1 Exercices 17 septembre 2020

1.1 Pour se reveiller: Paver un “échiquier”

On dispose d’une grille carrée de $2^n \times 2^n$ cases dont une case (n’importe laquelle) a été interdite. Montrer que l’on peut remplir la grille avec des triominos “en L” (groupes de 3 cases non alignées).

1.1 Correction:

Je vous propose deux démonstrations par récurrence.

Tout d’abord remarquons que la propriété est vraie pour $n = 0$ puisqu’il n’y a plus rien a remplir.

Il faut maintenant montrer que si la propriété est vraie pour tout $n < N$ alors elle est également vraie pour N.

1.1.1 Solution 1: couper en 4

On découpe la grille $2^N \times 2^N$ par ses médianes et on obtient quatre grilles $2^{N-1} \times 2^{N-1}$ autour du centre de la grille initiale.

On place un triomino autour du point central en occupant une case de chacune des 3 sous-grilles ne contenant pas la case interdite.

On a maintenant 4 sous-grilles dont chacune a une case interdite ou occupée et on peut remplir ces grilles en utilisant l’hypothèse de récurrence.

1.1.2 Solution 2: des cases deux fois plus grosses

On découpe la grille $2^N \times 2^N$ de cases de taille 1 (petites cases) pour en faire une grille $2^{N-1} \times 2^{N-1}$ de cases de taille 2×2 (grosses cases).

On complète la grosse case contenant la case interdite avec un triomino.

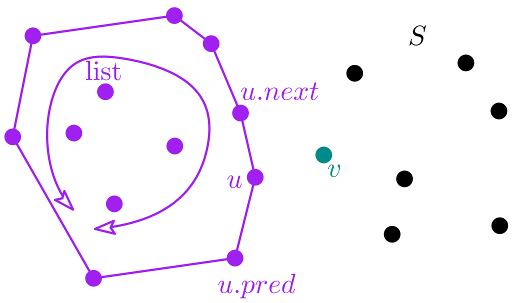
On vérifie que l’on peut remplir un gros triomino avec 4 petits triominos.

On applique l’hypothèse de récurrence sur la grille des grosses cases.

1.2 Convex hull by triangulation

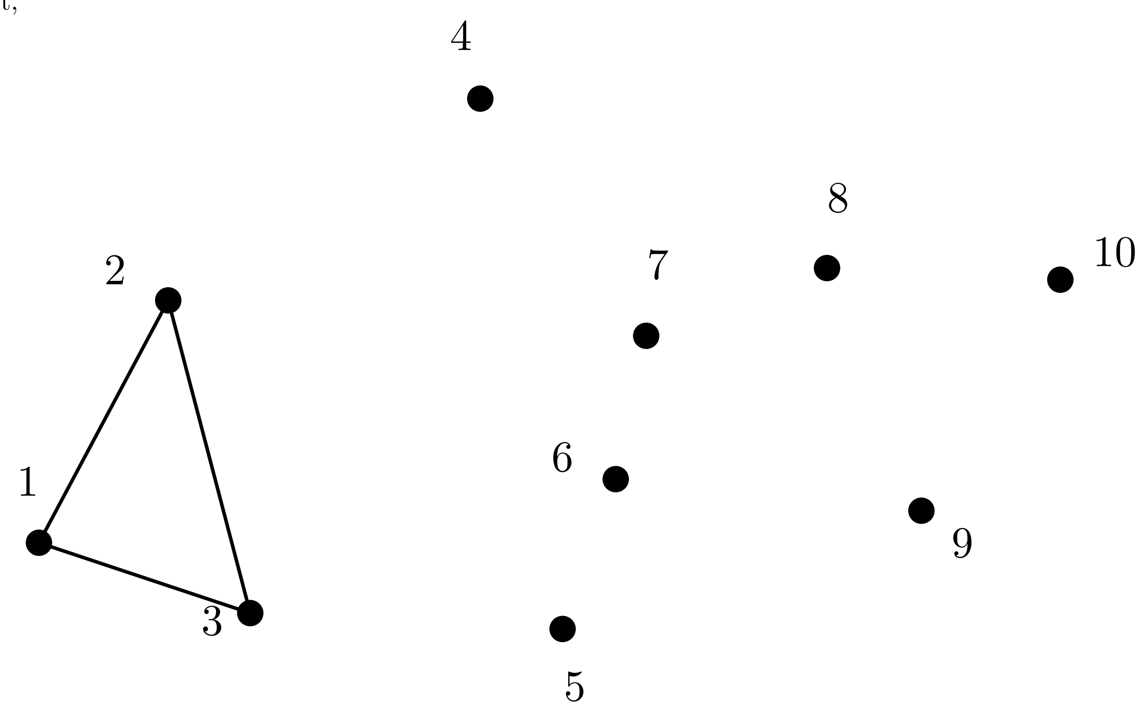
Consider the following convex hull algorithm:

`Input :` S `a point set.`
`sort` S `by` x`-coordinate;`
`create a circular list with the three leftmost points of` S
    `such that` $(u, u.next, u.next.next)$ `is positively oriented and` u `rightmost;`
$S = S \setminus \{u, u.next, u.next.next\}$`;`
`while` $S \neq \emptyset$ `{`
    $v =$`leftmost point in` S`;`
    $S = S \setminus \{v\}$`;`
    $w = copy(u)$`;`
    `while` $(v, u, u.next)$ `negative`
        $\{u = u.next;\}$
    $v.next = u$`;` $u.pred = v$`;`
    `while` $(v, w, w.pred)$ `positive`
        $\{w = w.pred;\}$
    $v.pred = w$`;` $w.next = v$`;`
    $u = v$`;`
`}`



1.2.1 Run the algorithm

Run (by hand) the algorithm on the example provided below and draw on the example the line segment uv in green each time the code pass through the line of the code marked with a green dot, draw uv in blue for the code line with a blue dot, and draw wv in red for the code line with a red dot,

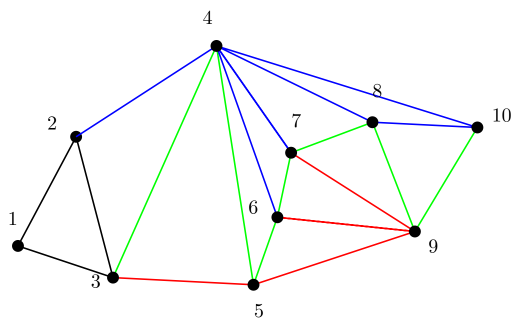


1.2.2 Complexity

What is the complexity of this algorithm on a set of n points (hint: use Euler relation).

1.2 Correction:

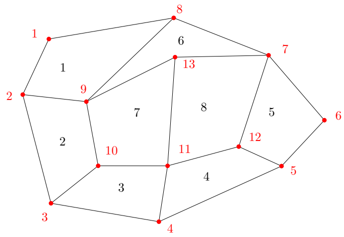
1.2.1 Run the algorithm



1.2.2 Complexity

Sorting step is $O(n \log n)$.
The complexity of the rest is bounded (up to a constant) by the number of times that the algorithm goes through the lines marked by the three dots. Each time the algorithm goes there, one can trace an edge of a triangulation of the points, thus the complexity is the number of edges in a triangulation.
Compared to the situation during the lecture (3D convex hull), the infinite face is of some unknown size $k \leq n$. Let e be the number of edges, and t the number of triangles. On the one hand, we have $(t+1) - e + n = 2$ (Euler relation). On the other hand, each triangle has three edges, each edge is in two faces: $2e = k + 3t$. One can deduce $e = 3n$.
Thus after the sorting preprocessing, the algorithm is linear.

1.3 Degré d'un point dans une quadrangulation



Étant donné un maillage d'un polygone à k cotés en q quadrilatères (pas forcément convexes, avec possiblement des sommets à l'intérieur du polygone). Dans la figure on a $k = 8$, $q = 8$ et $n = 13$.

Quel est le nombre n de sommets en fonction de q et k ?

En déduire une approximation du degré moyen d'un sommet dans la triangulation en fonction de n lorsque n est beaucoup plus grand que k.

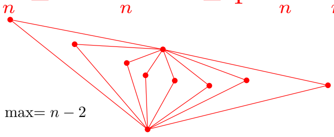
Quel est le degré maximum d'un point particulier ? Dessiner un exemple.

Est-il possible de quadranguler un triangle.

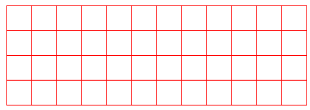
1.3 Correction:

Si e est le nombres d'arêtes.
Euler: $(q+1) - e + n = 2$.
Toutes les faces sont des quads sauf la face infinie, chaque arête est dans deux faces: $k + 4q = 2e$.
Ce qui nous donne $4 = 2(q+1) - (k+4q) + 2n$ soit $n = \frac{1}{2}(4 - 2q - 2 + k + 4q) = 1 + q + \frac{k}{2}$.

Le degré moyen est $\frac{1}{n}\sum_{v\in S} d^\circ(v) = \frac{2e}{n} = \frac{k+4(n-1-\frac{k}{2})}{n} = 4 - \frac{k}{n} - \frac{4}{n} \simeq 4$



max= $n-2$



degré moyen pour presque tout le monde

Le degré maximum d'un point est $n-2$

On ne peut pas quadranguler un triangle ou tout autre polygone avec un nombre impair de sommets car si k est inpair on obtient une valeur non entière pour n ce qui est évidemment impossible.