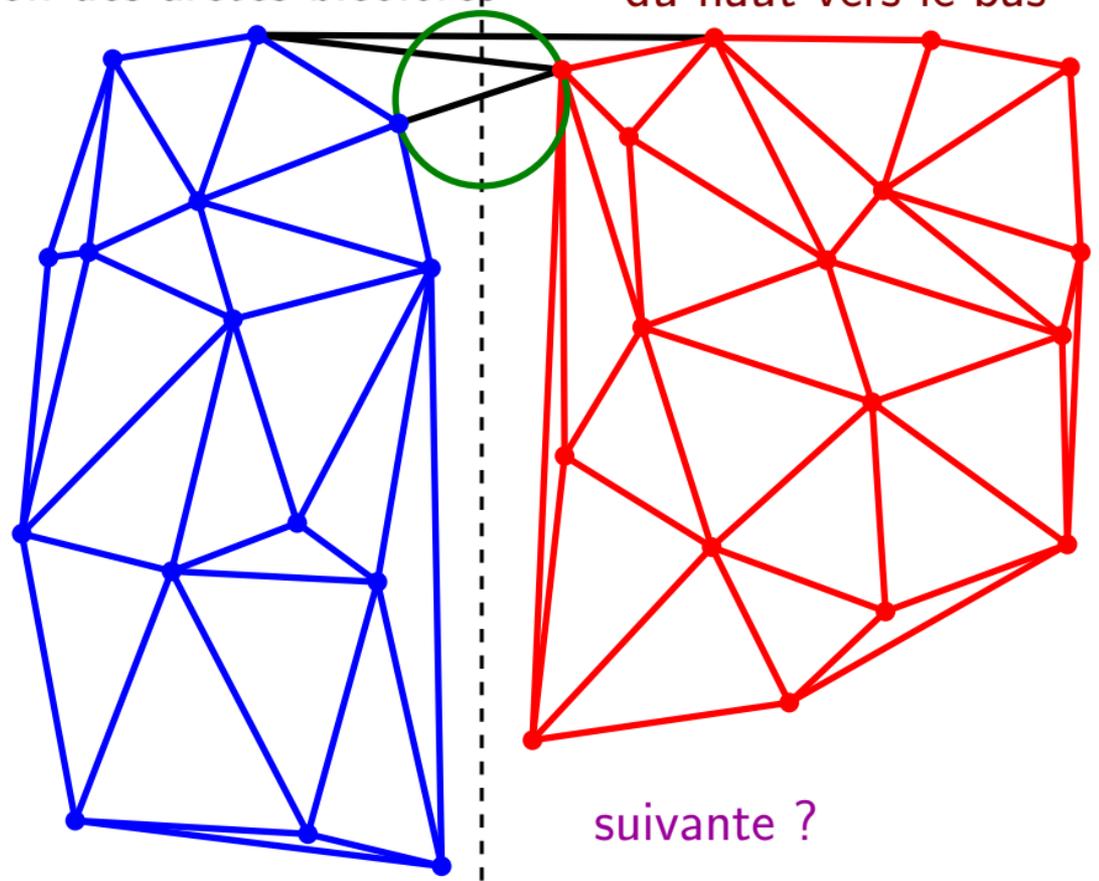
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolorées

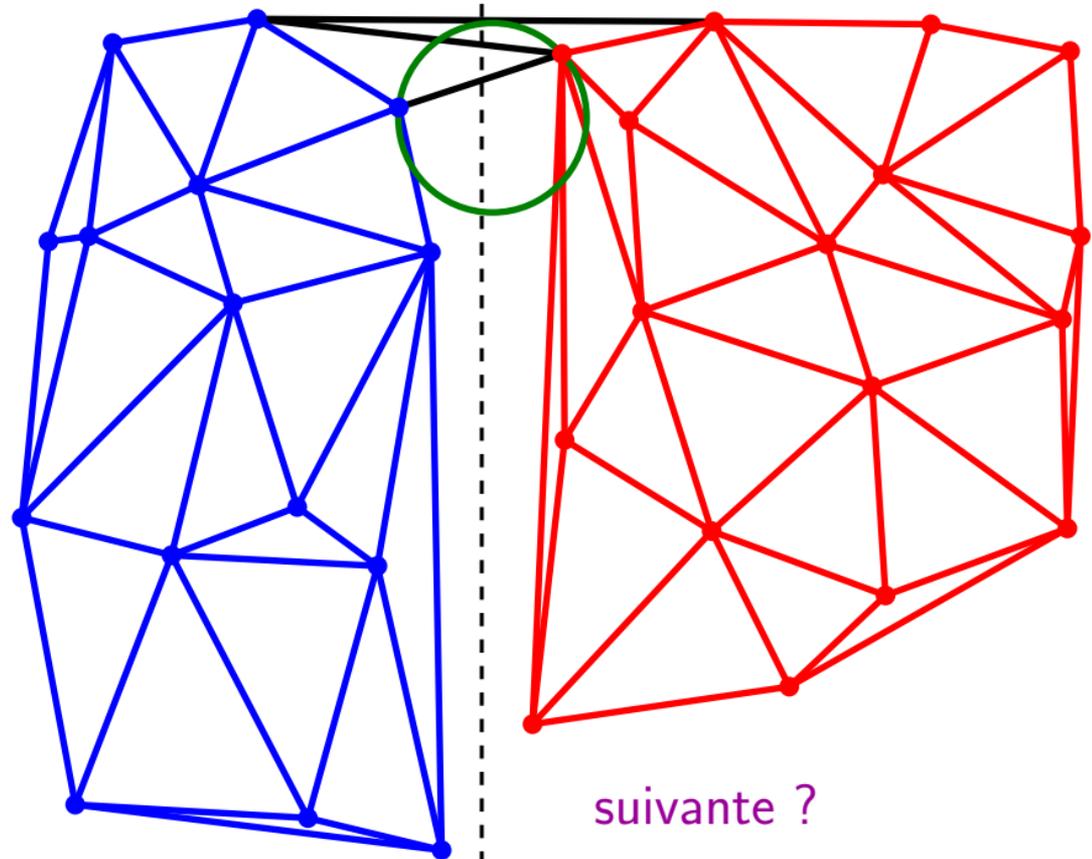
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolorées

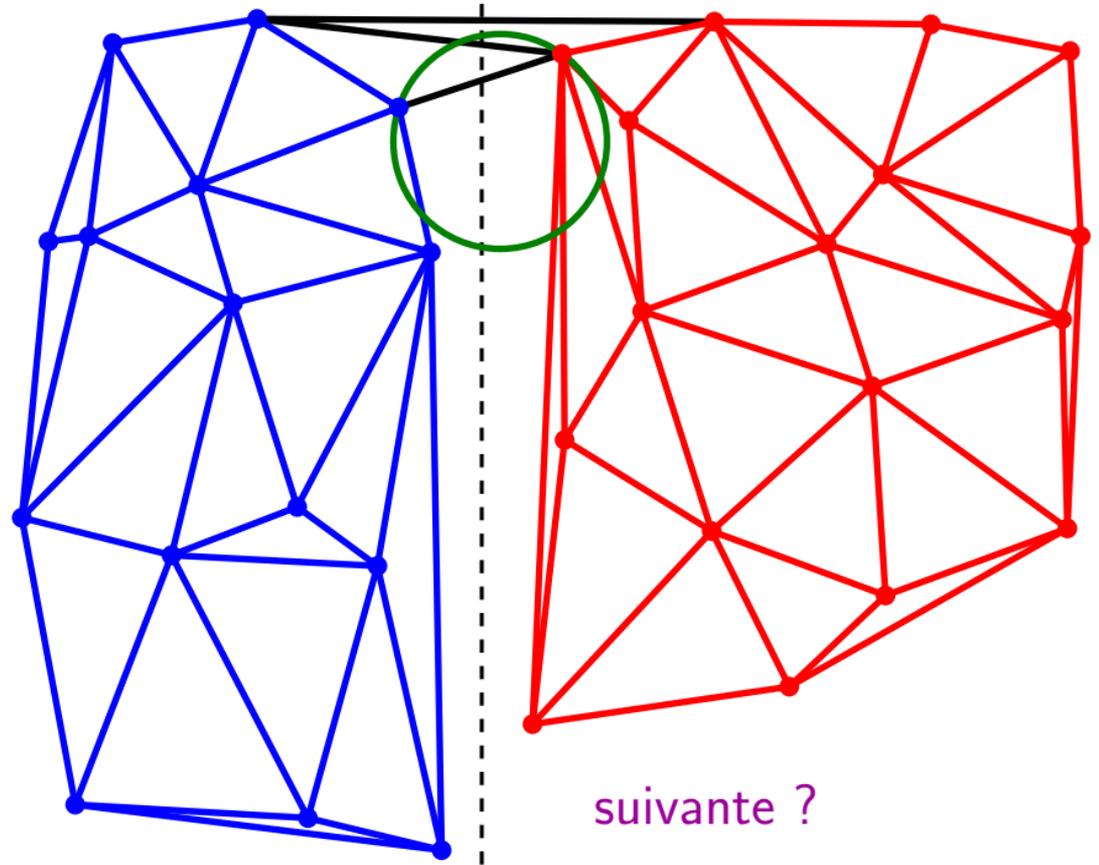
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolorées

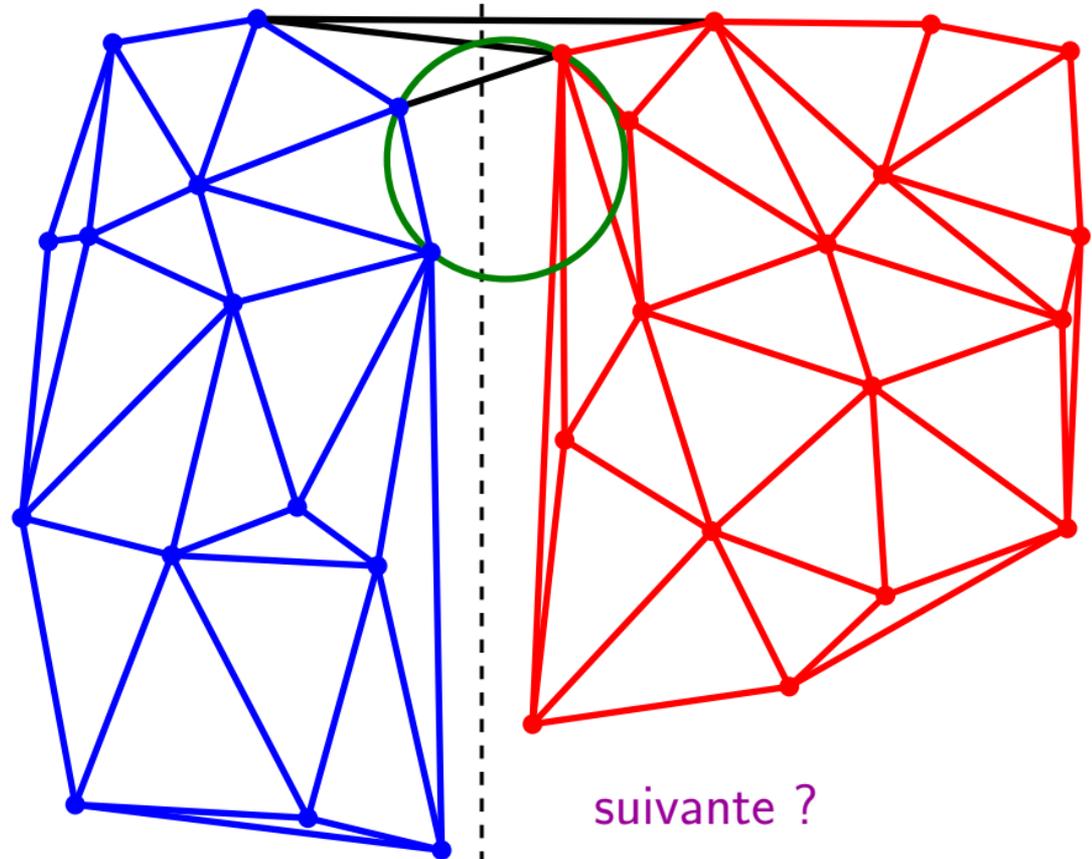
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolorées

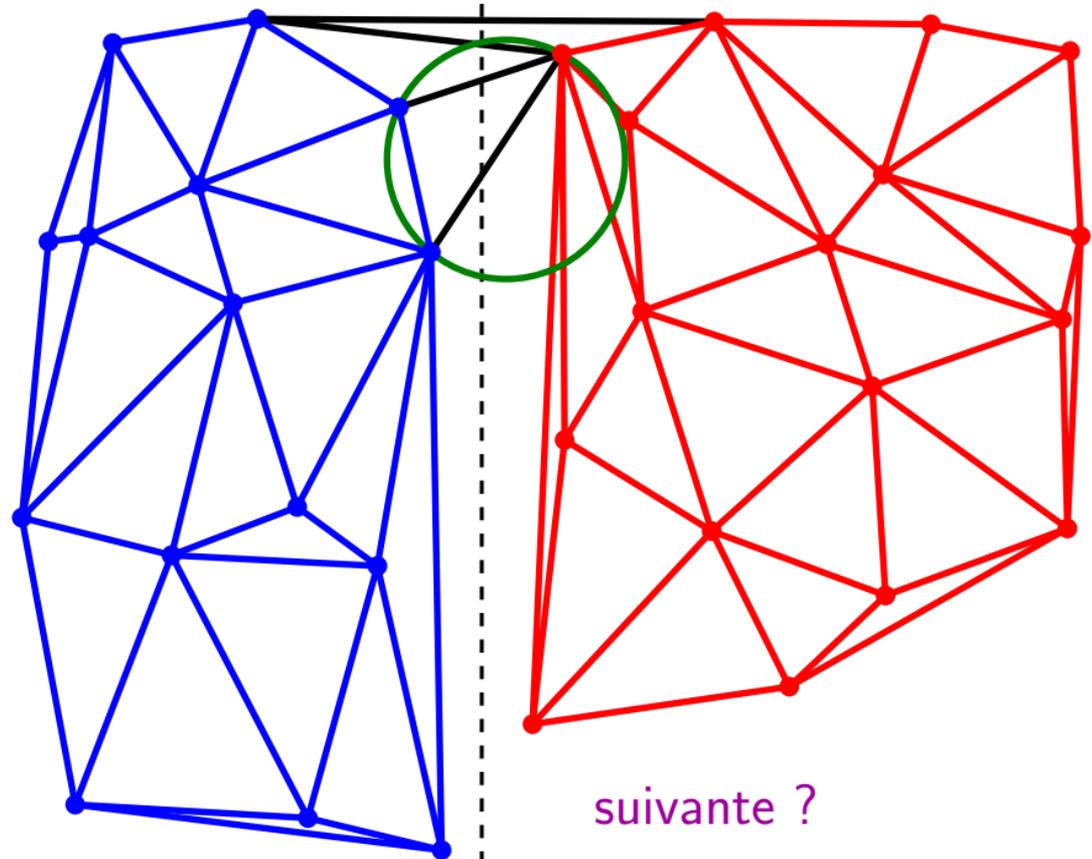
du haut vers le bas



suivante ?

Construction des arêtes bicolorées

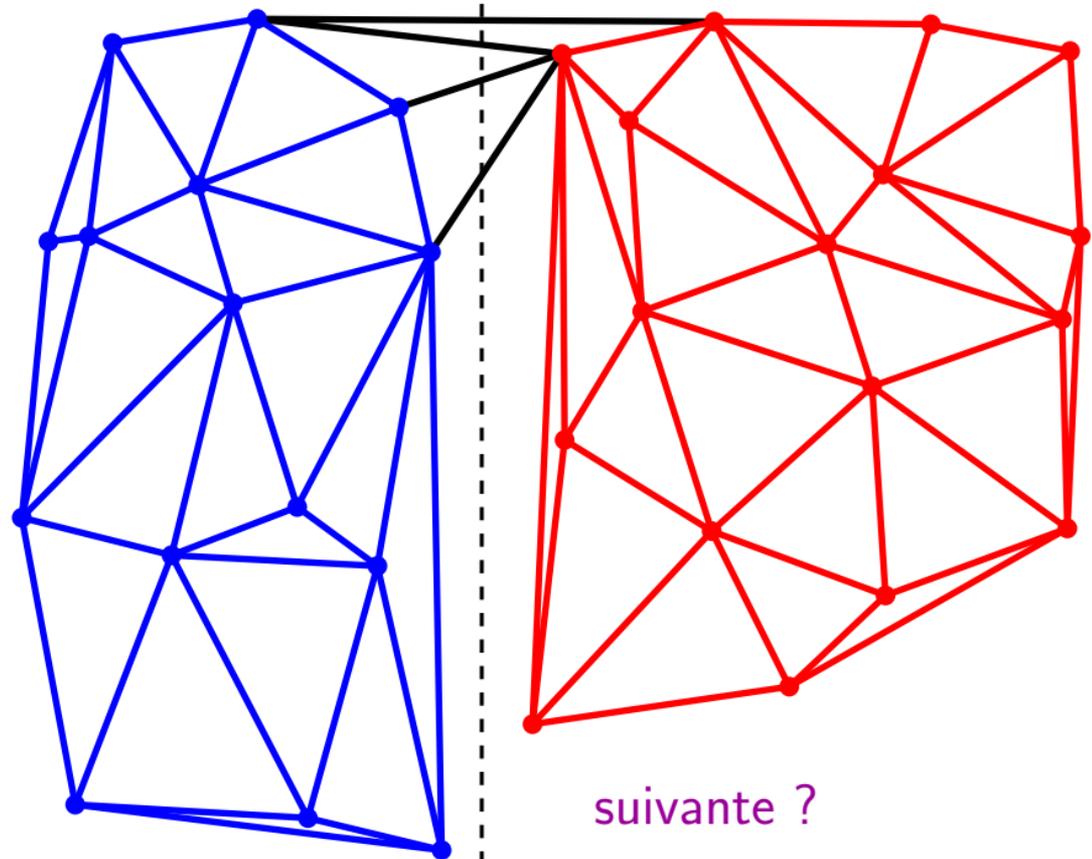
du haut vers le bas



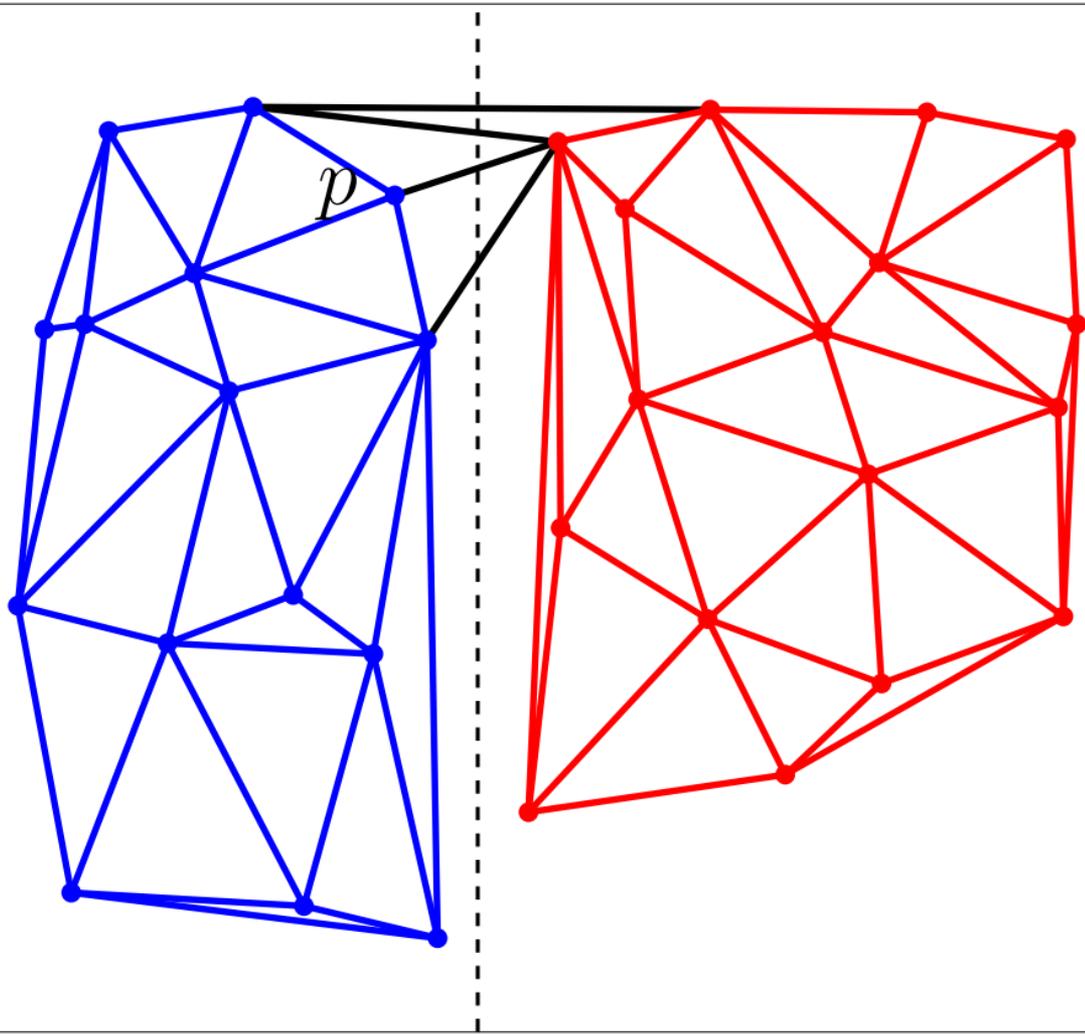
suivante ?

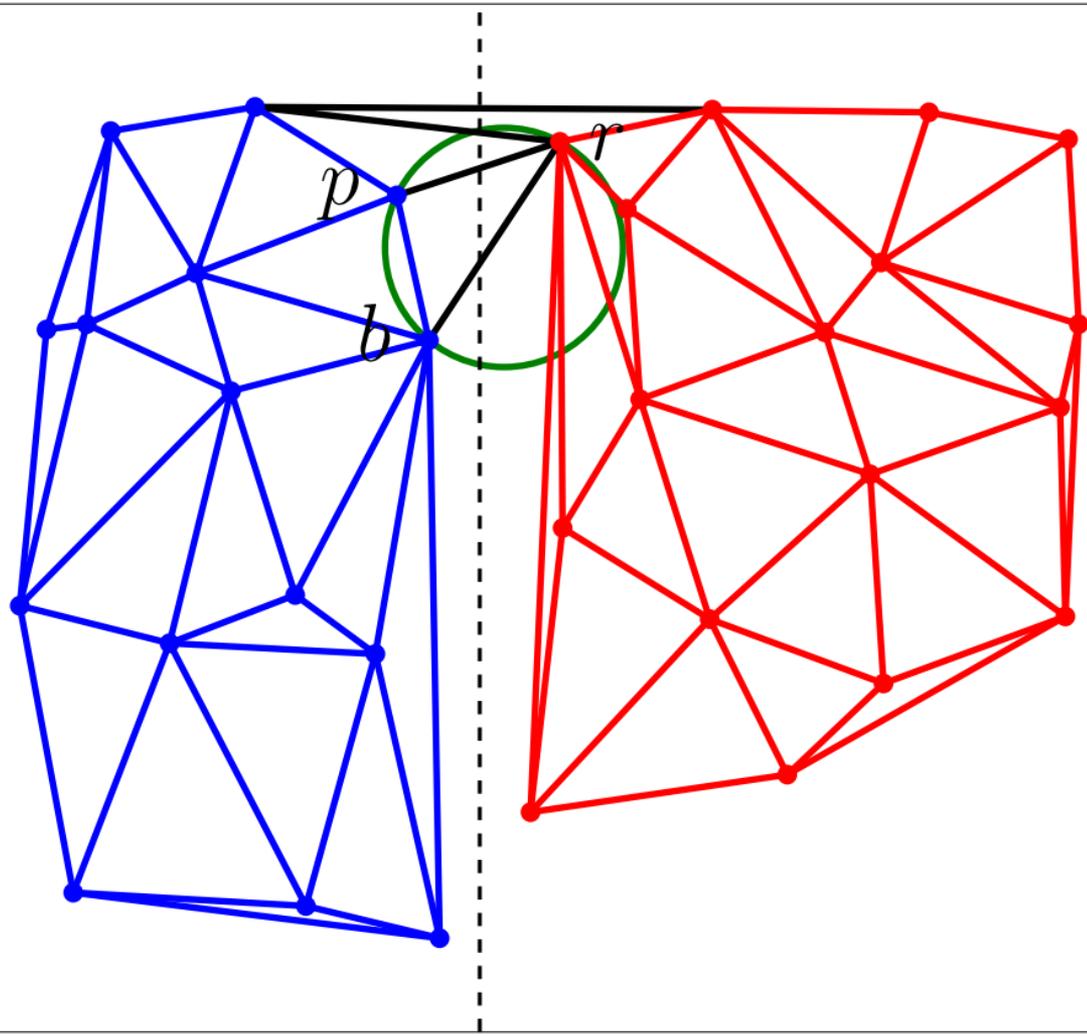
Construction des arêtes bicolorées

du haut vers le bas

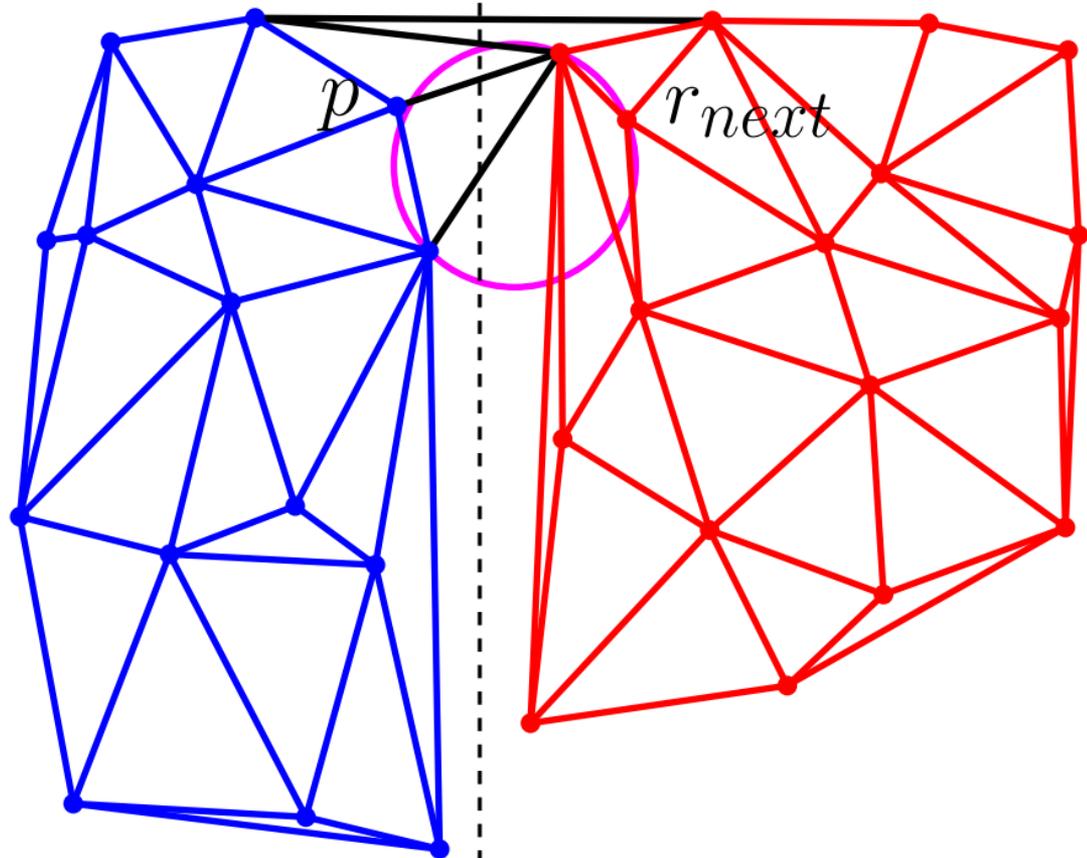


suivante ?

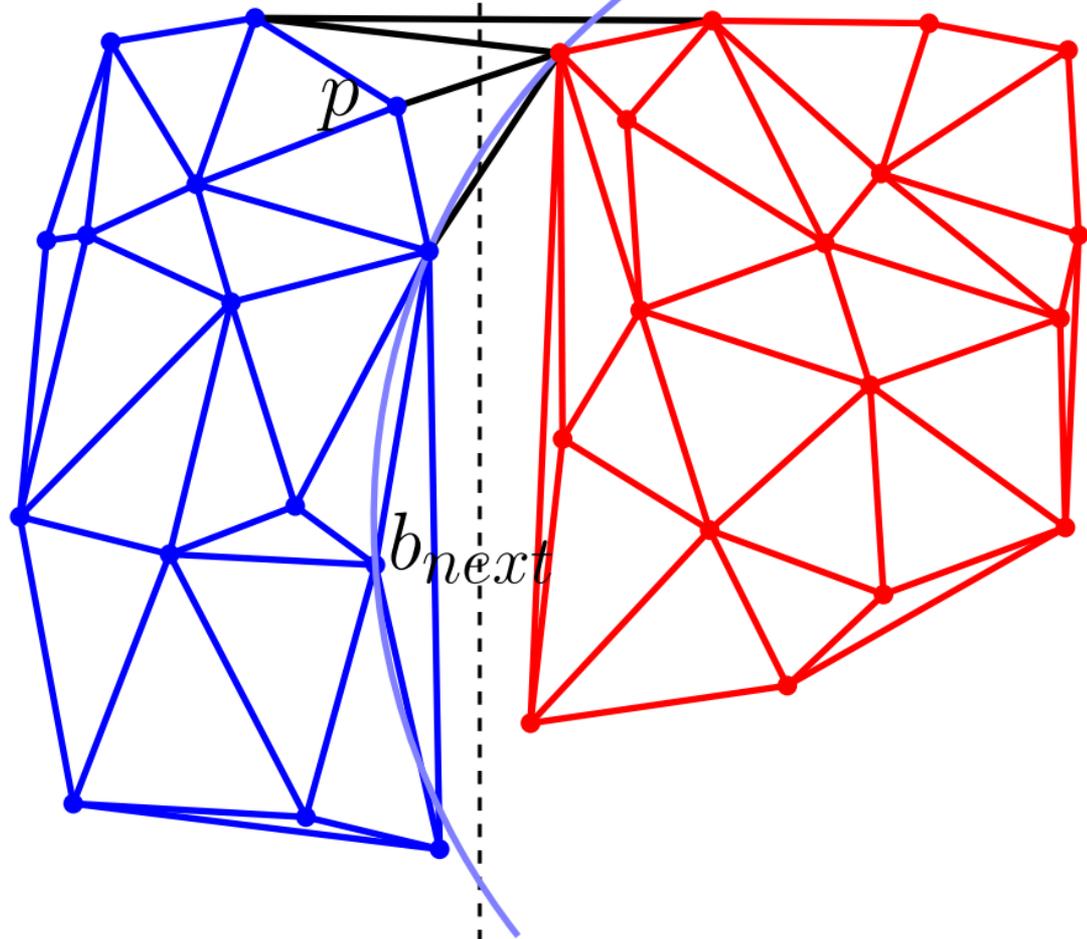




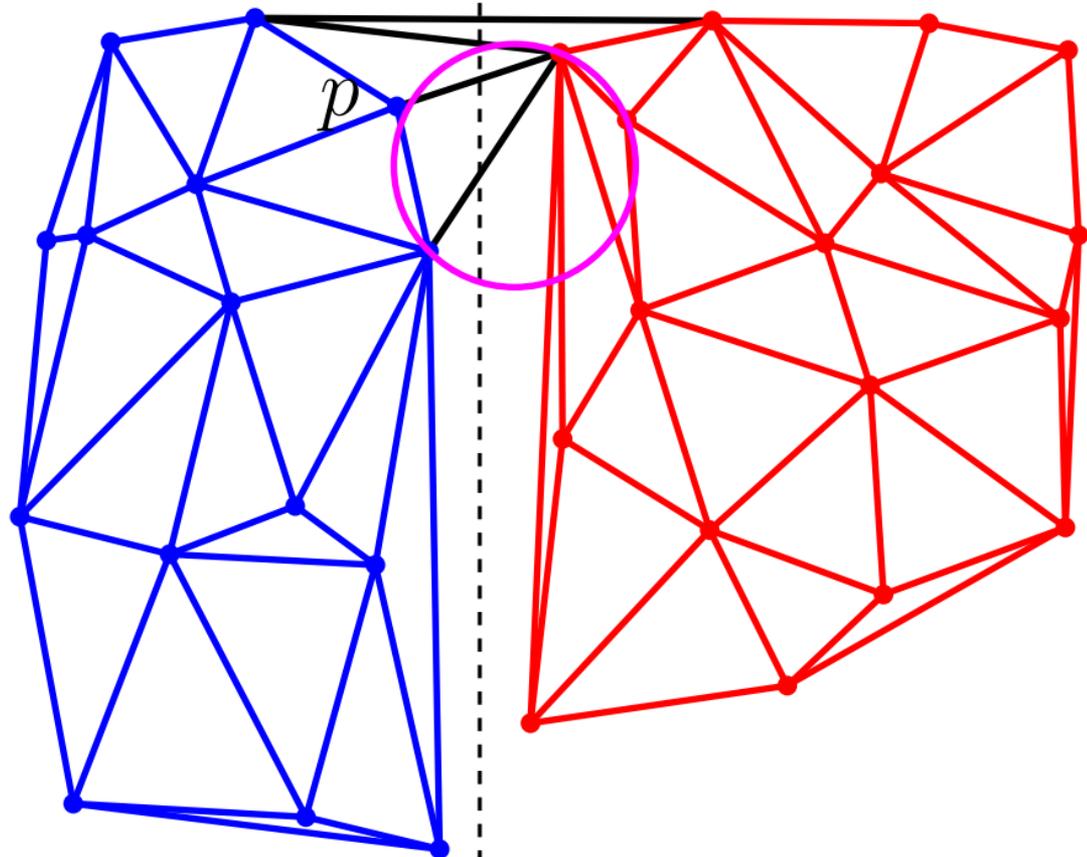
premier rouge rencontré par le faisceau de cercles



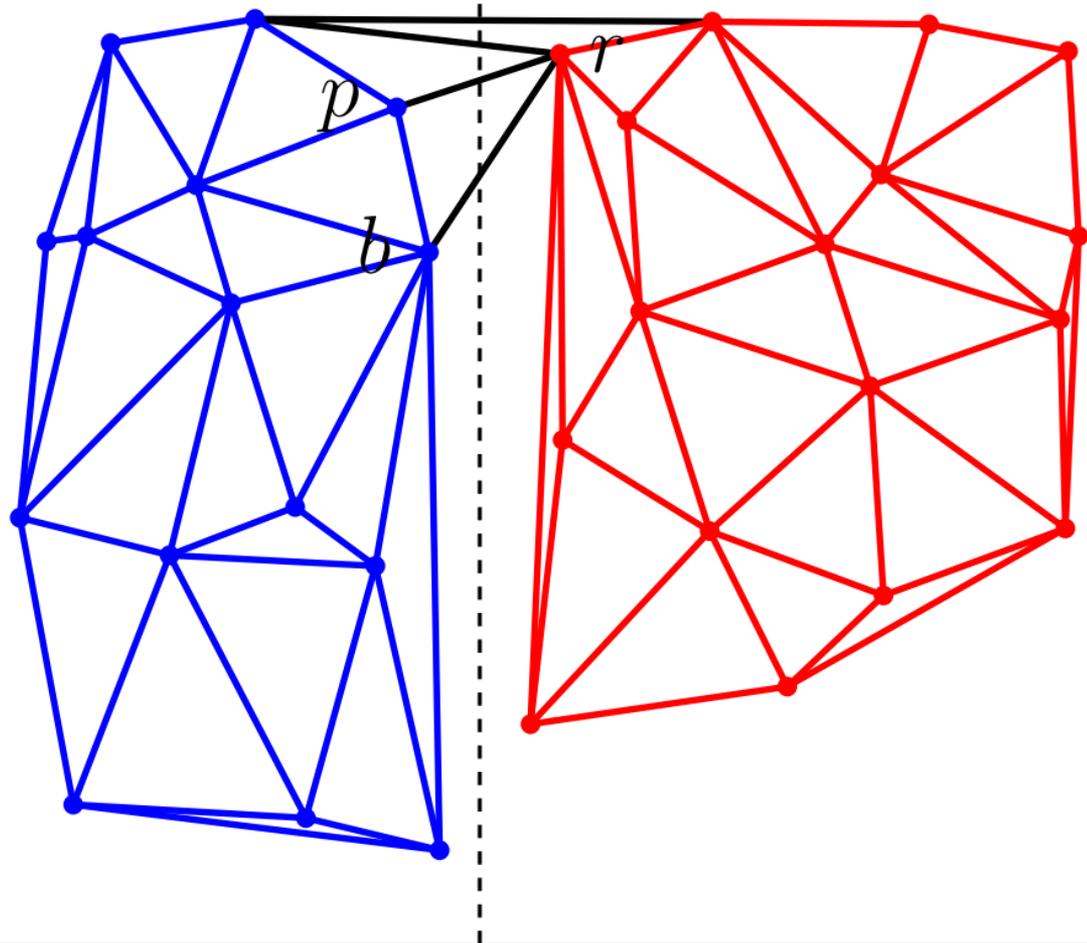
premier bleu rencontré par le faisceau de cercles



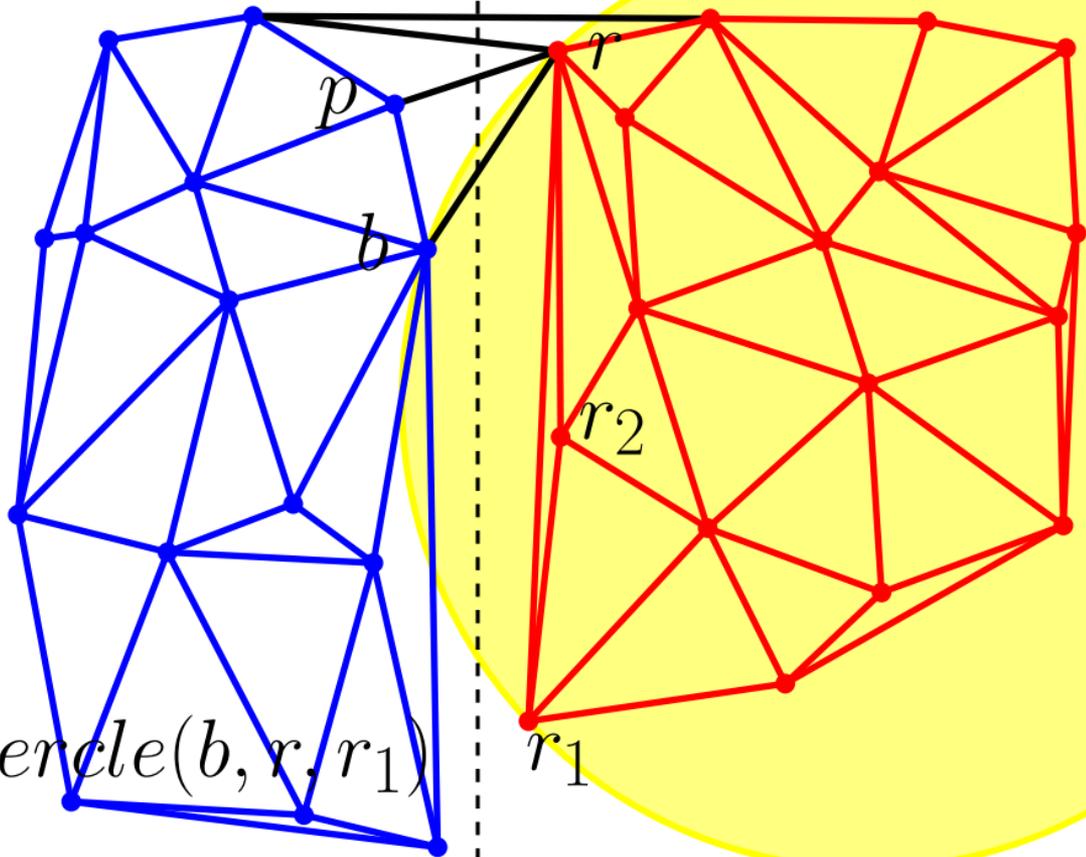
On garde le meilleur des deux



premier rouge rencontré par le faisceau de cercles



premier rouge rencontré par le faisceau de cercles



$r_2 \in \text{Cercle}(b, r, r_1)$

r_1

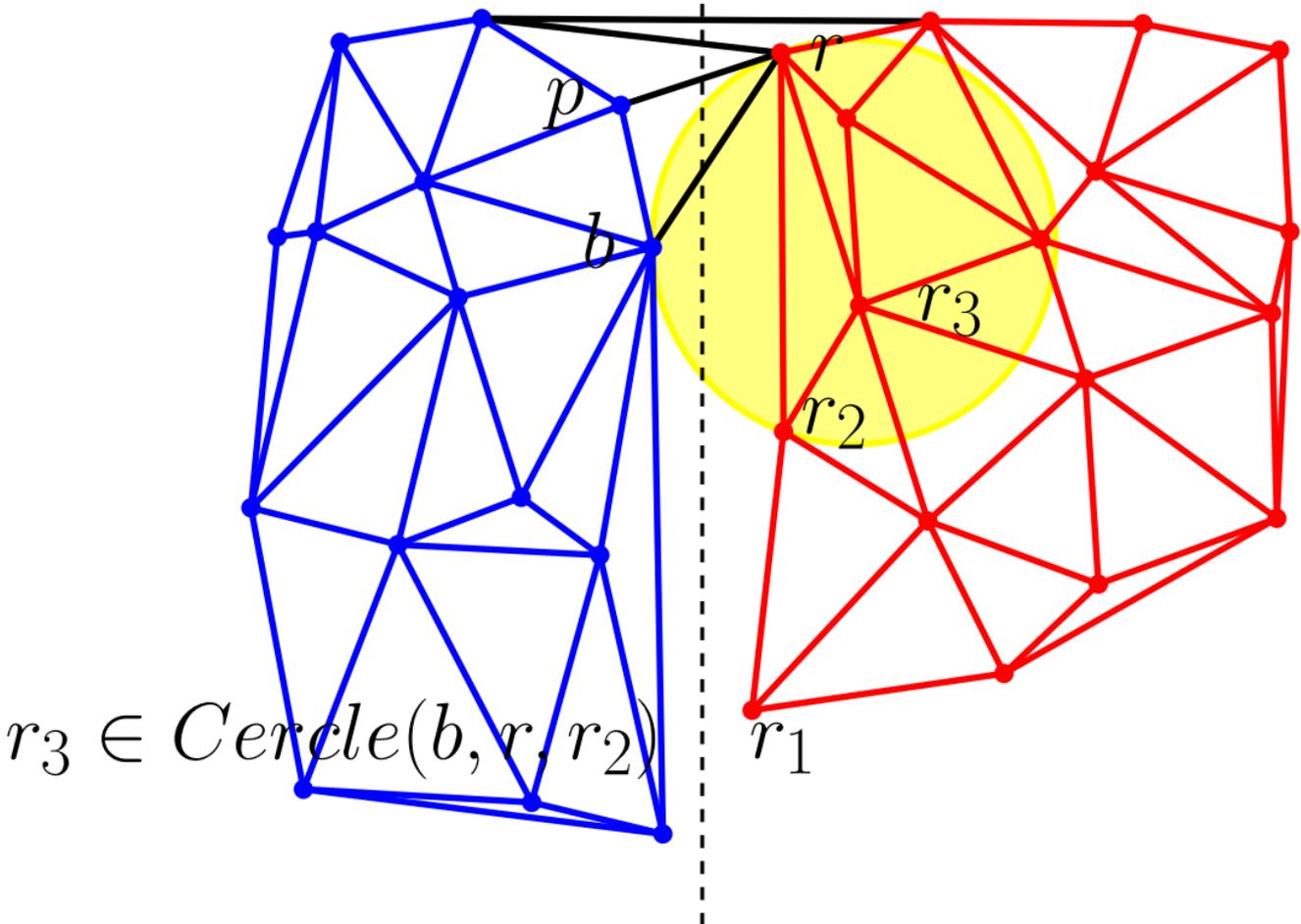
r_2

p

b

r

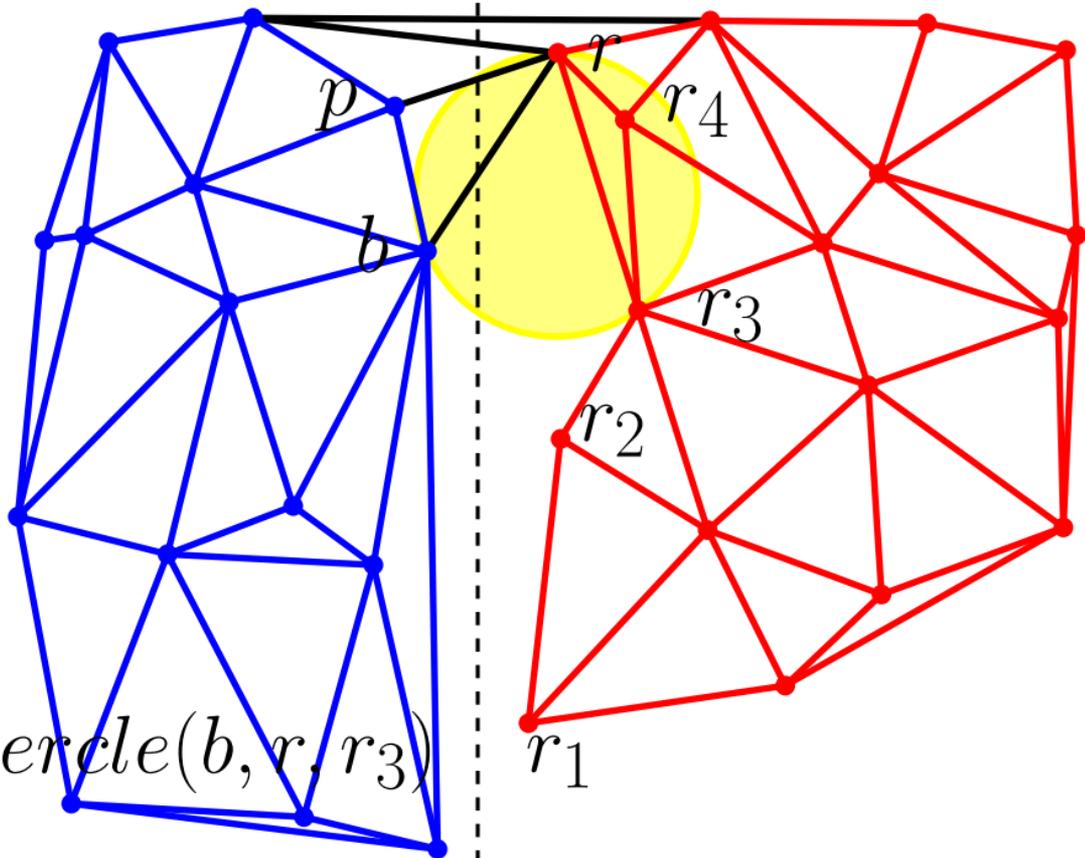
premier rouge rencontré par le faisceau de cercles



$r_3 \in Cercle(b, r, r_2)$

r_1

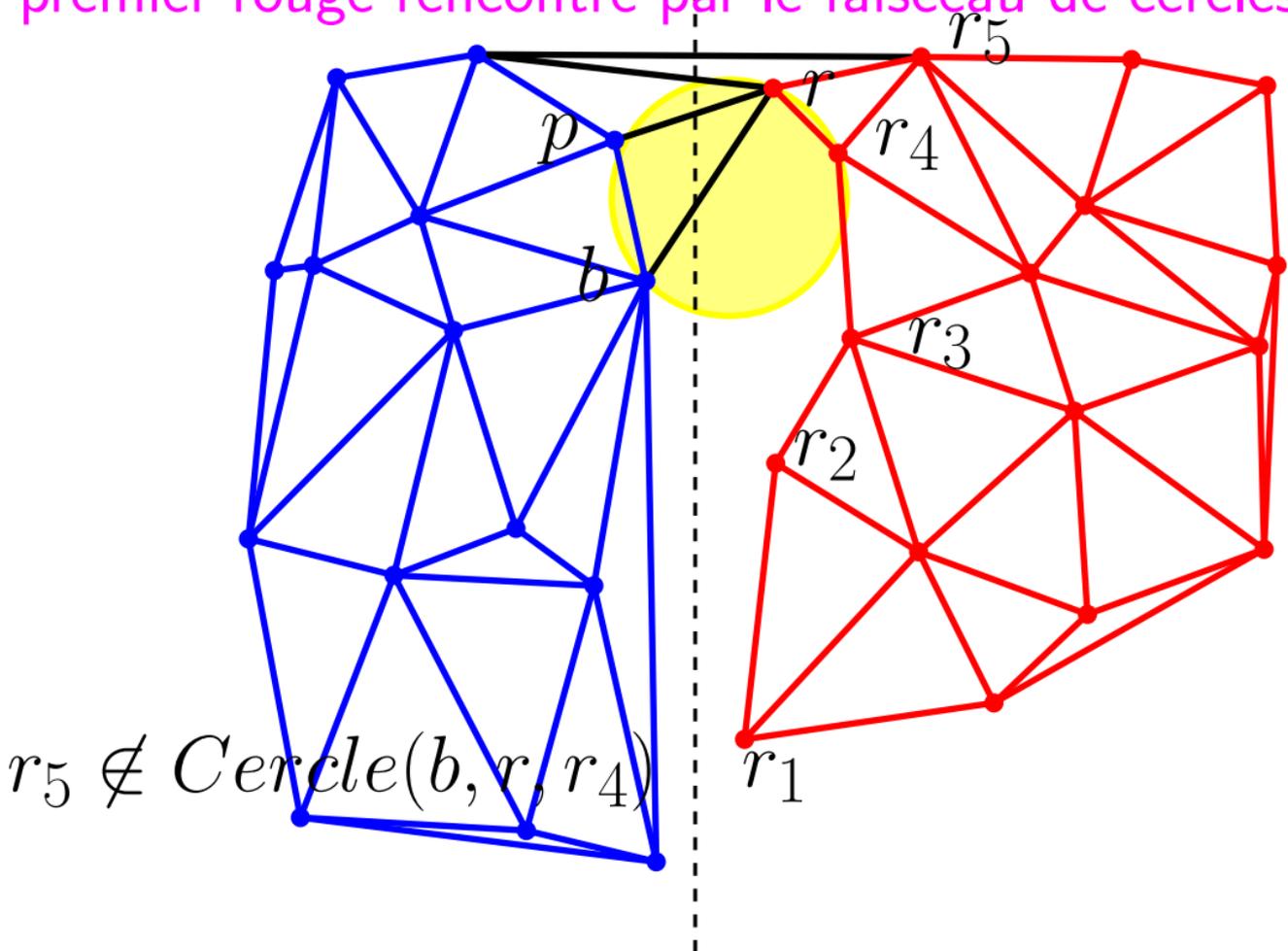
premier rouge rencontré par le faisceau de cercles



$r_4 \in Cercle(b, r, r_3)$

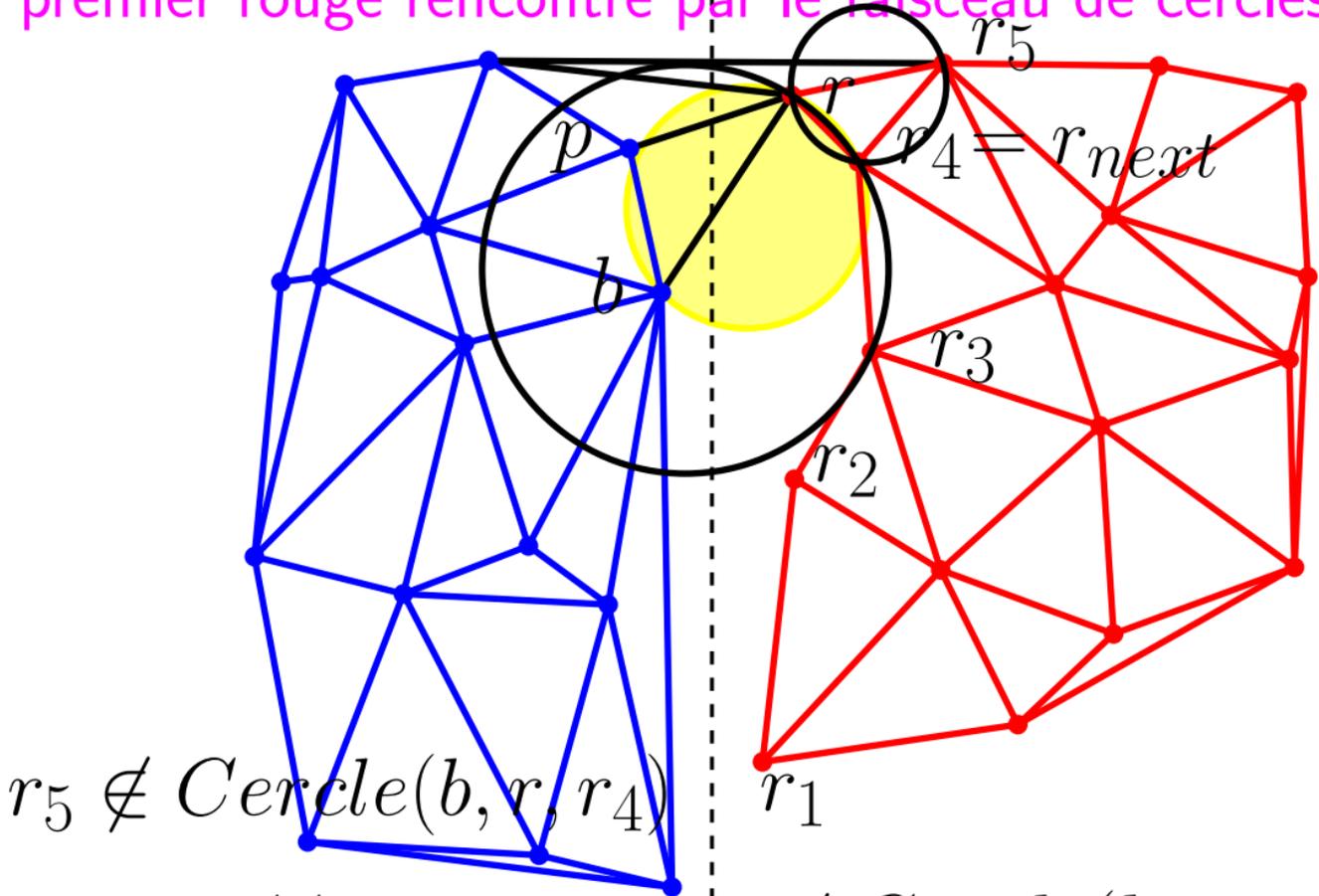
r_1

premier rouge rencontré par le faisceau de cercles



$r_5 \notin Cercle(b, r, r_4)$

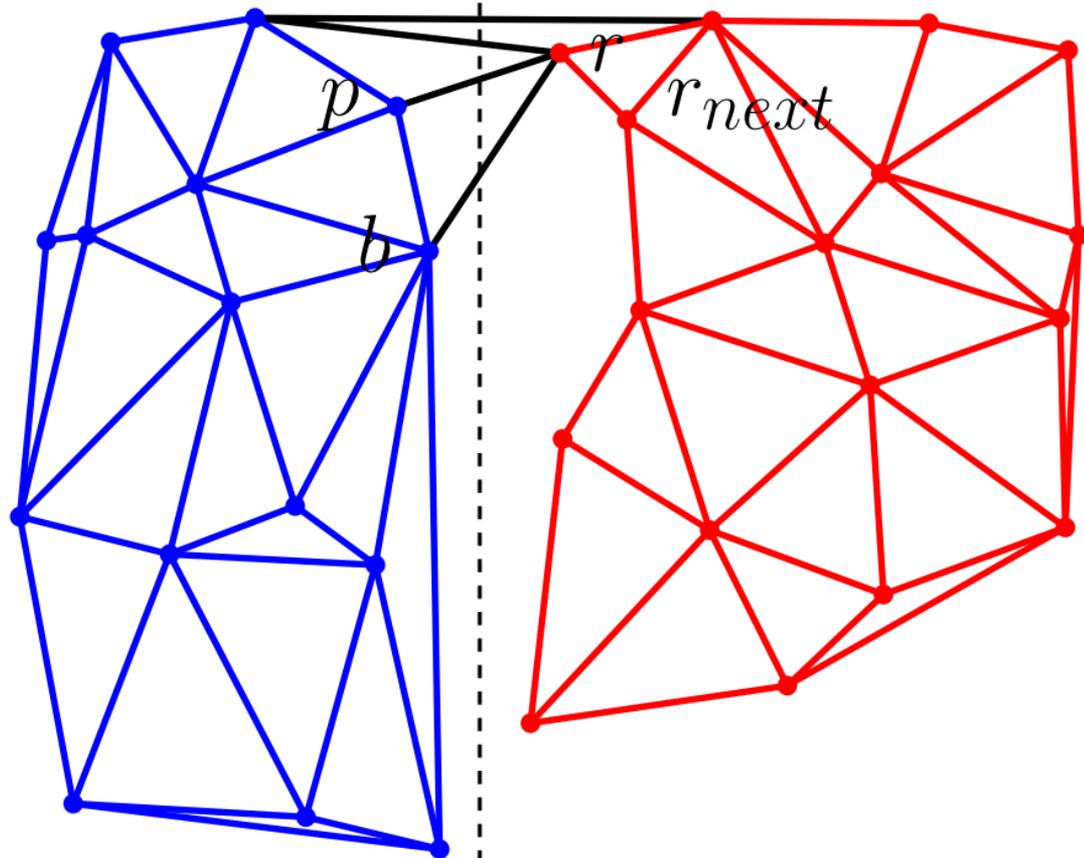
premier rouge rencontré par le faisceau de cercles



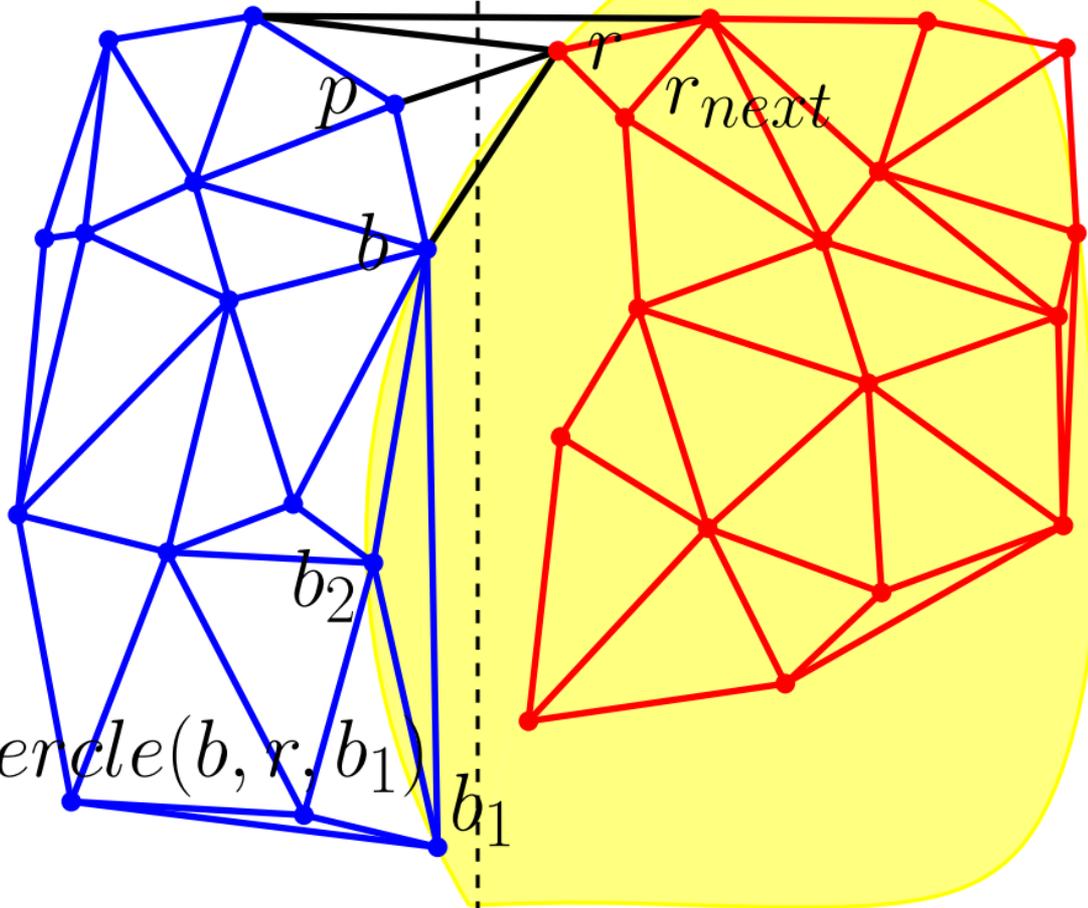
$r_5 \notin \text{Cercle}(b, r, r_4)$

$\forall \text{rouge}, \text{rouge} \notin \text{Cercle}(b, r, r_4)$

premier bleu rencontré par le faisceau de cercles

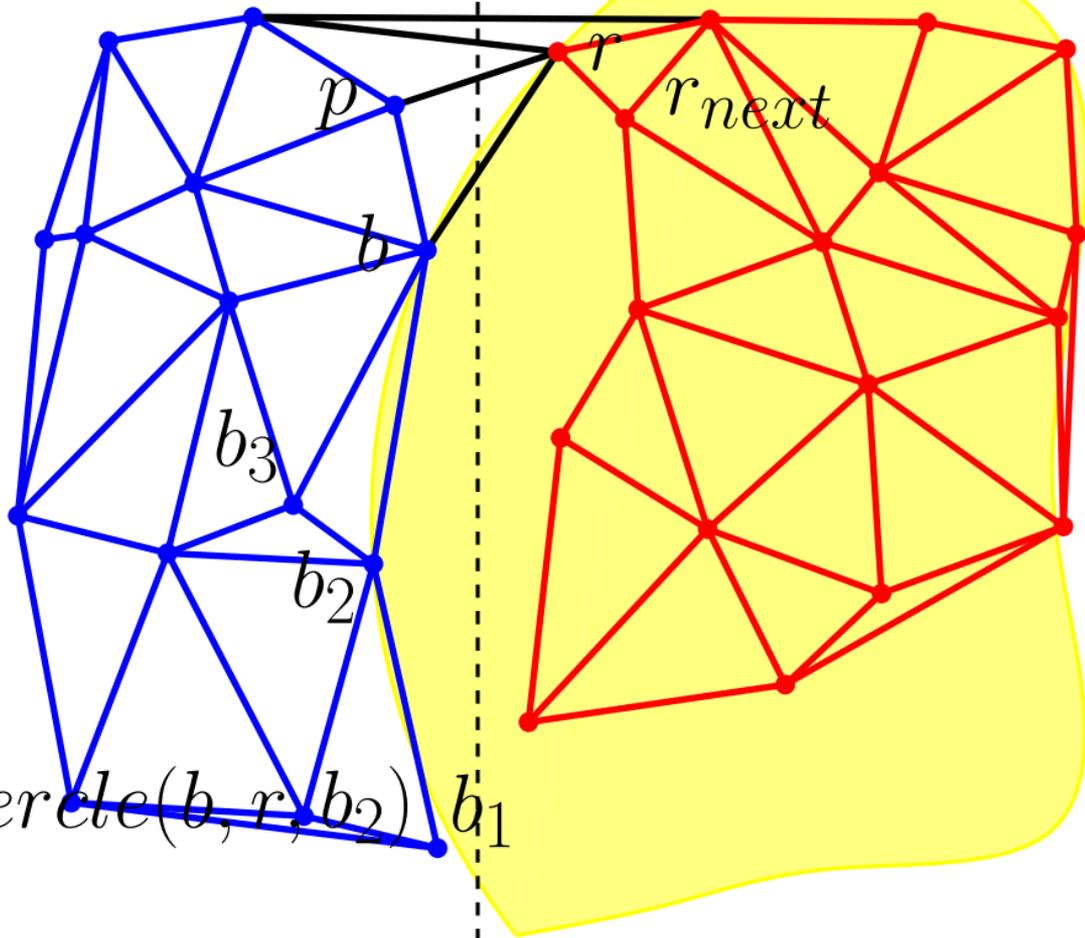


premier bleu rencontré par le faisceau de cercles

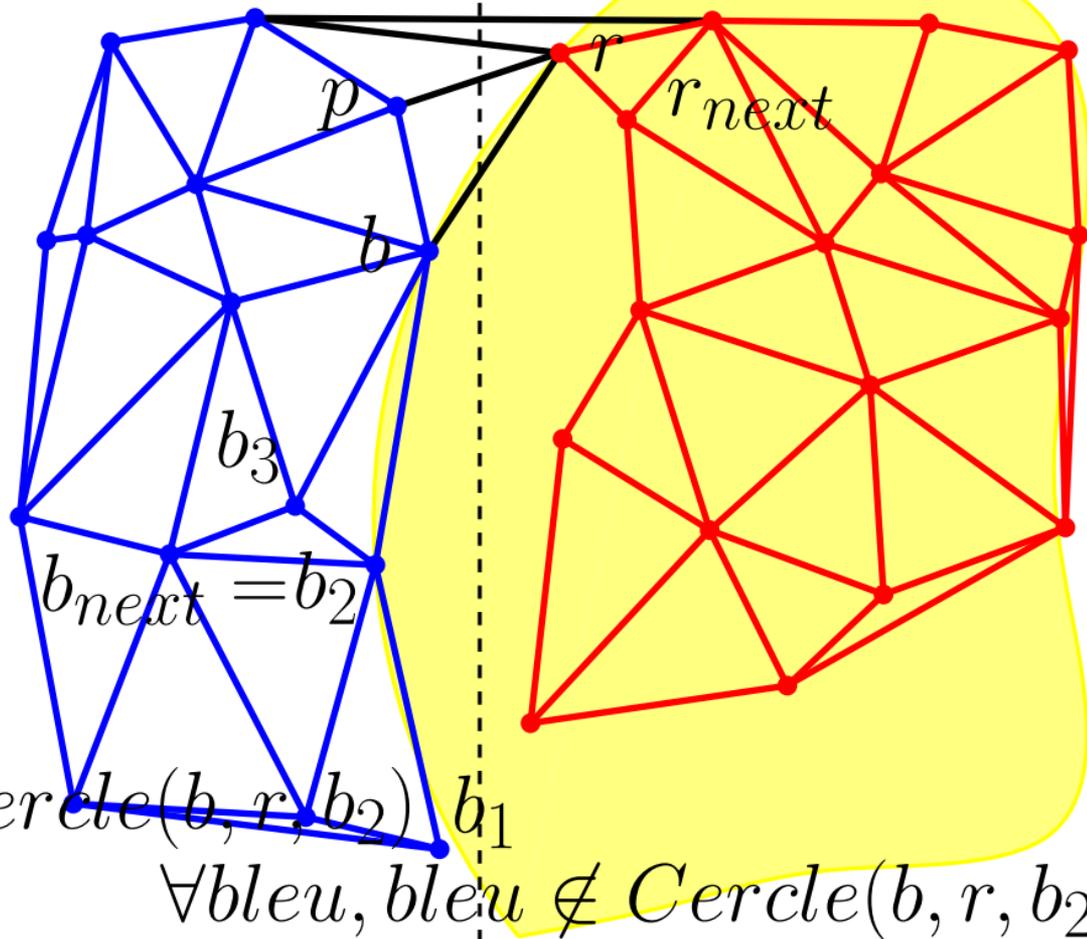


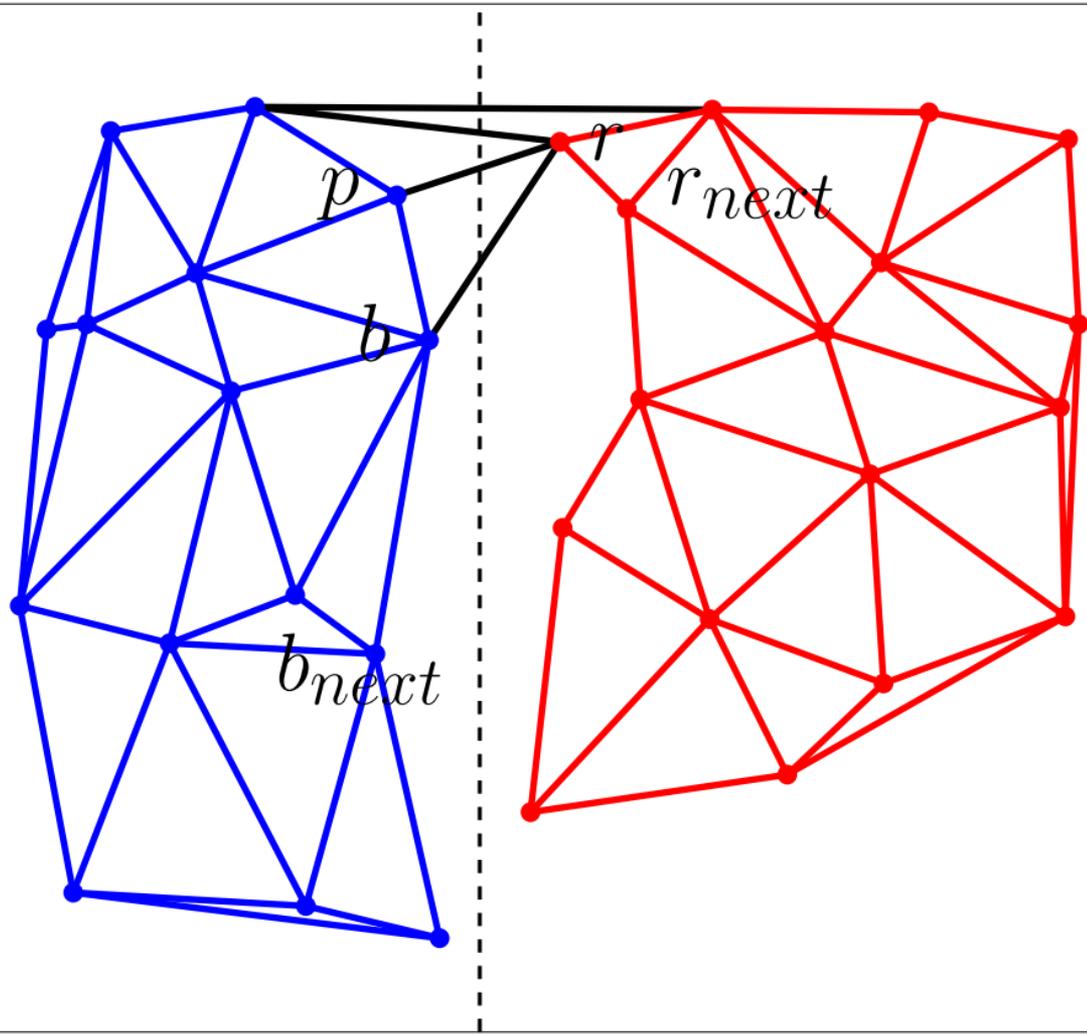
$b_2 \in Cercle(b, r, b_1)$

premier bleu rencontré par le faisceau de cercles

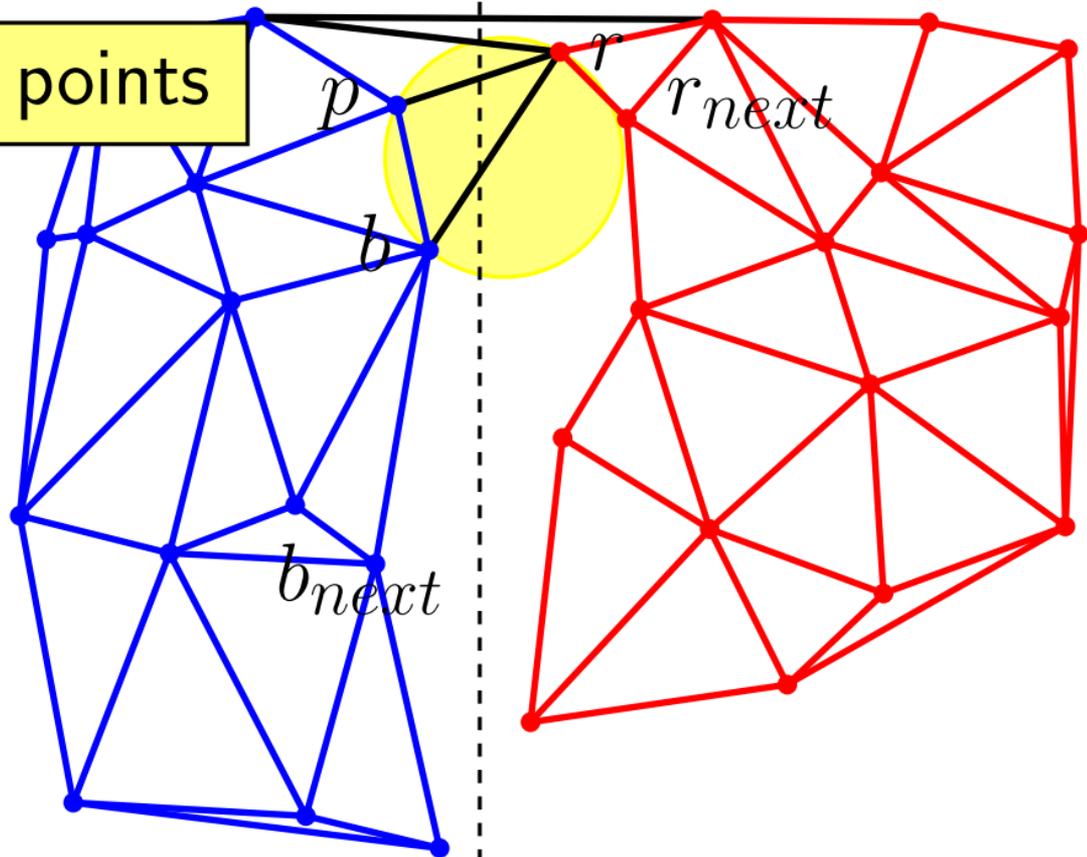


premier bleu rencontré par le faisceau de cercles

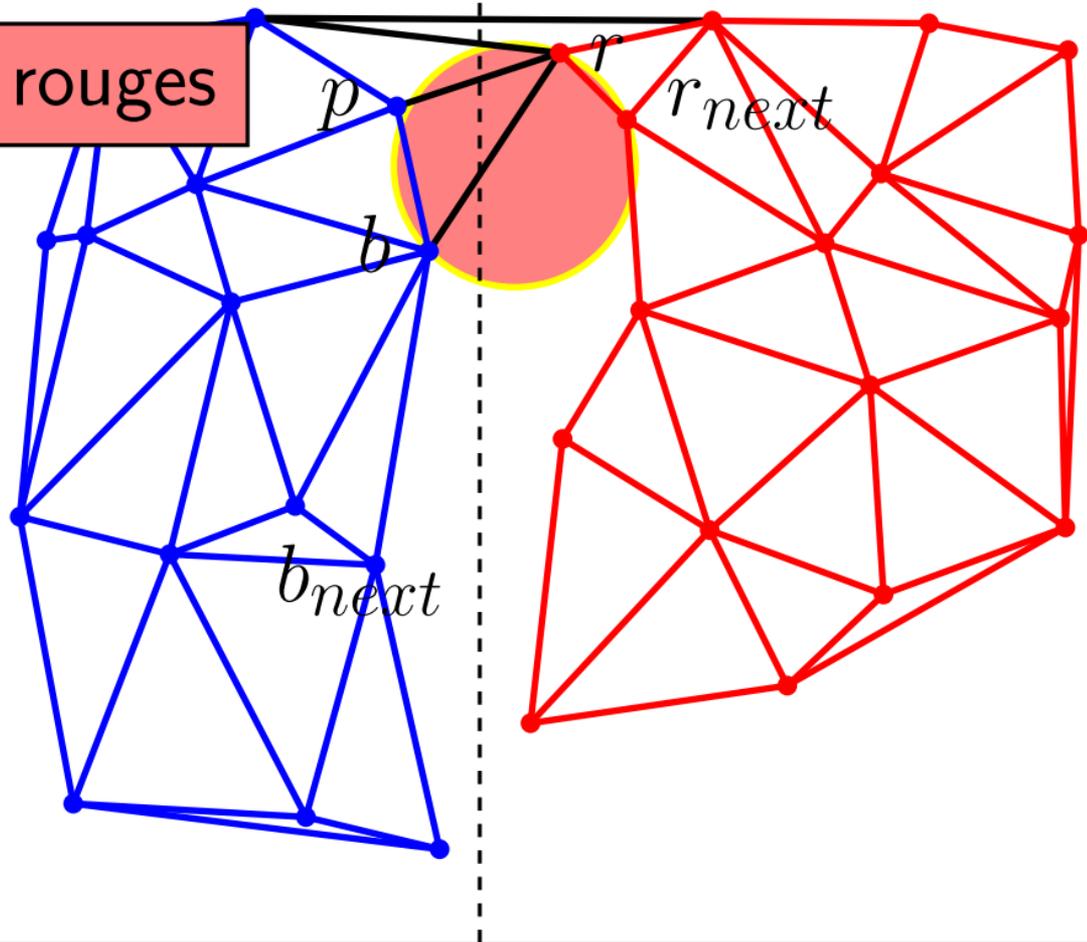




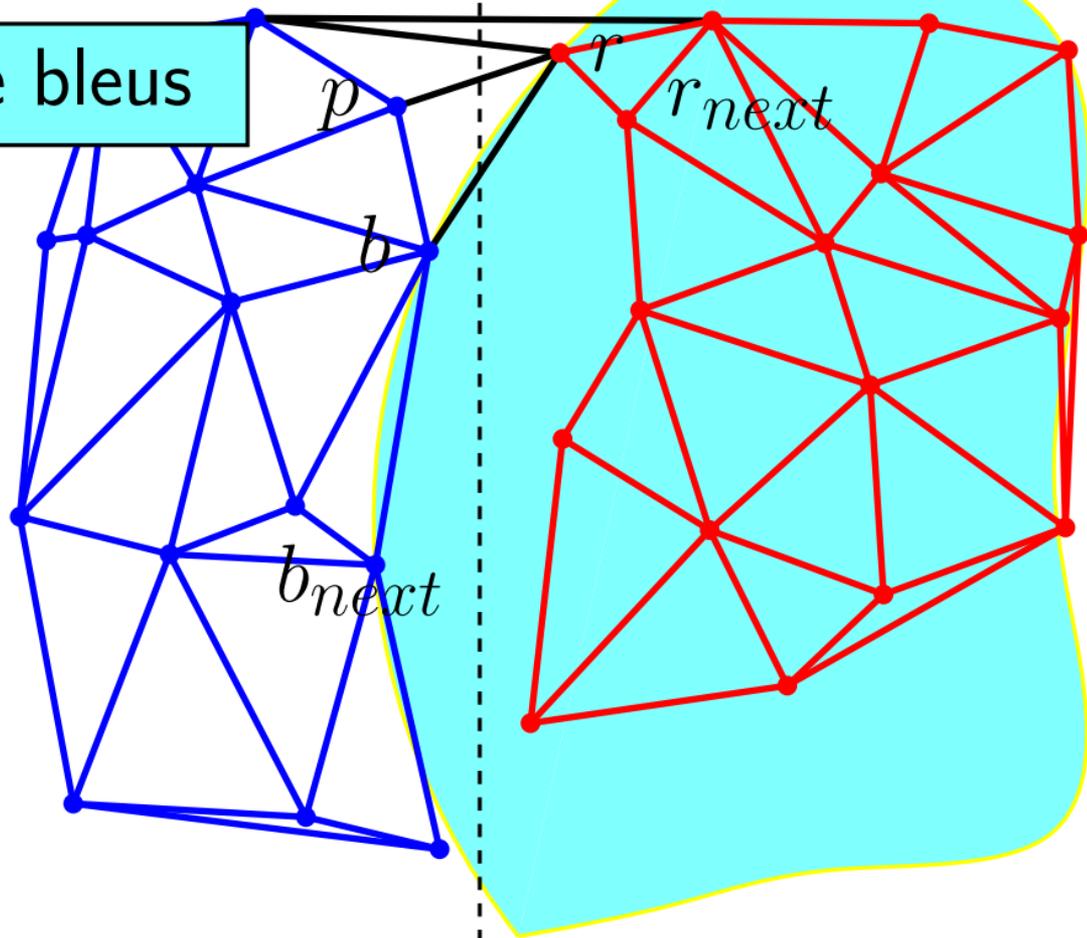
pas de points



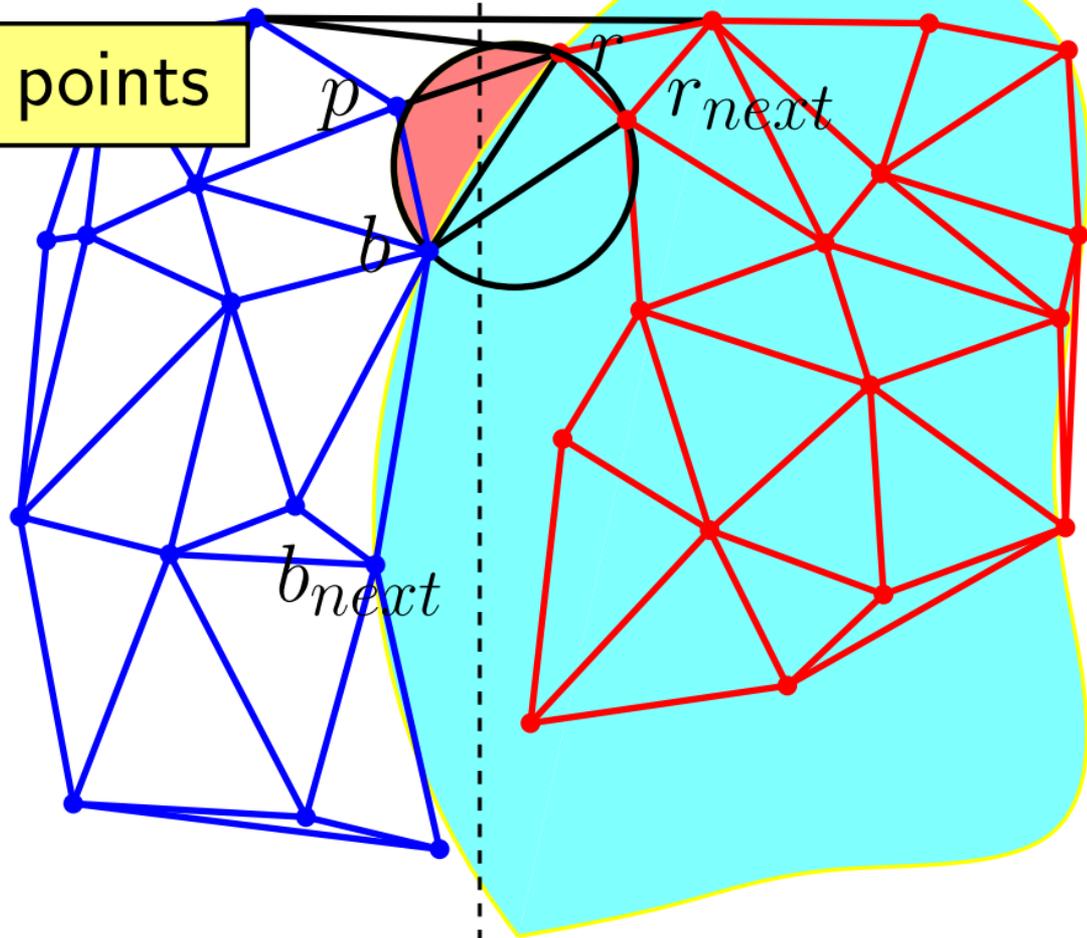
pas de rouges

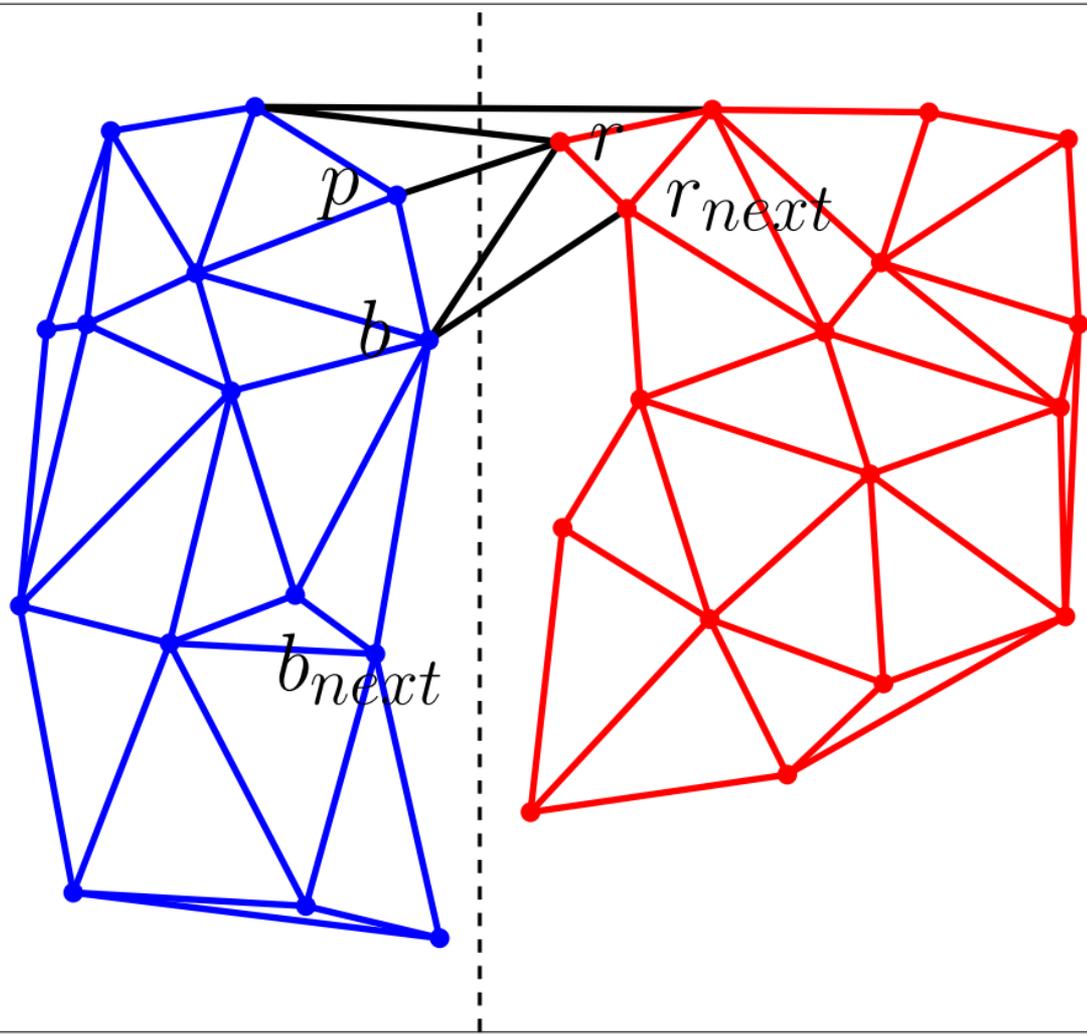


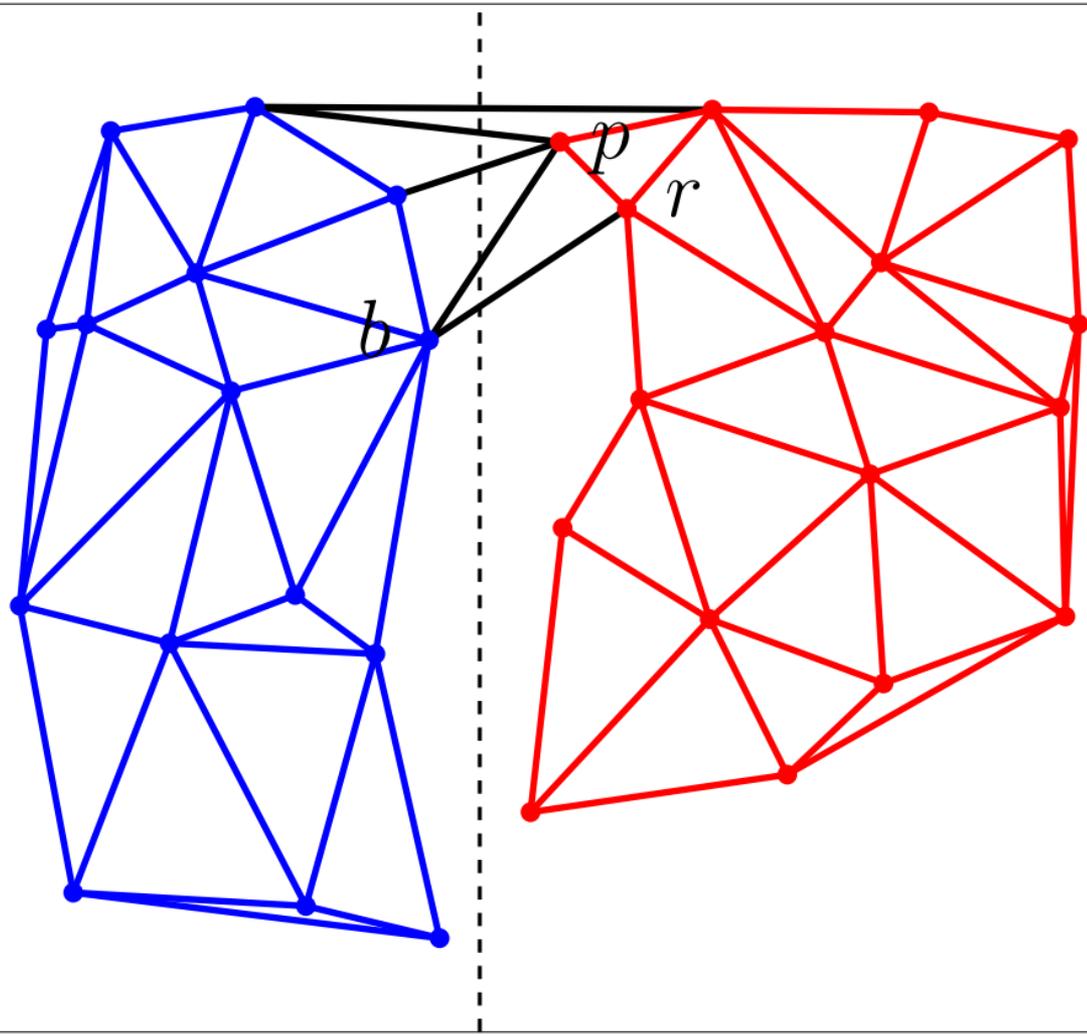
pas de bleus

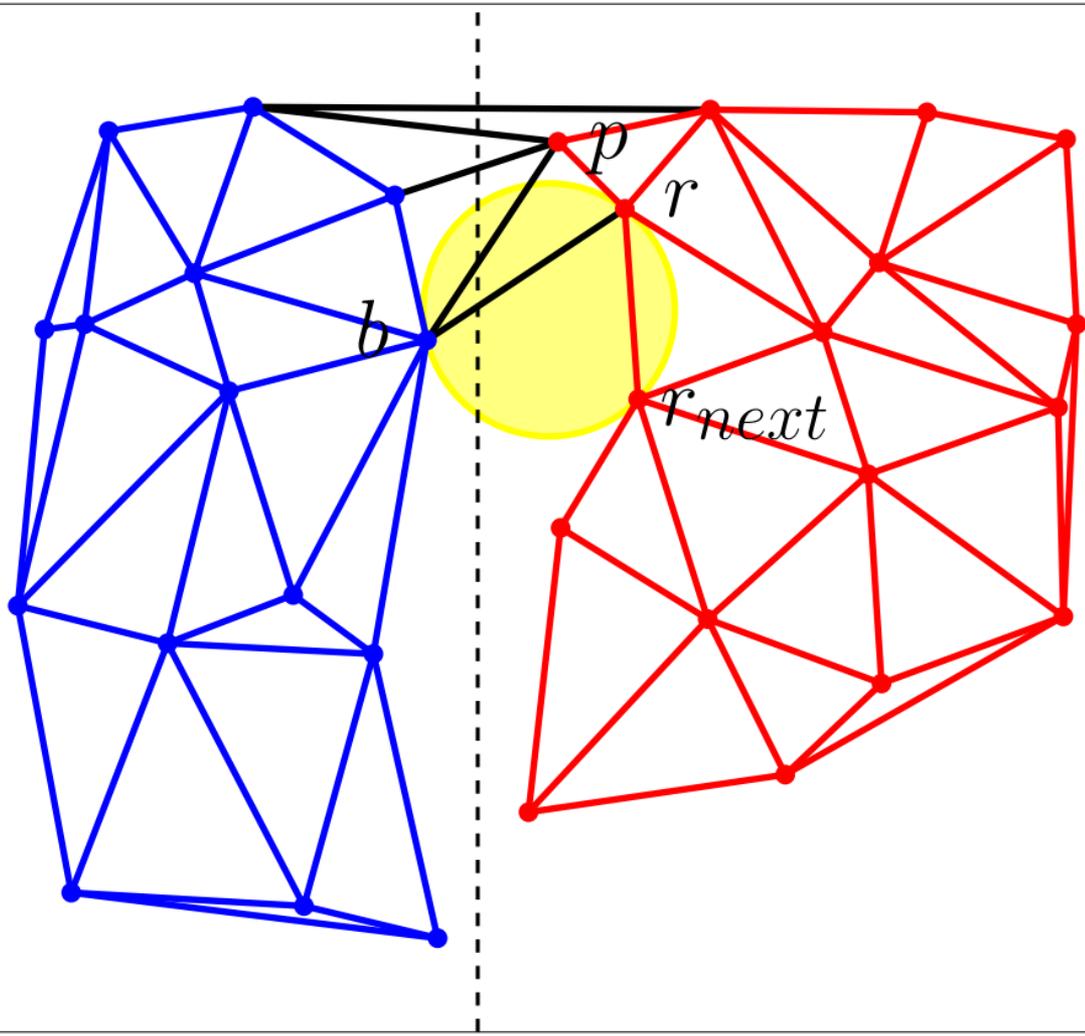


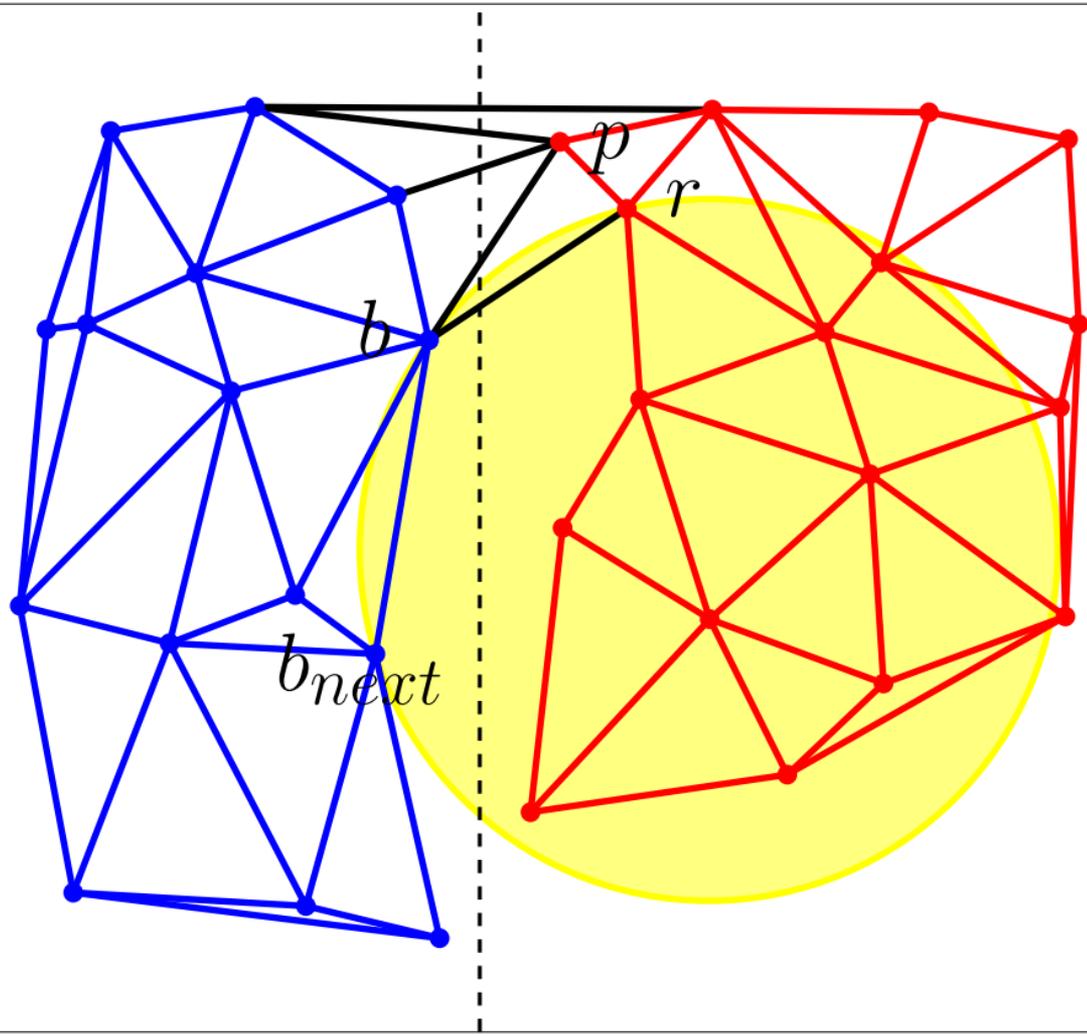
pas de points

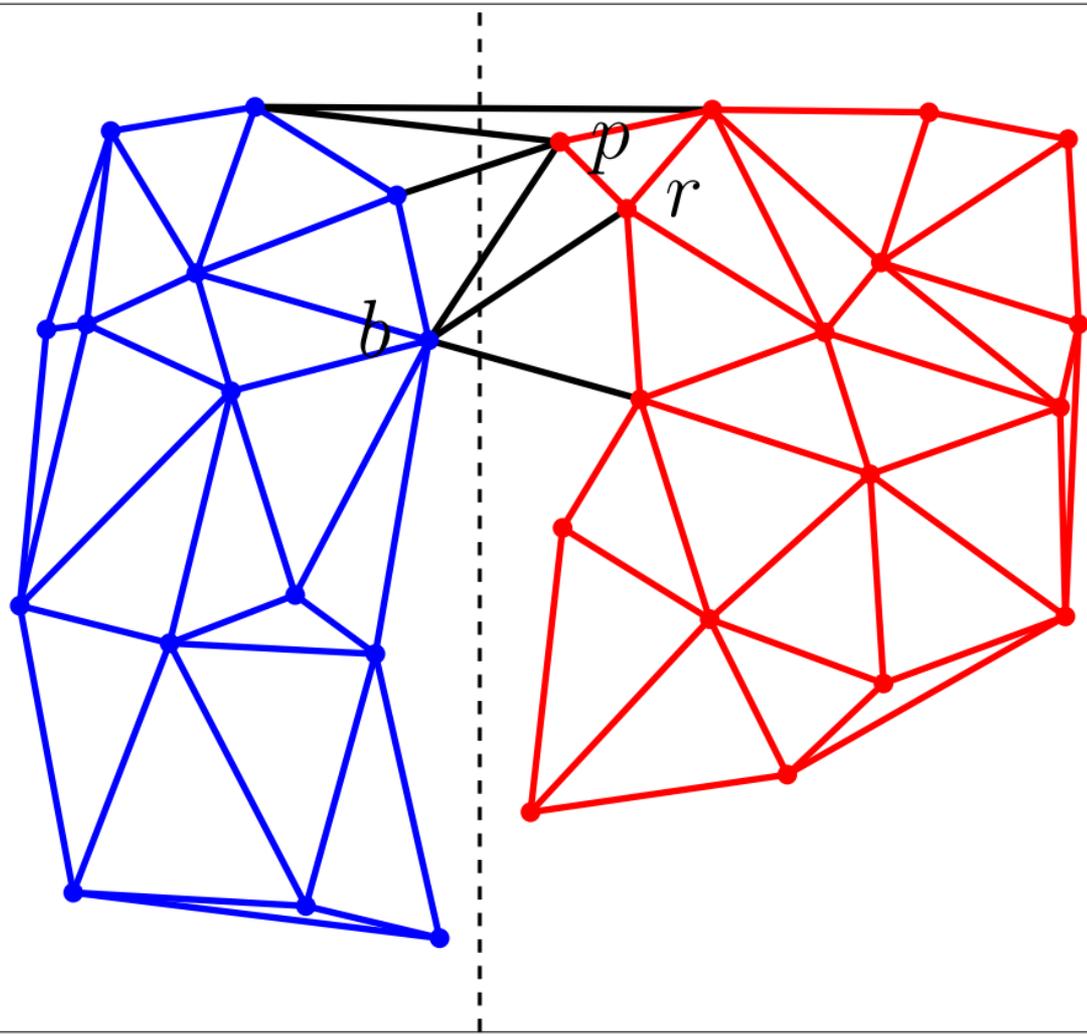


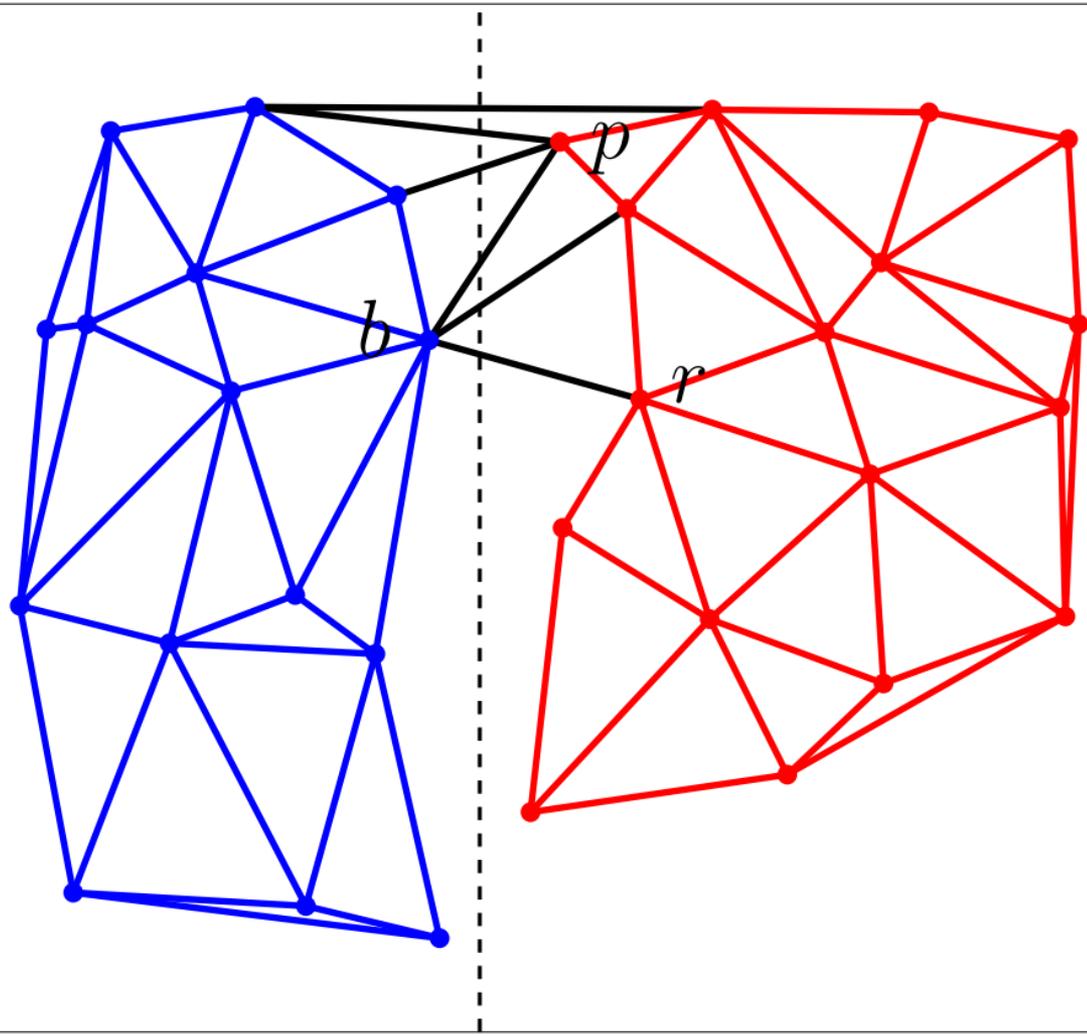


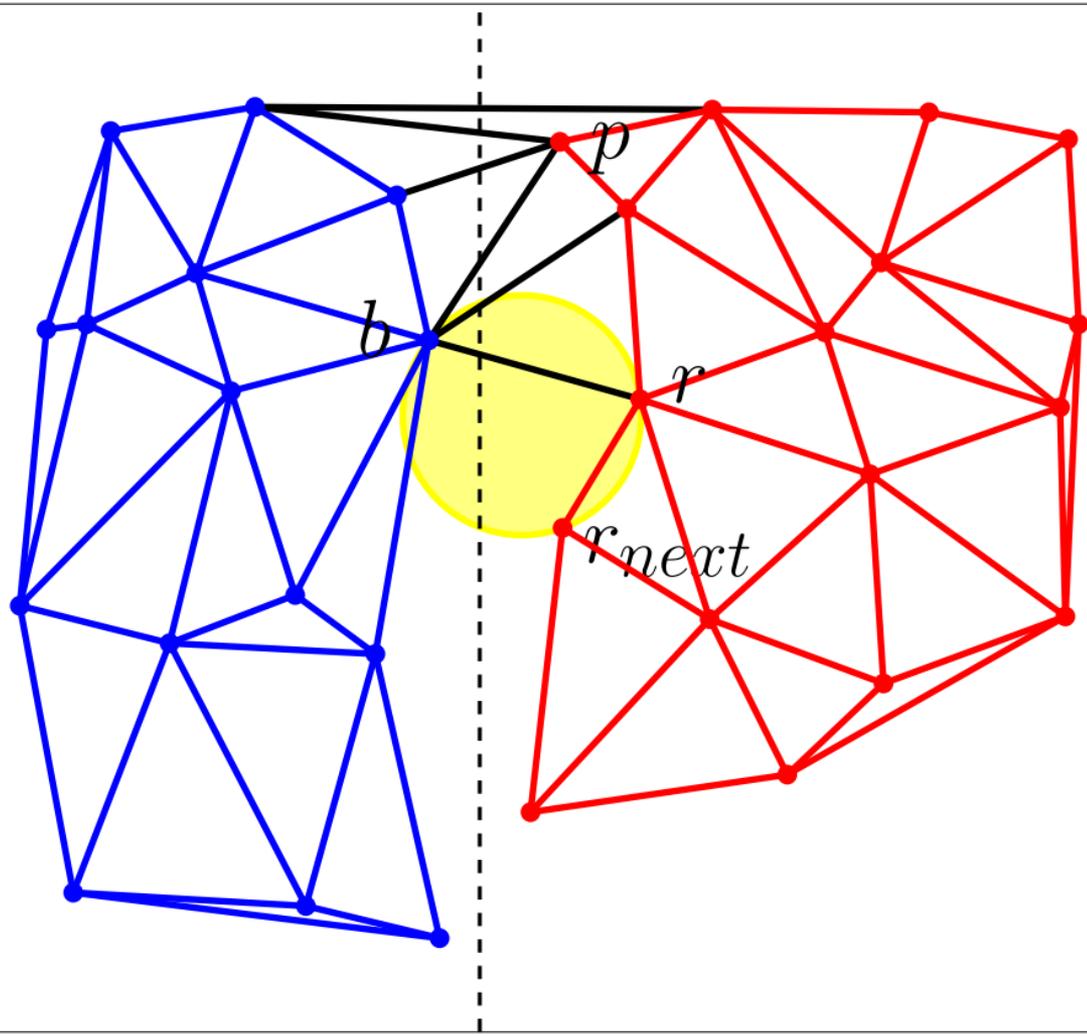


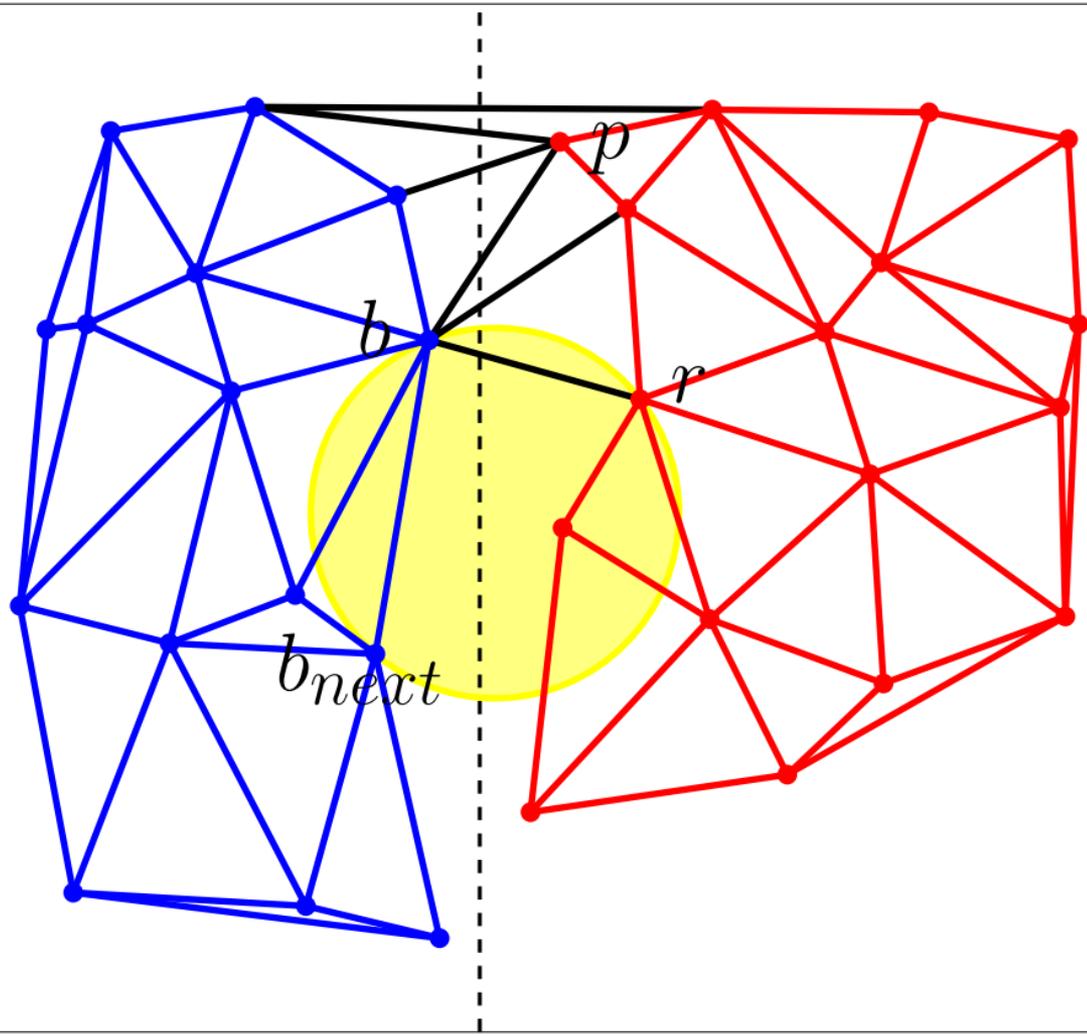


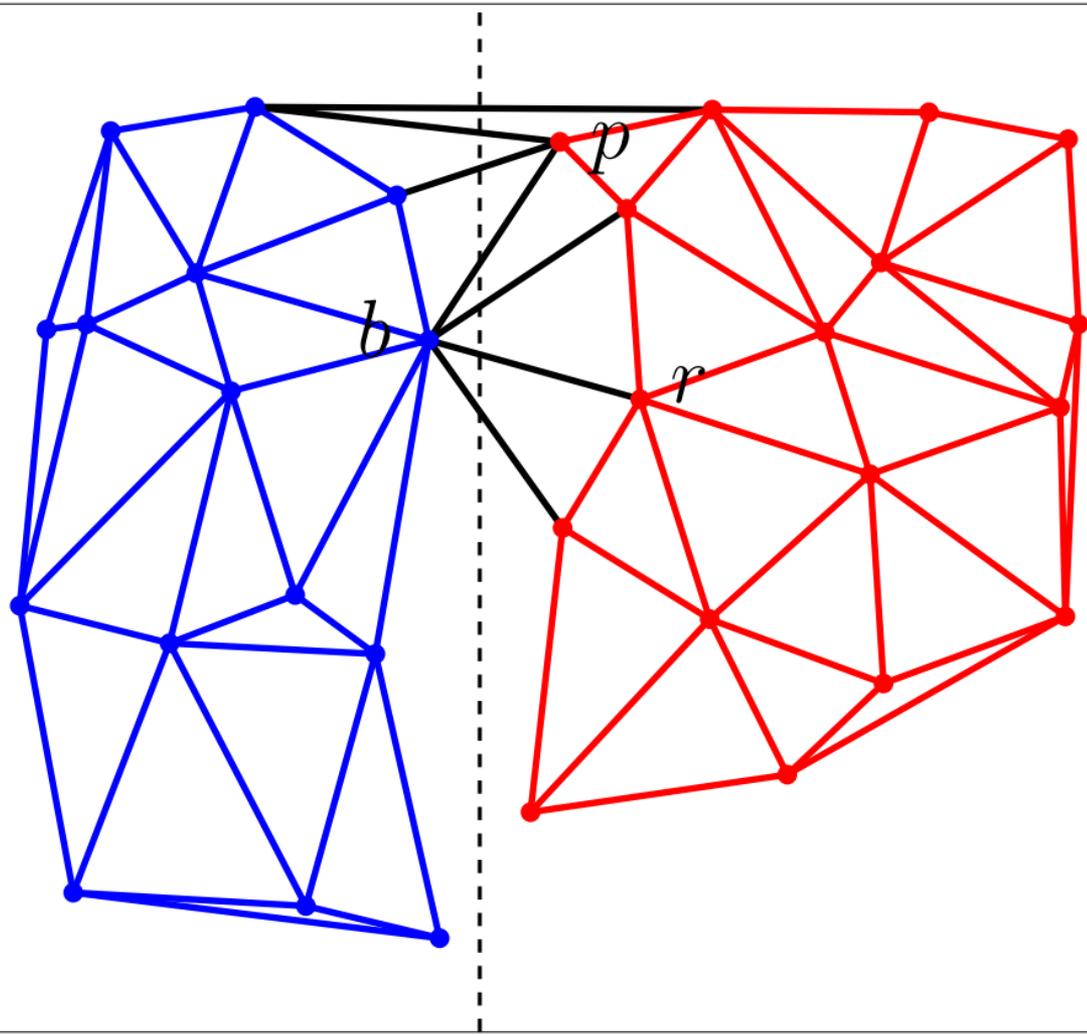


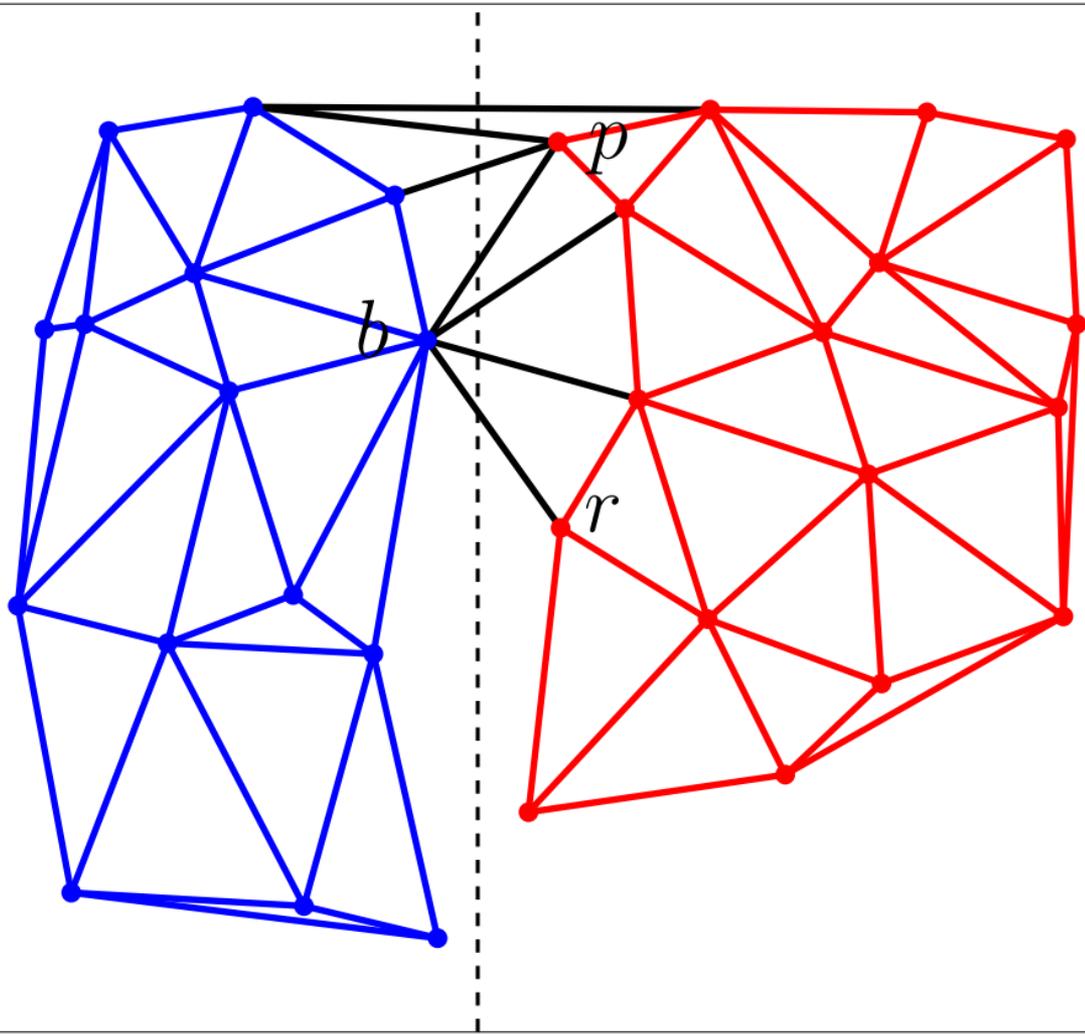


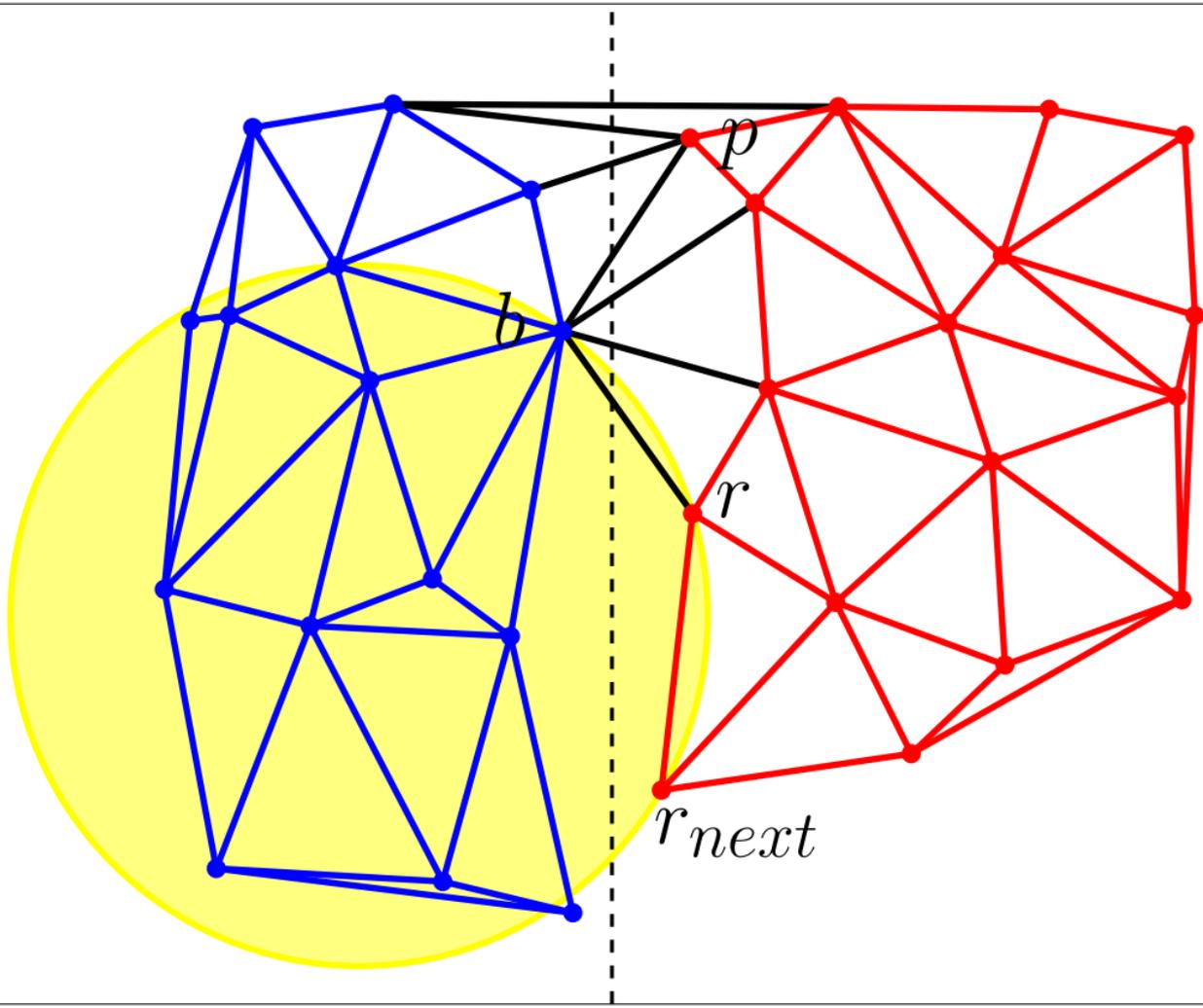


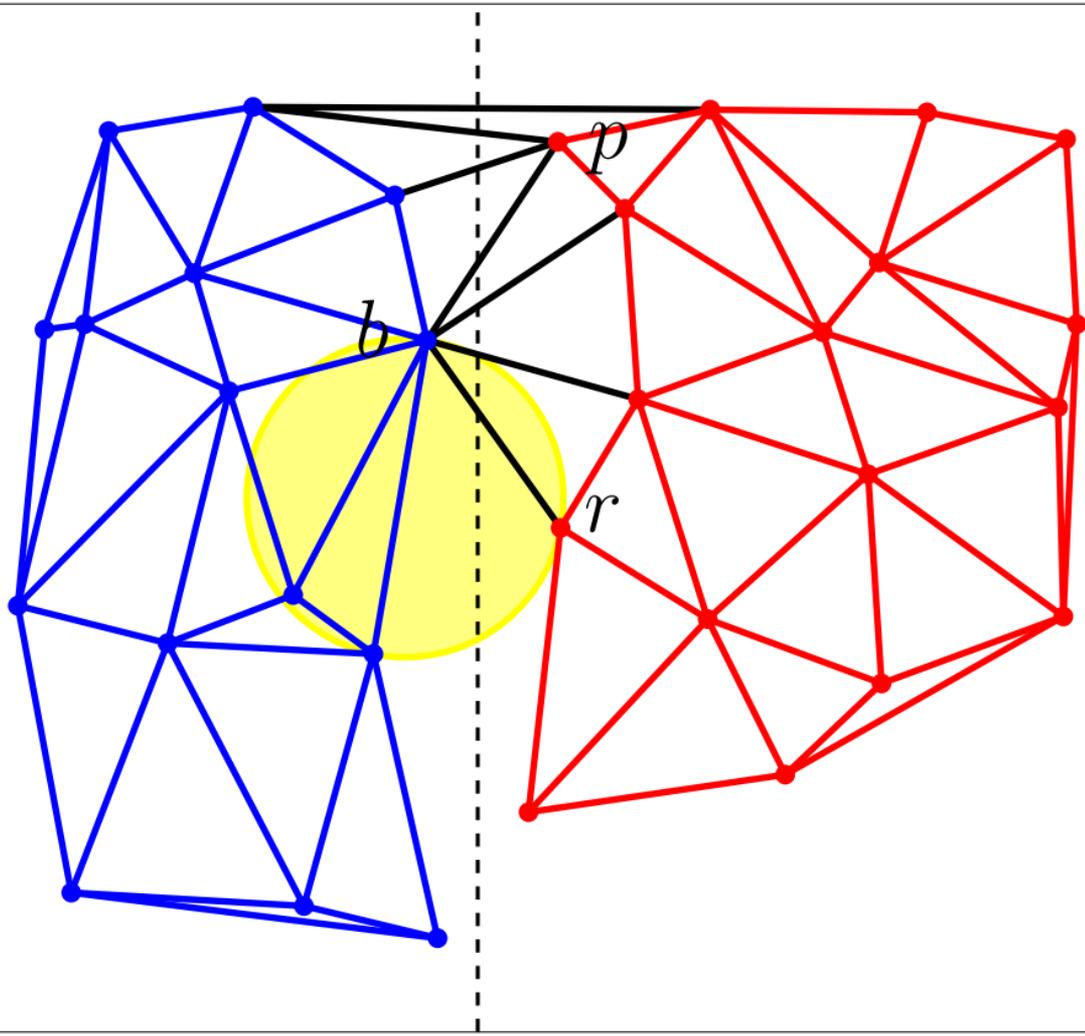


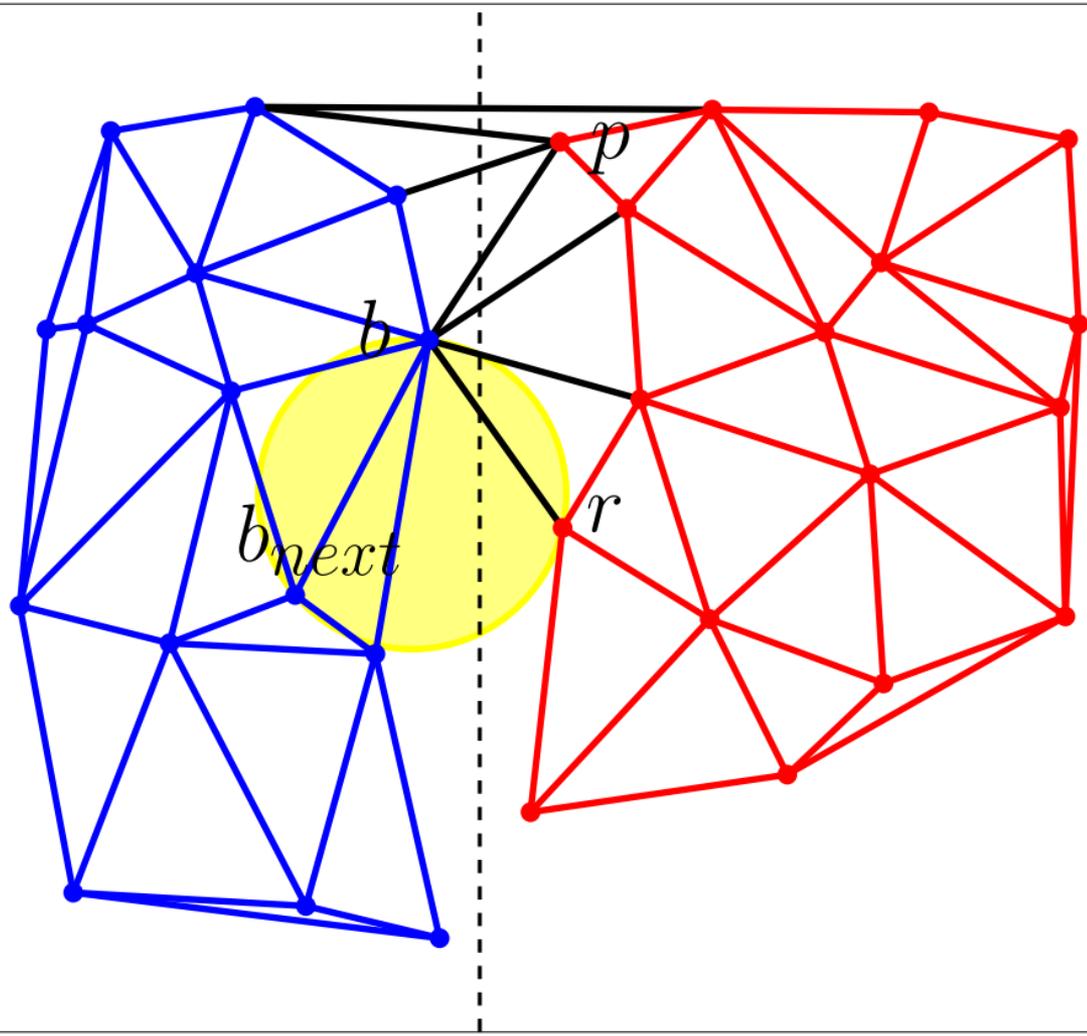


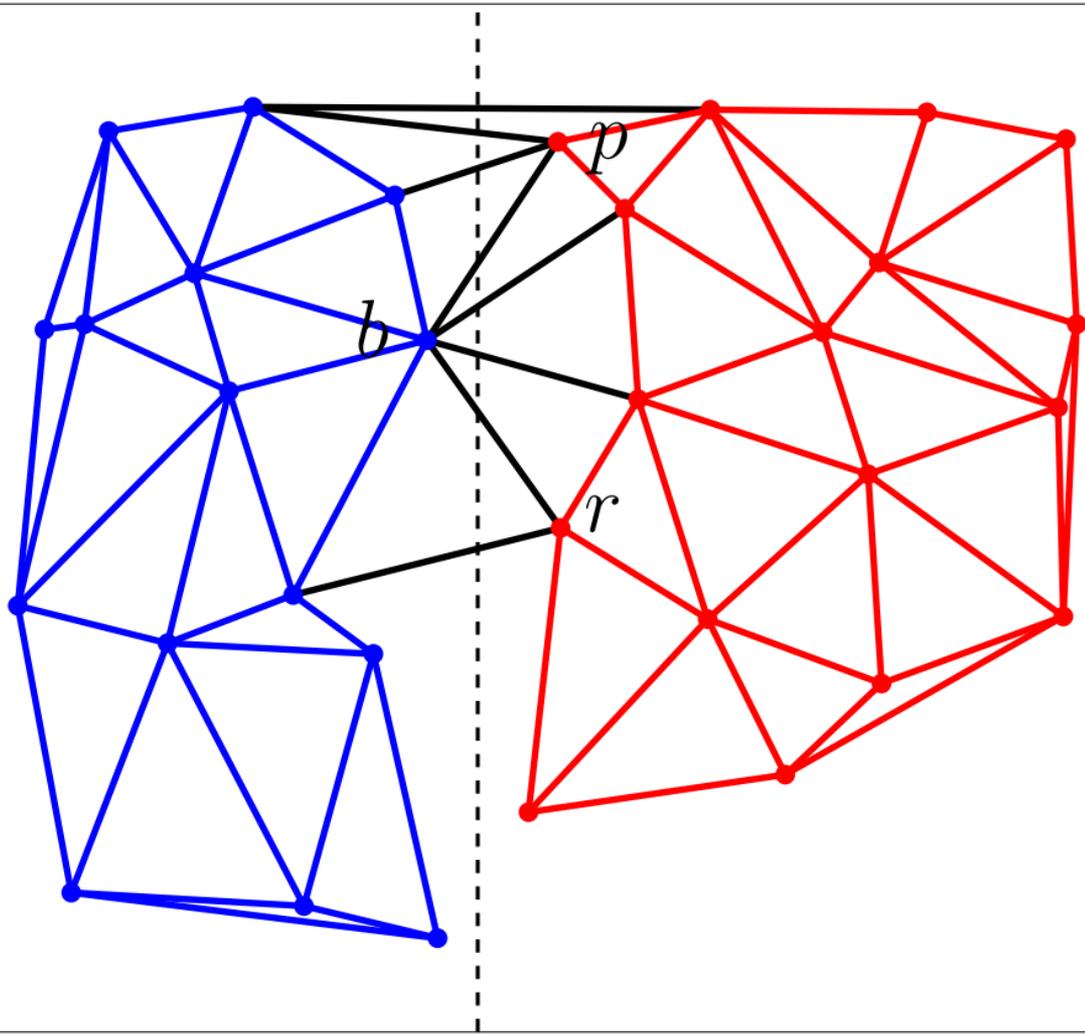


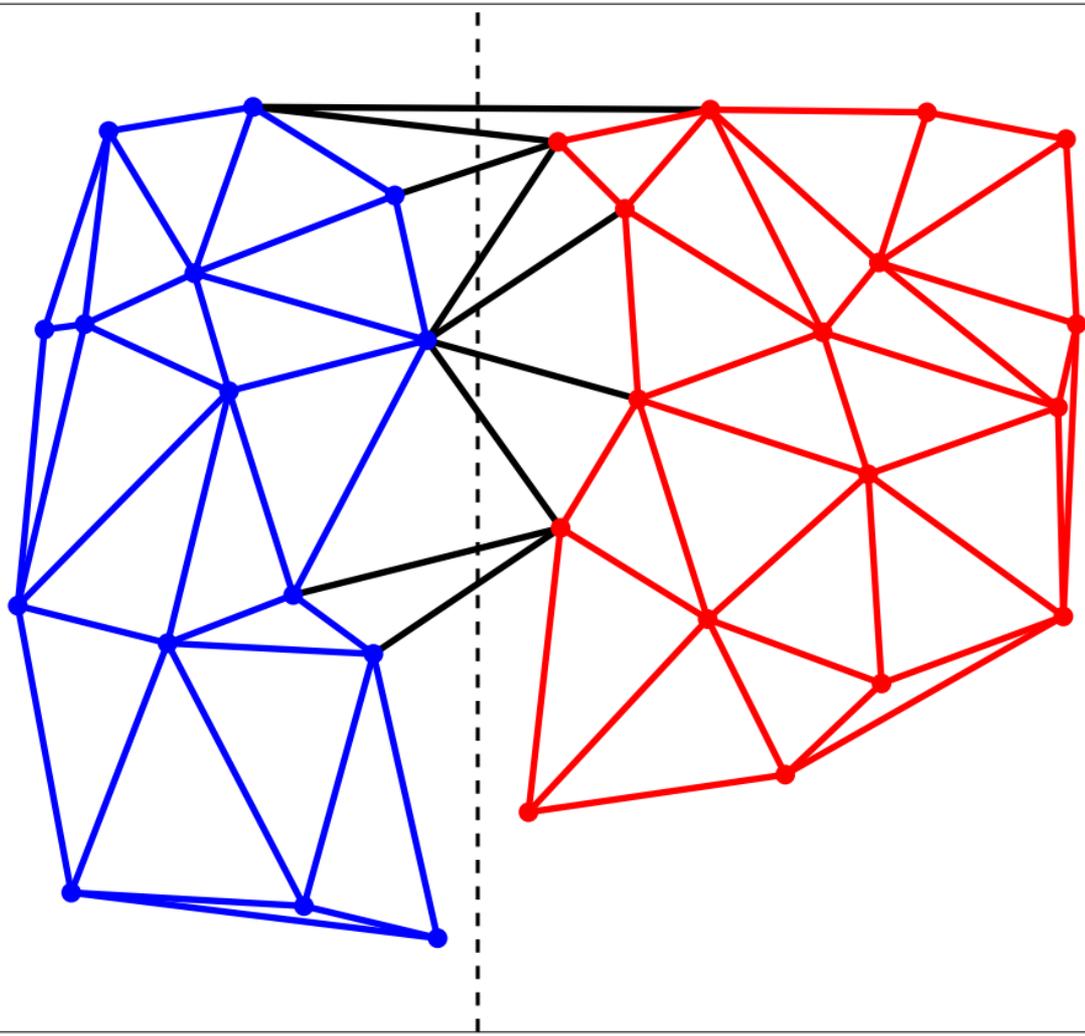


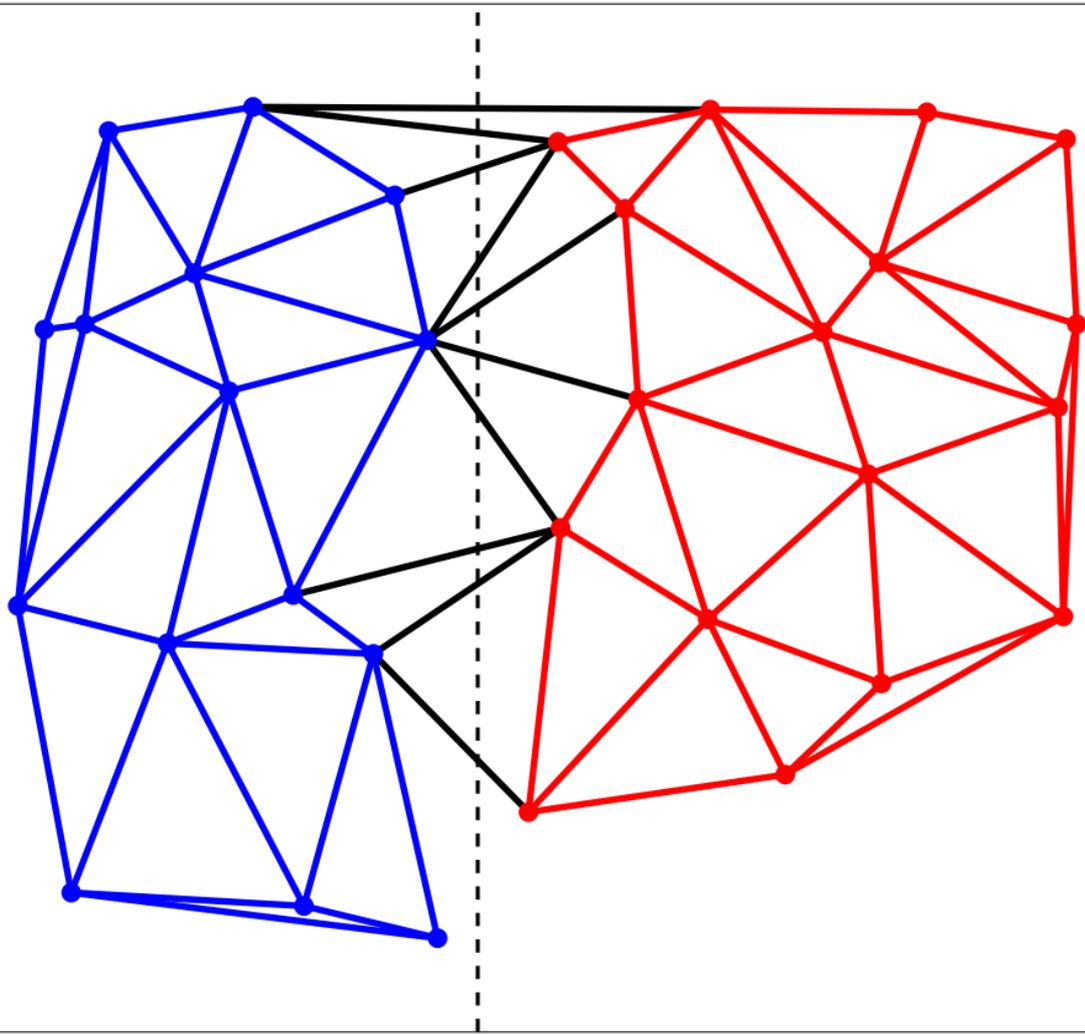


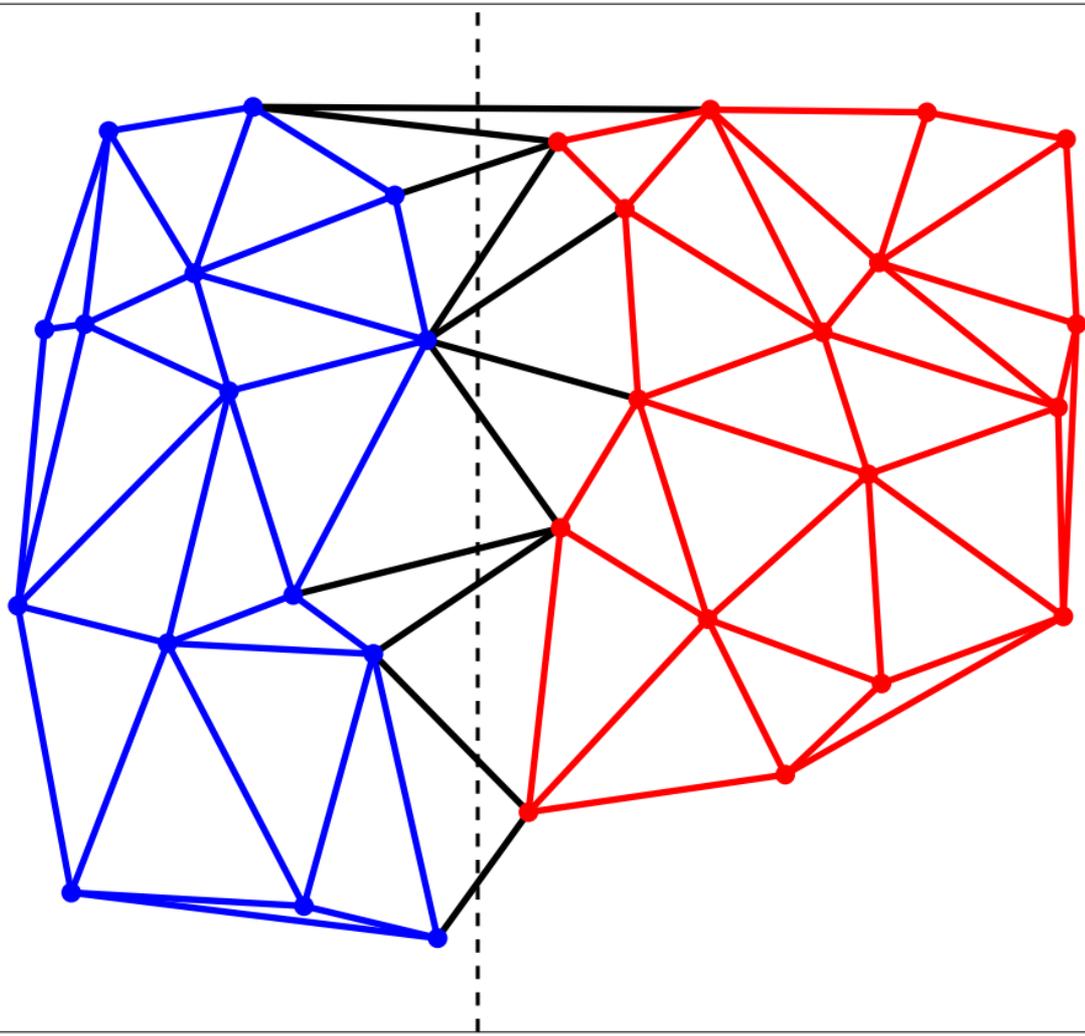


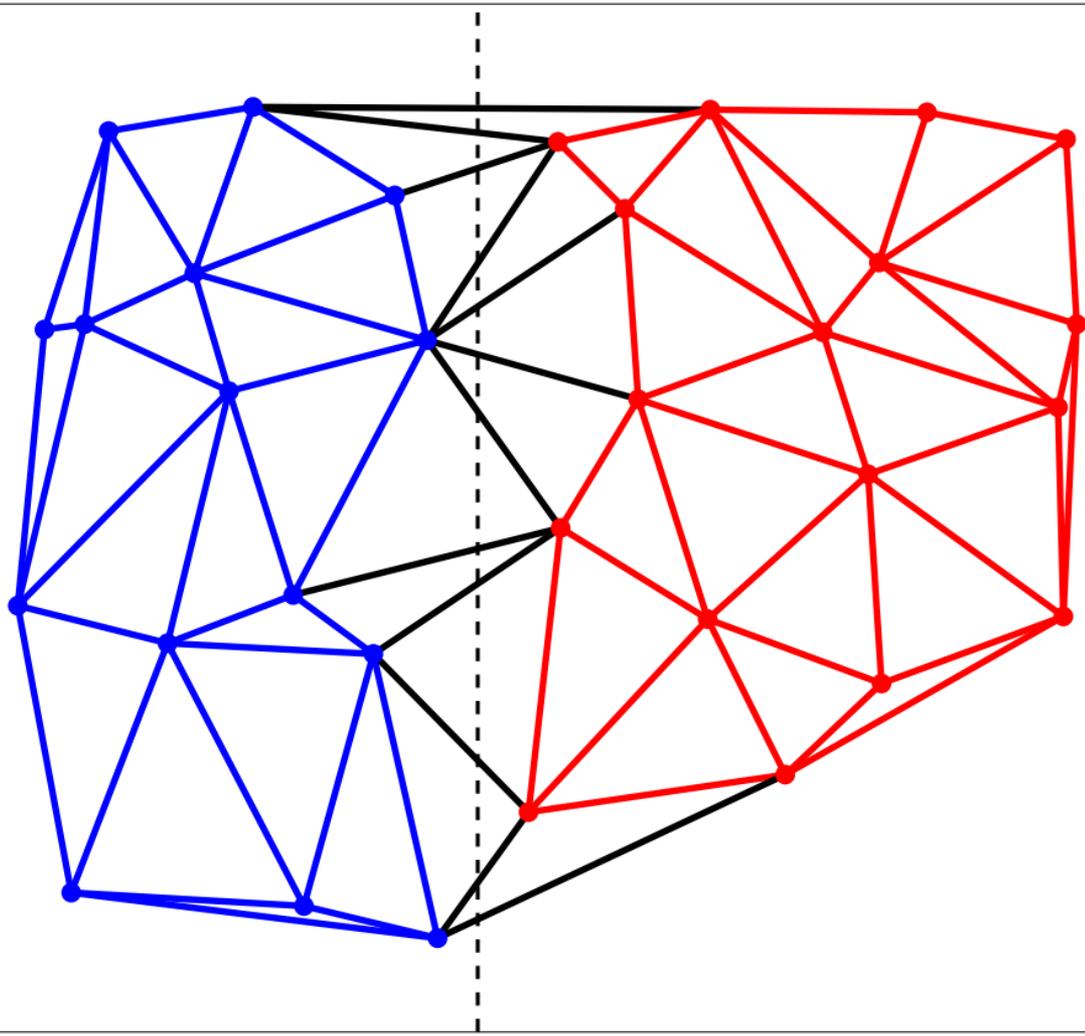












Complexité

Complexité

A chaque étape de la recherche de r_{next}

Complexité

A chaque étape de la recherche de r_{next}

On efface une arête rouge

Complexité

A chaque étape de la recherche de r_{next}

On efface une arête rouge

A chaque étape de la recherche de b_{next}

Complexité

A chaque étape de la recherche de r_{next}

On efface une arête rouge

A chaque étape de la recherche de b_{next}

On efface une arête bleue

Complexité

A chaque étape de la recherche de r_{next}

On efface une arête rouge

A chaque étape de la recherche de b_{next}

On efface une arête bleue

Choisir entre r_{next} et b_{next}

Complexité

A chaque étape de la recherche de r_{next}

On efface une arête rouge

A chaque étape de la recherche de b_{next}

On efface une arête bleue

Choisir entre r_{next} et b_{next}

On trace une arête noire

Complexité

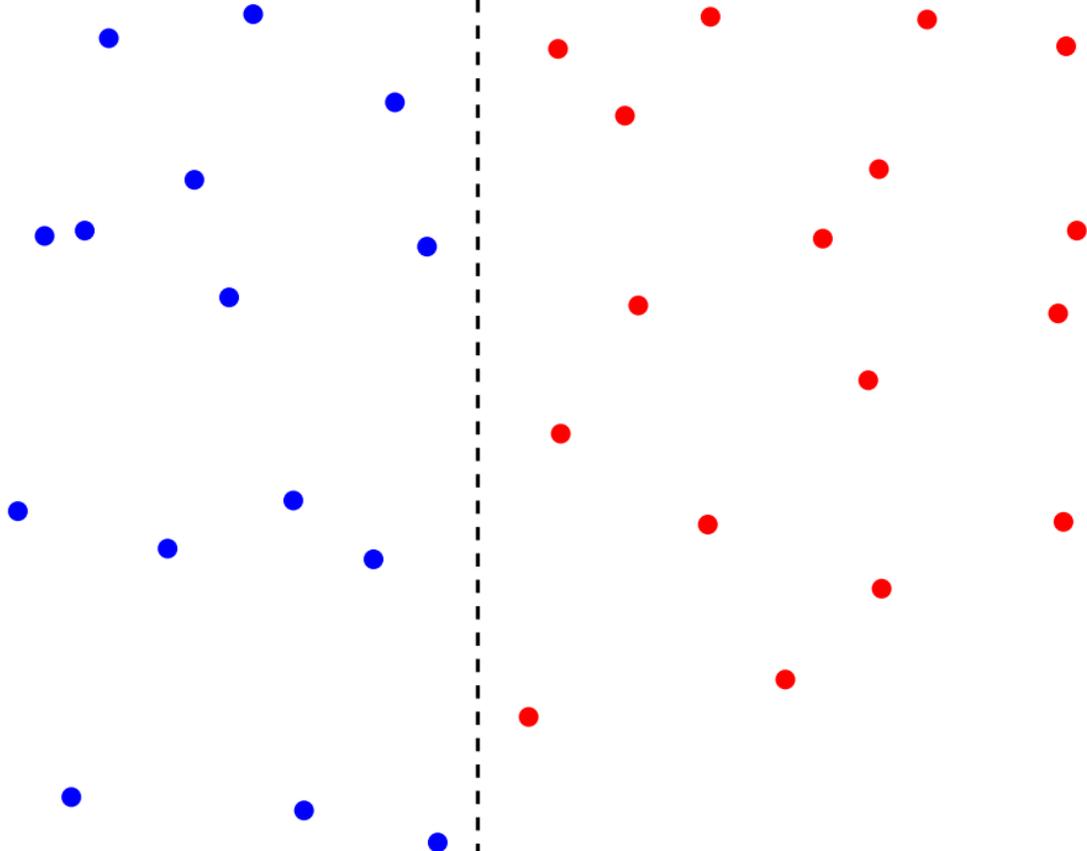
$$\text{Complexité} \leq \begin{aligned} & \# \text{ arêtes rouges} \\ & + \# \text{ arêtes bleues} \\ & + \# \text{ arêtes noires} \end{aligned}$$

Complexité

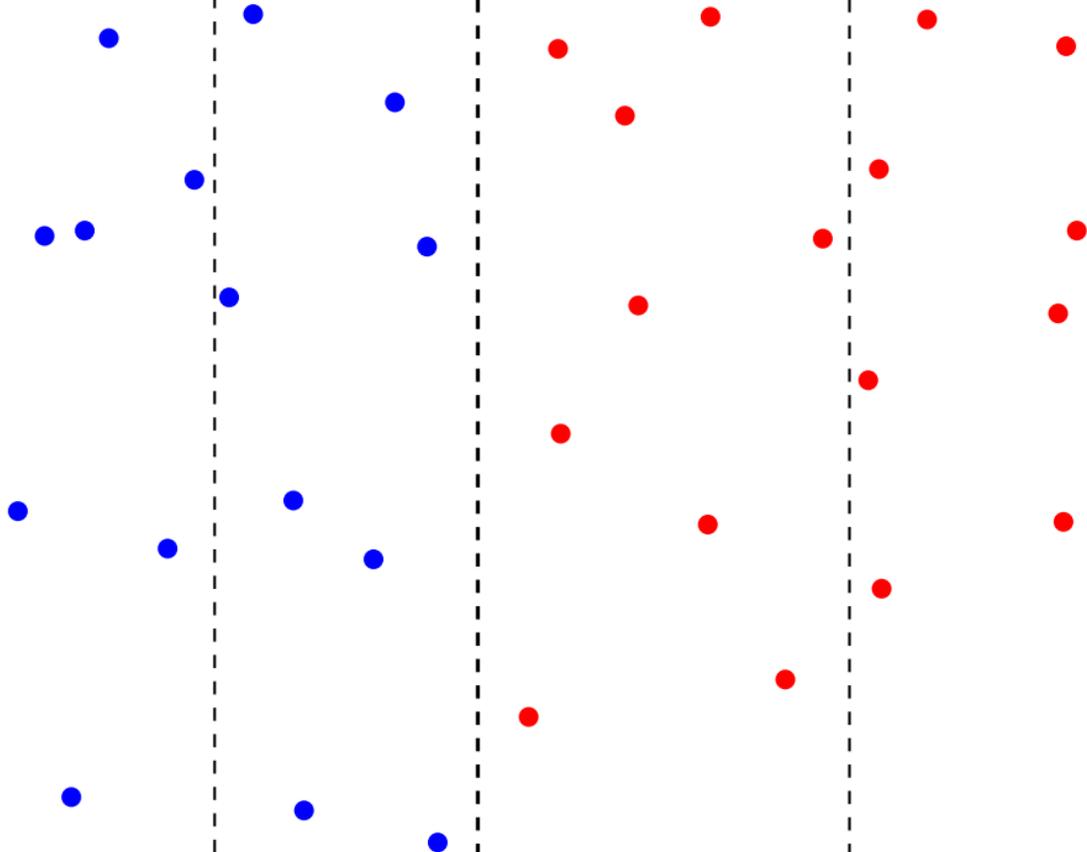
$$\begin{aligned} \text{Complexité} &\leq \# \text{ arêtes rouges} \\ &\quad + \# \text{ arêtes bleues} \\ &\quad + \# \text{ arêtes noires} \\ &\leq 3n + 3n = O(n) \end{aligned}$$

Division-Fusion $\implies O(n \log n)$

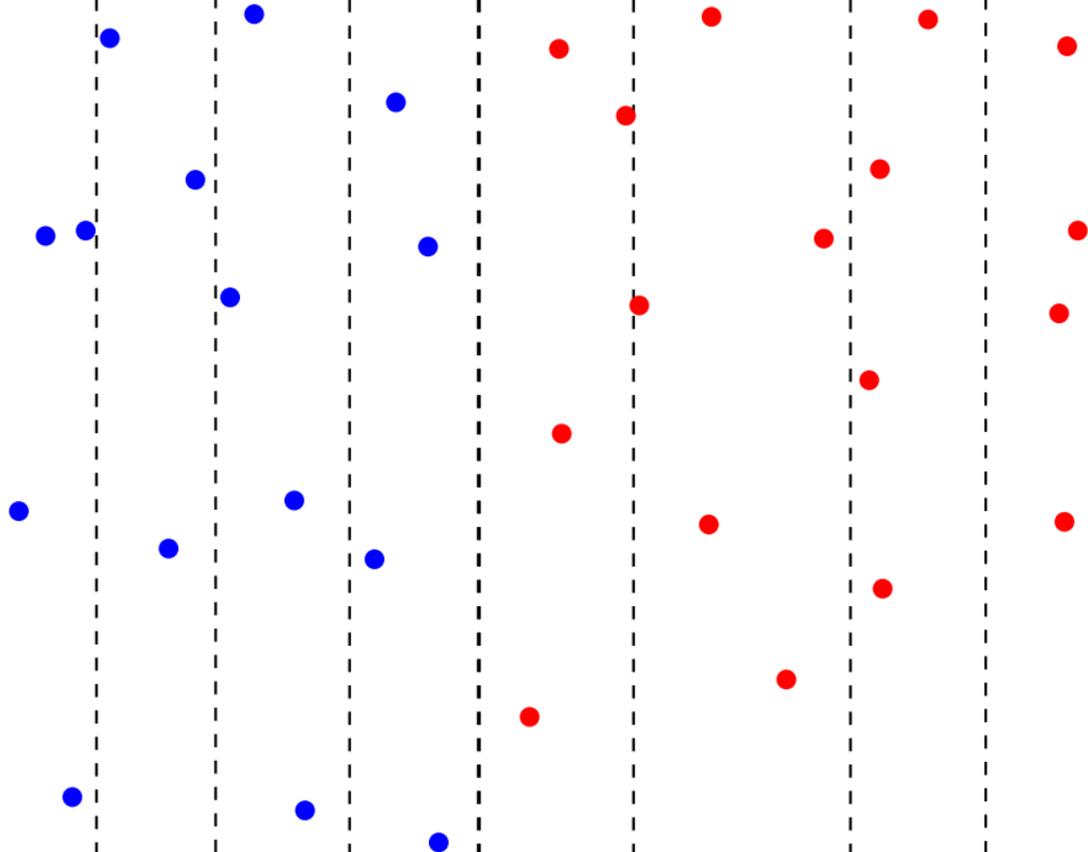
Division



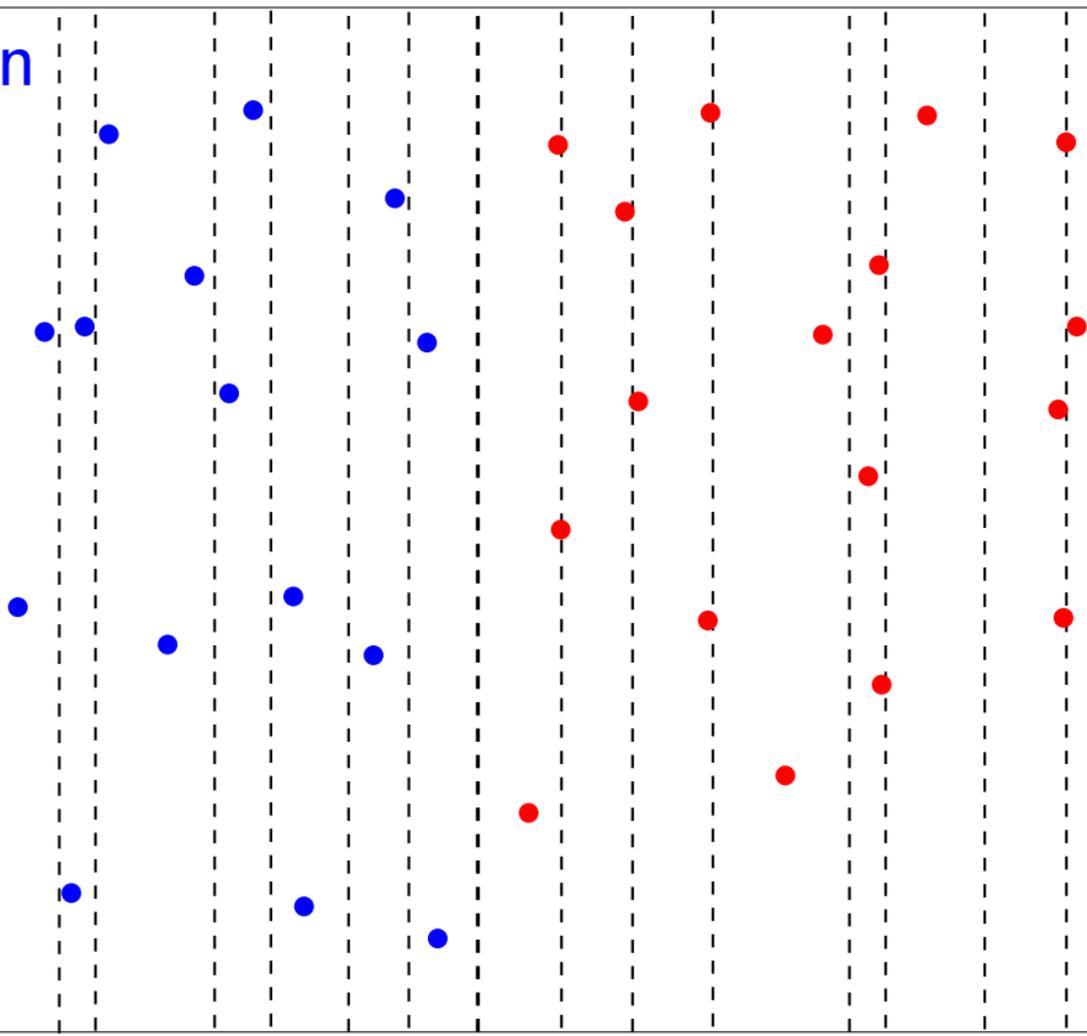
Division



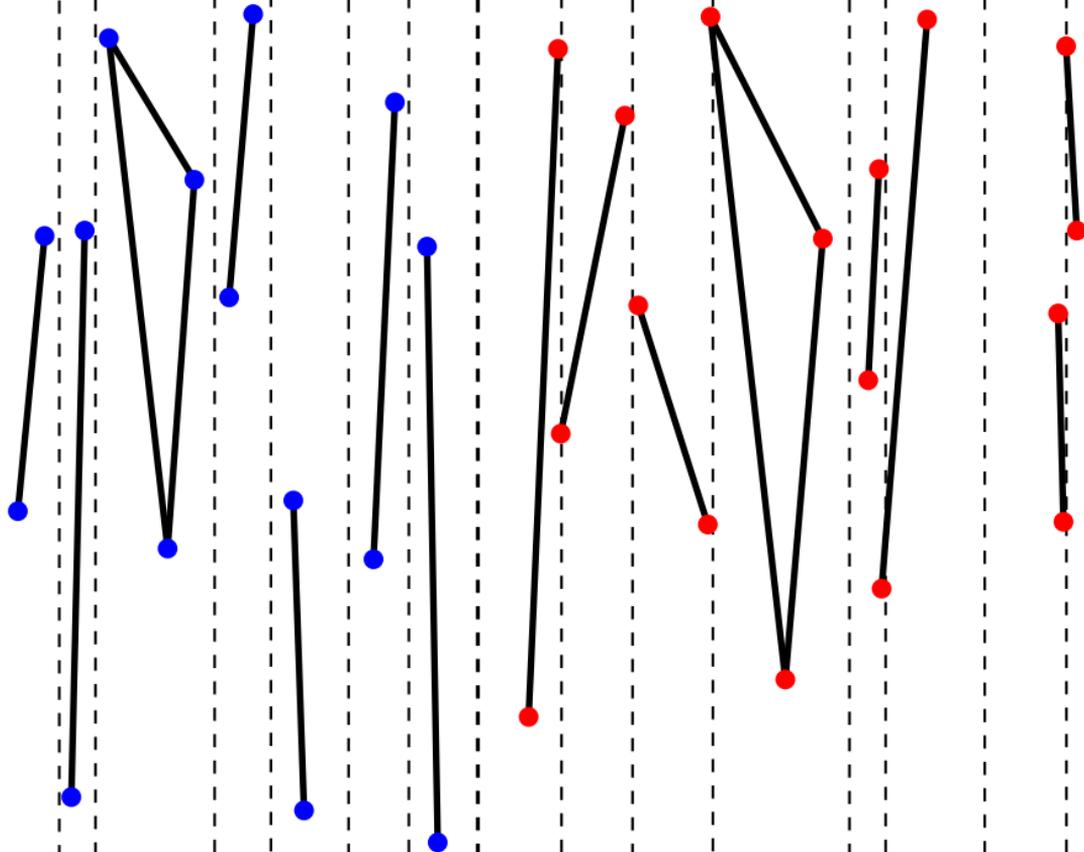
Division



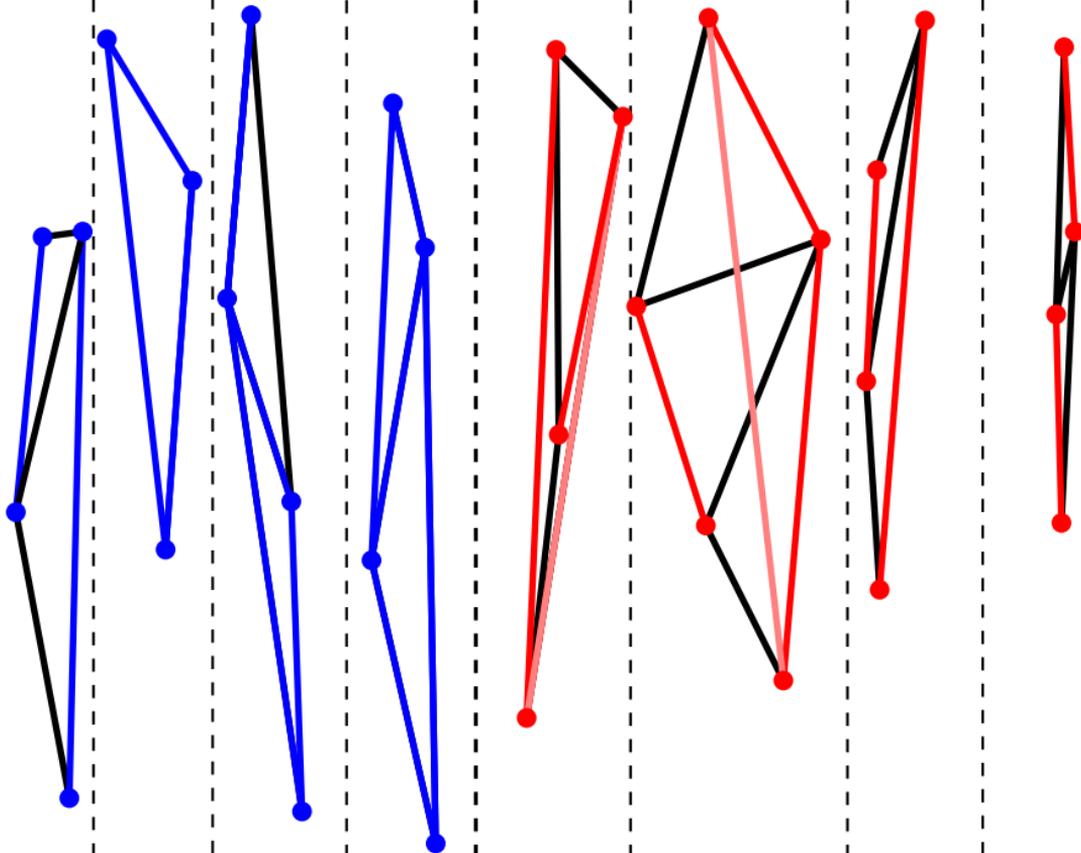
Division



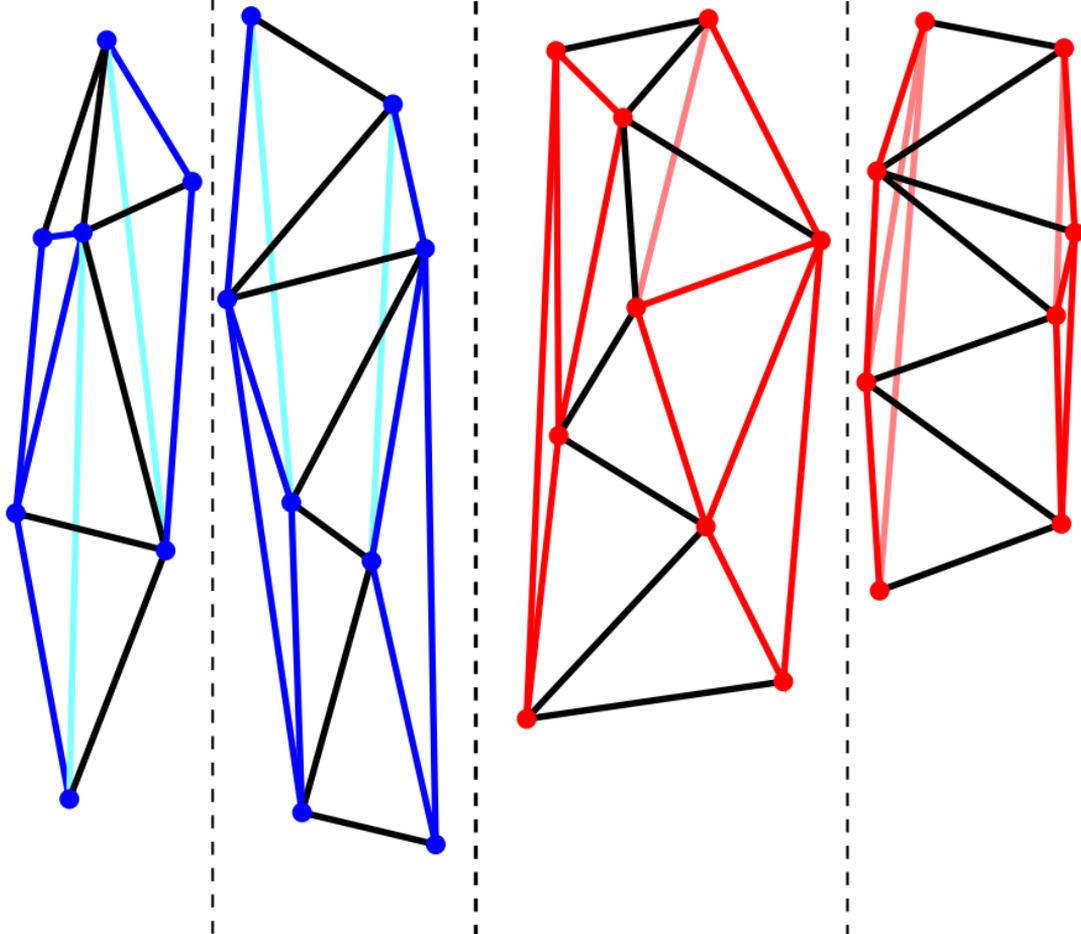
Division
Fusion



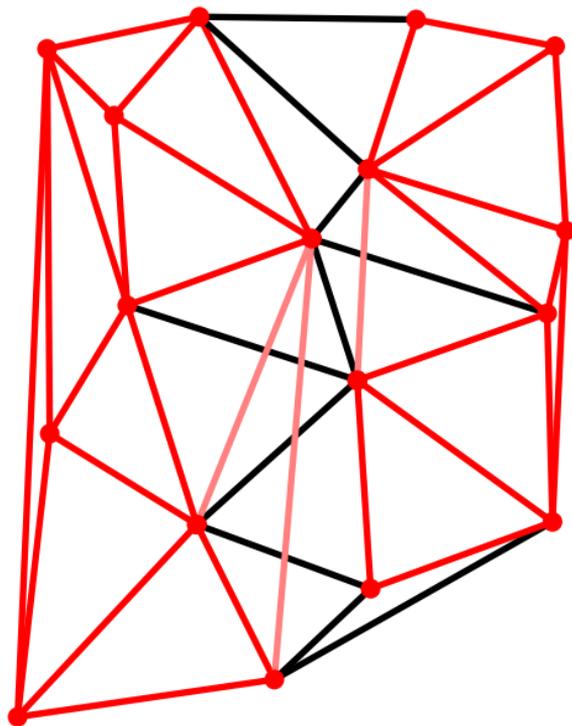
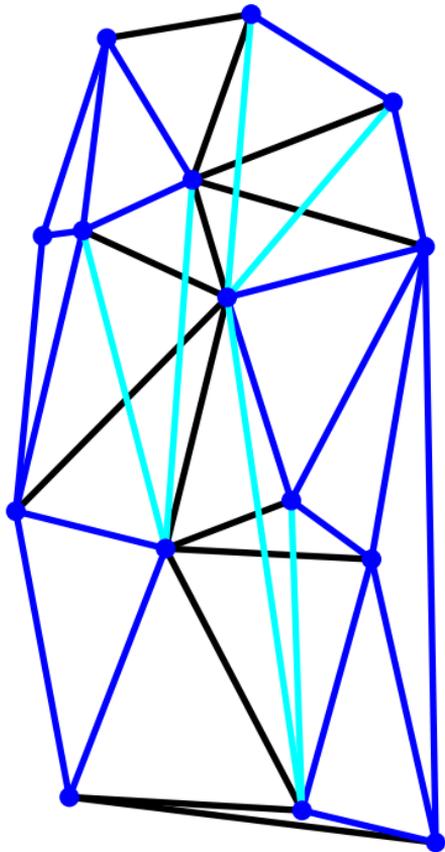
Division
Fusion



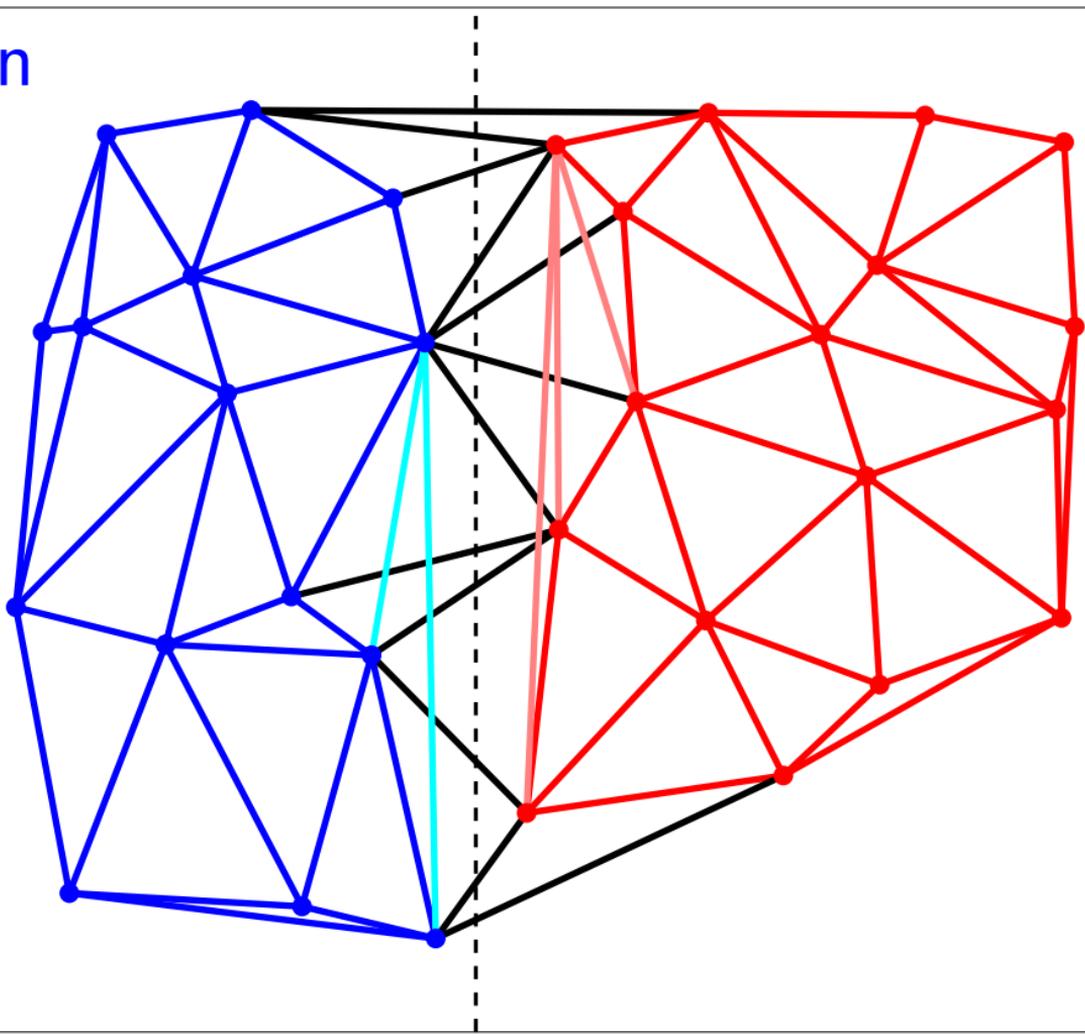
Division
Fusion

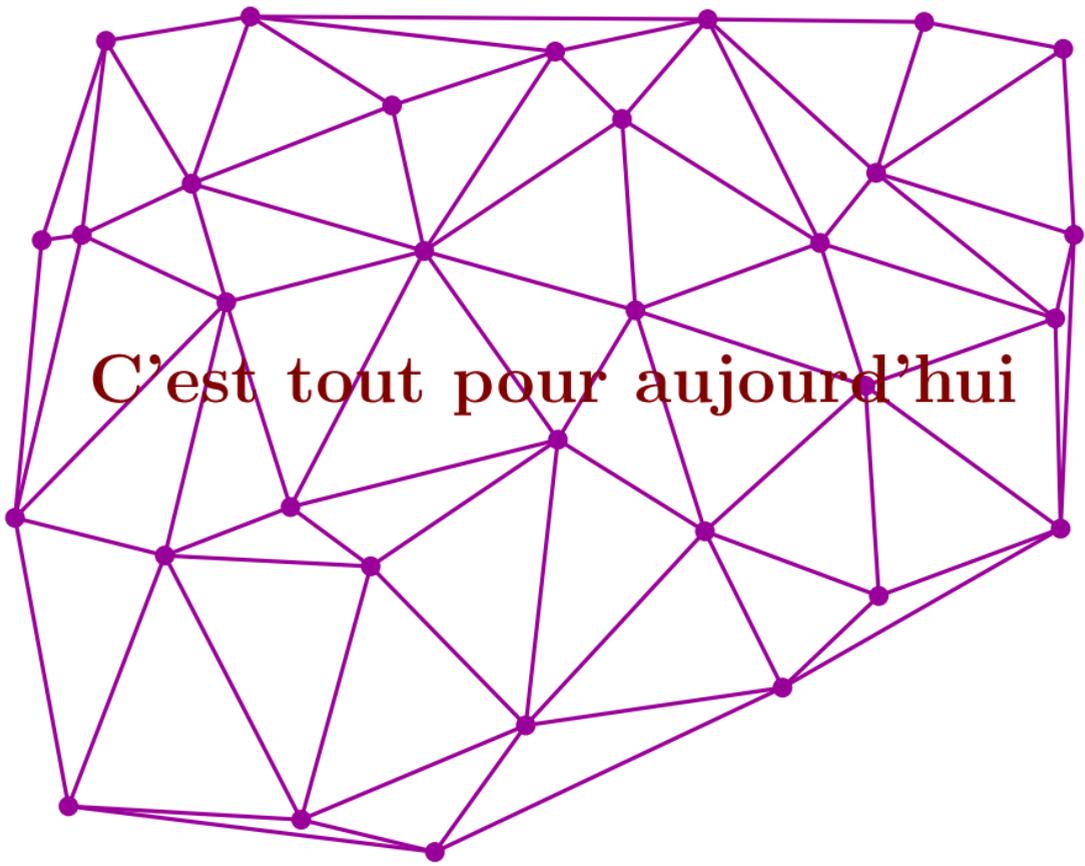


Division
Fusion



Division
Fusion





C'est tout pour aujourd'hui