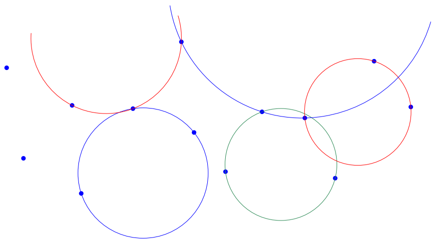
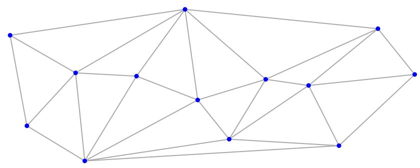
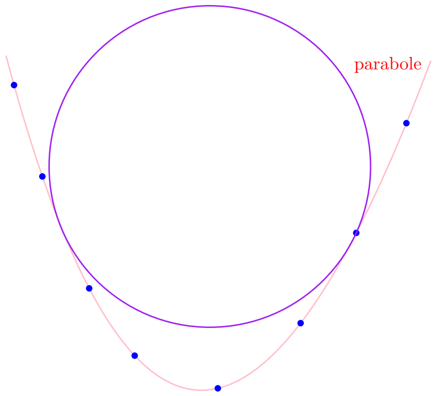
# 4 Exercices 6 octobre 2022. Contrôle continu.

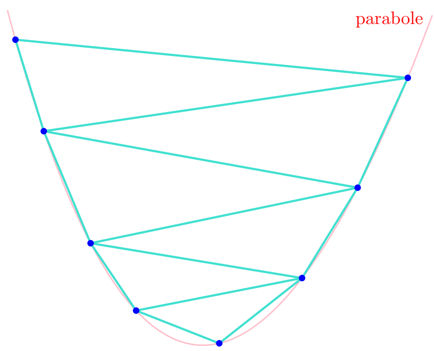
## 4.1 Dessiner...

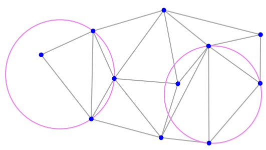
## 4.1 Correction:

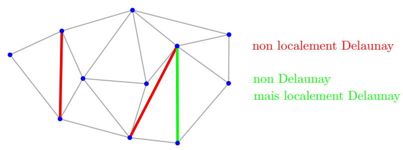






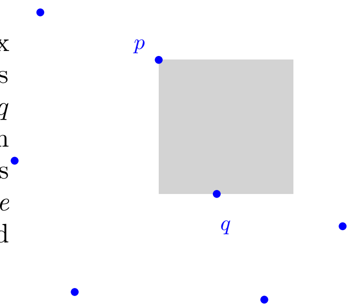



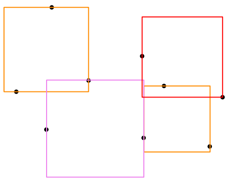


## 4.2 Rectangles et carrés vides

Soit $S$ un ensemble de $n$ points. On supposera que l'on n'a pas deux points à la même abcisse ou à la même ordonnée, que l'on n'a pas quatre points sur les bords d'un même carré. Pour deux points $p$ et $q$ de $S$, on dira que $pq$ est une arête (orientée) *carré-vide'* si il existe un carré parallèle aux axes ayant $p$ et $q$ sur son bord et ne contenant pas d'autres points de $S$. De même on dira qu'une arête est *rectangle-vide* si il existe un rectangle parallèle aux axes contenant $pq$ sur son bord et ne contenant pas d'autres points de $S$.




### 4.2.1 Dessiner les arêtes carré-vides (sur la feuille jointe)

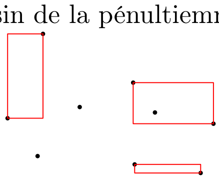


### 4.2.2 Structure

Montrer qu'il existe au plus un carré ayant trois points donnés sur son bord et donner une condition d'existence.
Montrer que deux arêtes carré-vides ne peuvent pas se croiser.
Donner une borne supérieure sur le nombre d'arêtes carré-vides.
Donner une borne inférieure sur le nombre d'arêtes carré-vides.

### 4.2.3 Dessiner les arêtes rectangle-vides (sur la feuille jointe)

Utilisez une autre couleur pour ajouter les arêtes rectangle-vides qui ne sont pas carré-vides sur le dessin de la pénultiemme question.



### 4.2.4 Structure

Donner une borne supérieure sur le nombre d'arêtes rectangle-vides.
Donner une borne inférieure sur le nombre d'arêtes rectangle-vides.

## 4.2 Correction:

### 4.2.1 Dessiner

cf ci dessous

### 4.2.2 Structure

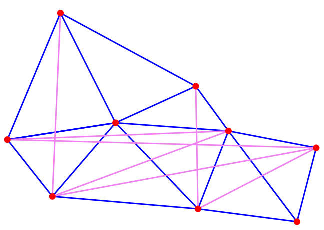
Étant donné trois points $p$, $q$, $r$, et étant donné l'hypothèse *pas deux points à la même abcisse ou ordonnée*. Si on considère le plus petit rectangle englobant les trois points: ce rectangle est limité en haut par le point le plus haut, en bas par le point le plus bas, à droite par le point le plus à droite à gauche par le point le plus à gauche. Les points "limitant" sont soit deux points dans des coins, et dans ce cas il ne peut pas y avoir de carré avec les trois points sur le bord, soit trois points un dans un coin et deux sur les autres cotés. Sans perte de généralité disons $p$ en bas à droite, $q$ en haut et $r$ à gauche et que ce rectangle est plus haut que large; alors on peut construire un carré en étendant le rectangle vers la droite, le point $p$ sera alors sur le bord bas du carré et il n'y aura pas de points sur le bord droit.

Supposons que l'on ai 4 points $p, q, r, s$ et que les arêtes $pq$ et $rs$ se croisent et soient carré-vides, et que $C$ soit un carré vide pour $pq$ et $D$ un carré vide pour $D$. Si les carrés sont disjoints les segments ne peuvent pas se couper. Si un carré est inclus dans l'autre, le plus gros ne peut être vide. Si les carrés se coupent, ils se coupent en deux points, on a alors $pq$ dans l'enveloppe convexe de $C \setminus D$ et $rs$ dans l'enveloppe convexe de $D \setminus C$ et ces deux ensembles étant disjoints les segments ne peuvent se couper. On en déduit que deux arêtes carré-vides ne peuvent se couper.

Les arêtes carré-vides forment un graphe planaire, elles sont donc moins nombreuses que celle d'une triangulation soit moins que $3n - 6$.

À partir d'un point de $S$ on peut faire grossir un carré ayant ce point comme coin supérieur droit jusqu'à ce que l'on touche un autre point et trouver ainsi une arête carré-vide. De même pour les autres coins. De cette manière on peut associer à un point "au milieu" de l'ensemble 4 arêtes. Malheureusement il peut exister des points qui n'ont pas de points "en bas à gauche". Cependant, hormis pour le point le plus bas, il y aura toujours quelque chose soit en bas à gauche, soit en bas à droite. Donc pour chaque point (sauf le plus bas) on peut lui associer au moins une arête en dessous. De même, sauf pour le point le plus haut, on peut associer une arête au dessus. Soit au moins 2n-2 associations. Chaque arête est au plus dans deux associations, on a donc au moins $n - 1$ arête. Cette borne peut être atteinte en prenant des points (presque) alignés sur une droite oblique.

### 4.2.3 Dessiner



### 4.2.4 Structure

Le nombre de paire de points $\frac{n(n-1)}{2}$ est une borne supérieure sur le nombre d'arêtes rectangle-vides. Cette borne peut être atteinte si on prends des points sur un cercle puisque dans ce cas, le plus petit rectangle englobant deux points est inclu dans le cercle et donc ne contient pas de points.

La borne inférieure des carrés s'applique, le même exemple que pour le carré montre qu'elle peut être atteinte.