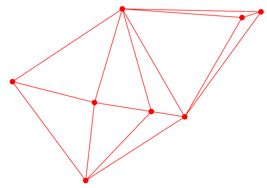
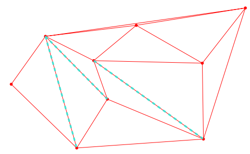
1 Controle continu 11 octobre 2018





1.1 Dessiner la triangulation de Delaunay

de l'ensemble de points sur la feuille jointe.

1.2 Triangulation localement de Delaunay

Mettre en évidence les arêtes non localement de Delaunay dans la triangulation sur la feuille jointe.

1.2 Correction:

ci dessus.

1.3 Gabriel, Delaunay et le graphe des demi-lunes

Étant donné un ensemble S de n points du plan, on dit que deux points a et b de S définissent une arête du graphe de Gabriel si le disque $D(a,b)$ de diamètre ab ne contient pas de points de S dans son intérieur. On notera G_S le graphe de Gabriel de S formé par toutes les arêtes de Gabriel. Une arête ab sera dans le graphe des demi-lunes L_S si au moins un des deux demi-disques formés en découpant $D(a,b)$ en deux par le segment ab est vide. On note D_S la triangulation de Delaunay de S. On note E_S l'enveloppe convexe de S.

1.3.1

Donner et démontrer des relations d'inclusion entre ces quatre graphes.

1.3.2

Dessiner un exemple avec quelques points (au moins 6) dans lequel $L_S = D_S = G_S$.

1.3.3

Dessiner un exemple avec quelques points (au moins 6) dans lequel ces trois graphes sont tous différents.

1.3.4

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille (le nombre d'arêtes) de D_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

1.3.5

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille de G_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

1.3.6

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille de L_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

1.3 Correction:

1.3.1

$E_S, G_S \subset D_S \subset L_S$

Une arête de D_S a un cercle vide, au moins un des demi-cercle de diamètre l'arête est inclus dedans et donc l'arête est aussi dans L_S. Une arête de Gabriel a un cercle vide (le cercle diamétral par définition de Gabriel) elle est donc de Delaunay. Une arête de l'enveloppe convexe est de Delaunay (elle a un cercle vide de très grand rayon). Une arête de Gabriel n'est pas forcément sur l'enveloppe convexe (dessiner juste un triangle obtus) ni le contraire (une arête de Gabriel intérieure à l'enveloppe convexe est facile à dessiner).

1.3.2

Par exemple un pentagone régulier et un point au centre.

1.3.3

Par exemple 6 points sur une demi-parabole

1.3.4

Delaunay a toujours $3n-3-k$ arêtes où k est la taille de l'enveloppe convexe, c'est donc toujours du $\Theta(n)$.

Si on veut quelque chose de plus précis on a comme borne supérieure $3n-6$ (mettre $n-3$ points comme on veut dans un triangle). Comme borne inférieure $2n-3$ avec n points comme on veut sur le bord d'un convexe.

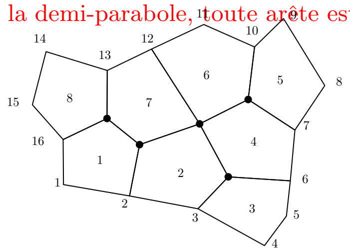
1.3.5

Pour qu'une arête de Delaunay ne soit pas de Gabriel, il faut qu'un des triangles incident ait un angle obtus. Un triangle a au plus un angle obtus. Donc il y a au moins $(3n-3-k)-(2n-3-k)-n-1$ arêtes de Gabriel, un exemple est donné avec n points sur une demi-parabole. Il y a au plus $3n-6$ arêtes de Gabriel comme pour Delaunay, mais on est incapable d'atteindre cette borne car il est impossible d'éviter complètement les angles obtus si l'enveloppe convexe est un triangle. Un maillage hexagonal va fournir une taille $3n-\Theta(\sqrt{n})$.

1.3.6

La borne inférieure est donnée par celle de Delaunay. Un maillage hexagonal va fournir une taille $3n-\Theta(\sqrt{n})$. La borne supérieure est quadratique, avec des points sur la demi-parabole, toute arête est dans L_S.

1.4 Pentagulation



Étant donné un découpage d'un polygone à k cotés en p pentagones. Quel est le nombre n de sommets internes en fonction de p et k ?

Dans la figure on a $k = 16$, $p = 8$ et $n = 5$.

1.4 Correction:

Si e est le nombres d'arêtes.

Euler: $(p+1)-e+(k+n)=2$.

Toutes les faces sont des pentagones sauf la face infinie, chaque arête est dans deux faces: $5p+k=2e$.

Ce qui nous donne $5p+k=2p+2k+2n-2$ soit $n=\frac{1}{2}(3p-k+2)$.