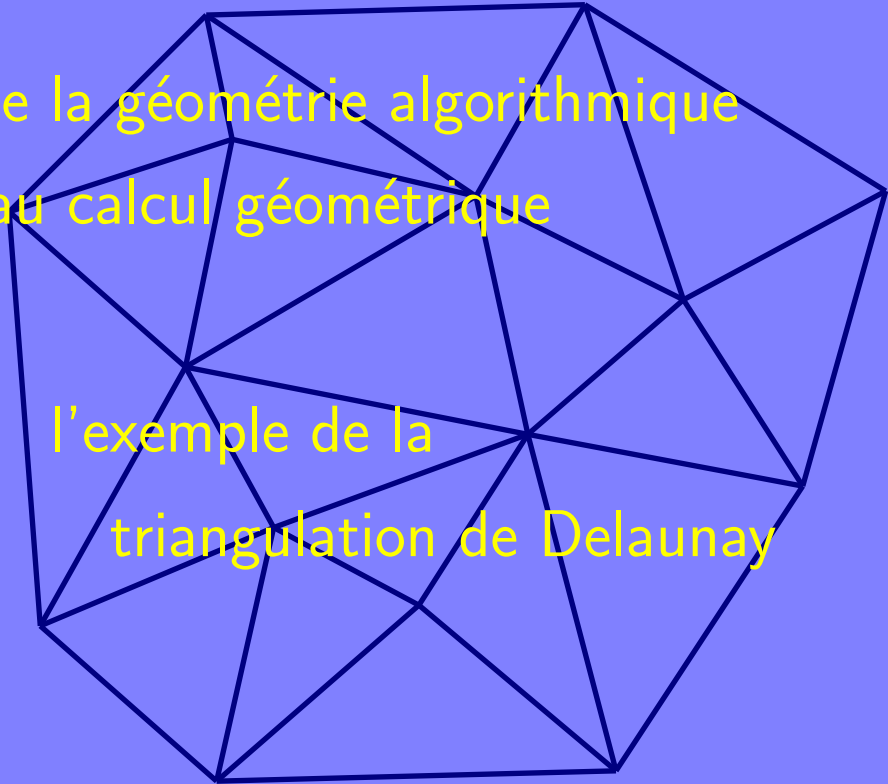


De la géométrie algorithmique au calcul géométrique

De la géométrie algorithmique
au calcul géométrique

l'exemple de la
triangulation de Delaunay





De la géométrie algorithmique
au calcul géométrique

l'exemple de la
triangulation de Delaunay

Robustesse

Robustesse

Exemple

A

B

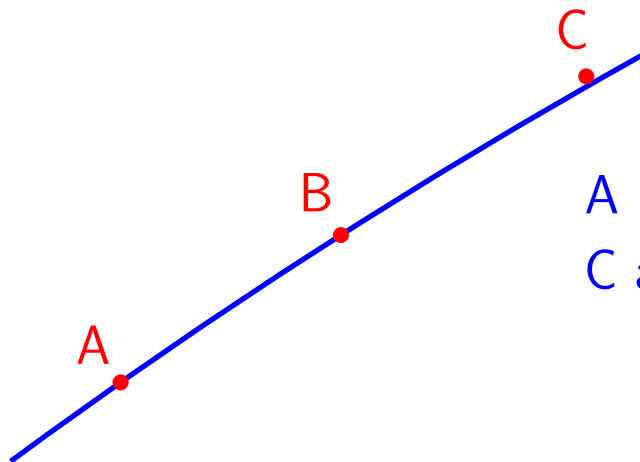
C

D

$A <_x B <_x C <_x D$

Robustesse

Exemple

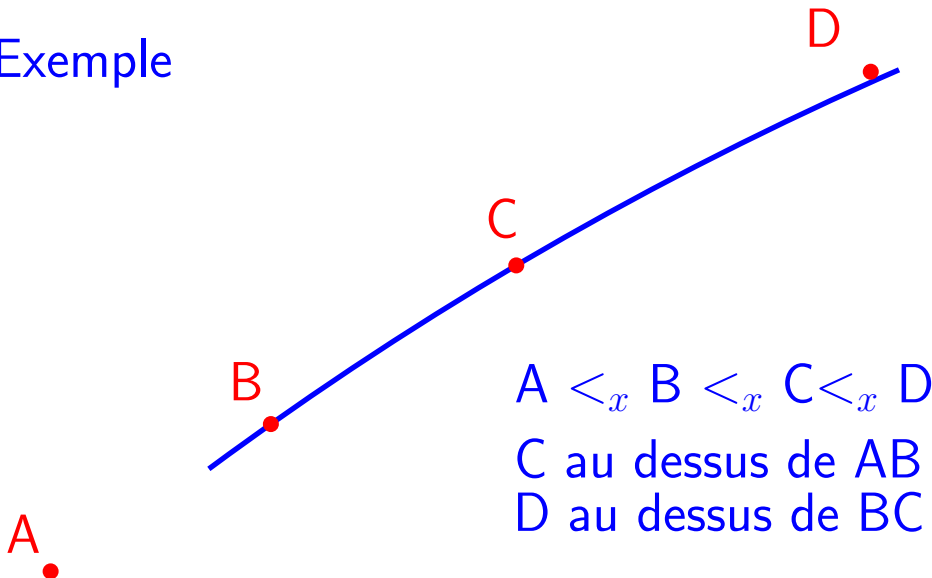


$$A <_x B <_x C <_x D$$

C au dessus de AB

Robustesse

Exemple



$$A <_x B <_x C <_x D$$

C au dessus de AB

D au dessus de BC

Robustesse

Exemple

A

B

C

D

$A <_x B <_x C <_x D$

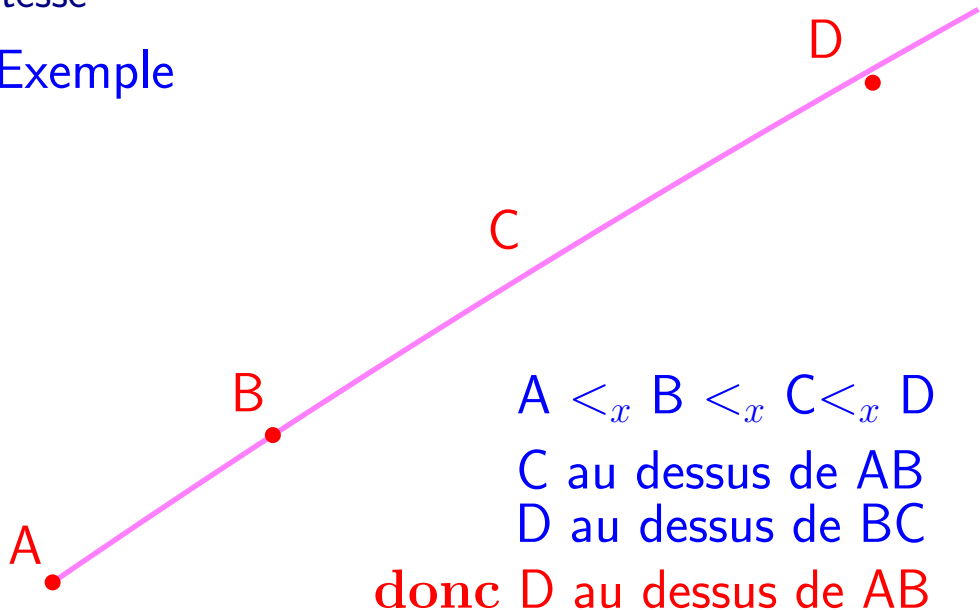
C au dessus de AB

D au dessus de BC

donc D au dessus de AB

Robustesse

Exemple



mais l'évaluation des prédicats donne le contraire

Algorithmes géométriques

Modèle Real RAM

Algorithmes géométriques

Modèle Real RAM

On sait calculer avec des réels

Algorithmes géométriques

Modèle Real RAM

On sait calculer avec des réels



float, double

float, double

c'est pas des réels

float, double

c'est pas des réels

erreurs d'arrondi

float, double

c'est pas des réels

erreurs d'arrondi

Problème

float, double

c'est pas des réels

erreurs d'arrondi

Problème

≠ Inexactitudes

float, double

c'est pas des réels

erreurs d'arrondi

Problème

≠ Inexactitudes

= Incohérences

Résultat combinatoire

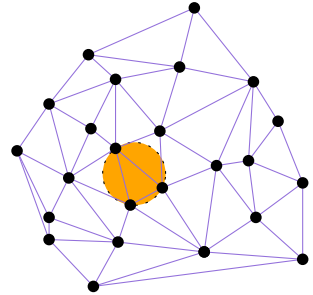
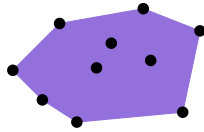
Résultat combinatoire



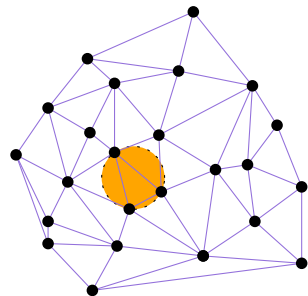
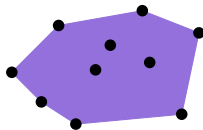
Résultat combinatoire



Résultat combinatoire

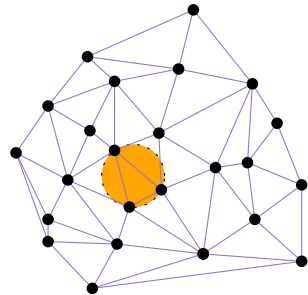
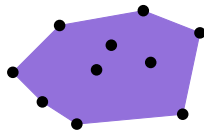


Résultat combinatoire

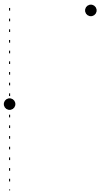


Prédicats

Résultat combinatoire

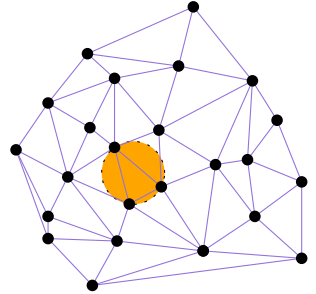
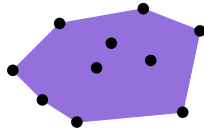


Prédicats

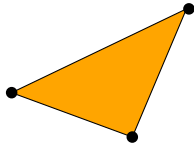
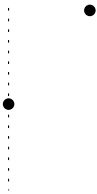


Comparaison

Résultat combinatoire



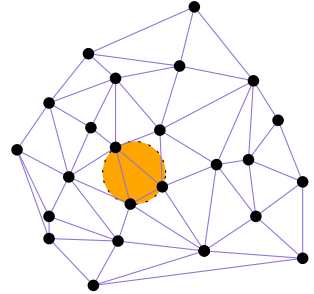
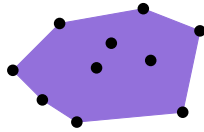
Prédicats



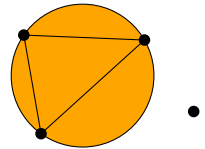
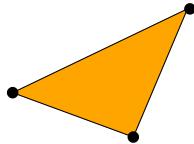
Comparaison

Orientation

Résultat combinatoire



Prédicats



Comparaison

Orientation

Cocircularité

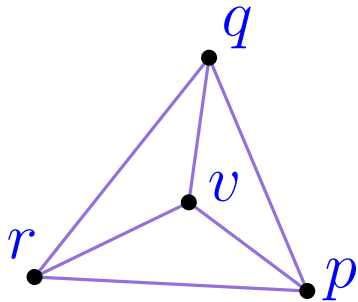
On a tendance à utiliser la géométrie

On a tendance à utiliser la géométrie

i.e. les théorèmes géométriques

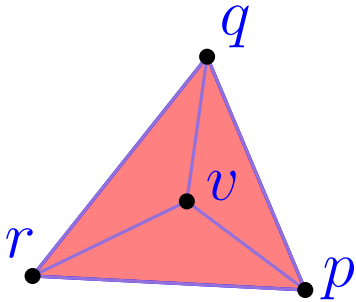
dans les algorithmes

théorème géométrique utile aux algorithmes

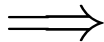


$$\begin{array}{l} pqv \\ qrv \\ rpv \end{array} \text{ CCW} \implies pqr$$

théorème géométrique utile aux algorithmes

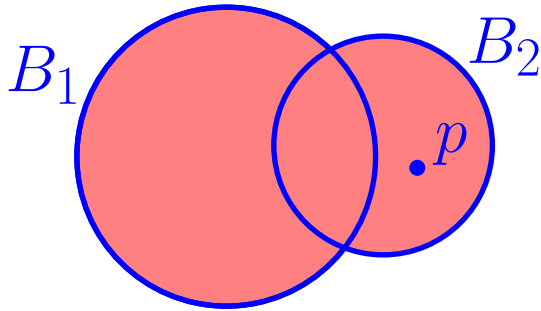


pqv
 qrv **CCW**
 rpv



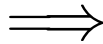
pqr **CCW**

théorème géométrique utile aux algorithmes

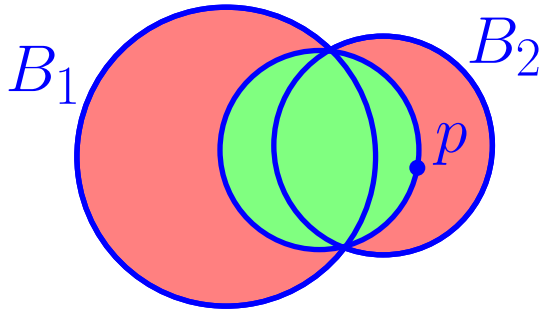


$$p \in B_2$$

$$p \notin B_1$$

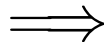


théorème géométrique utile aux algorithmes



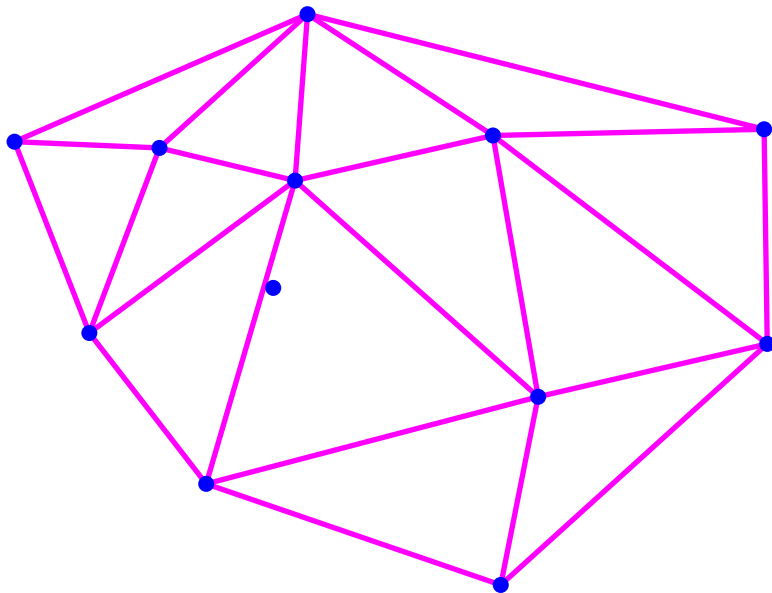
$$p \in B_2$$

$$p \notin B_1$$

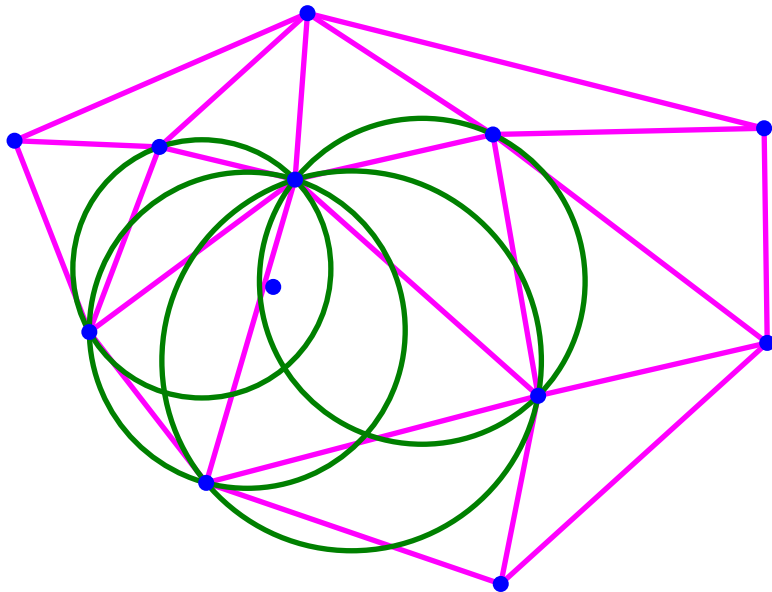


$$B' \subset B_1 \cup B_2$$

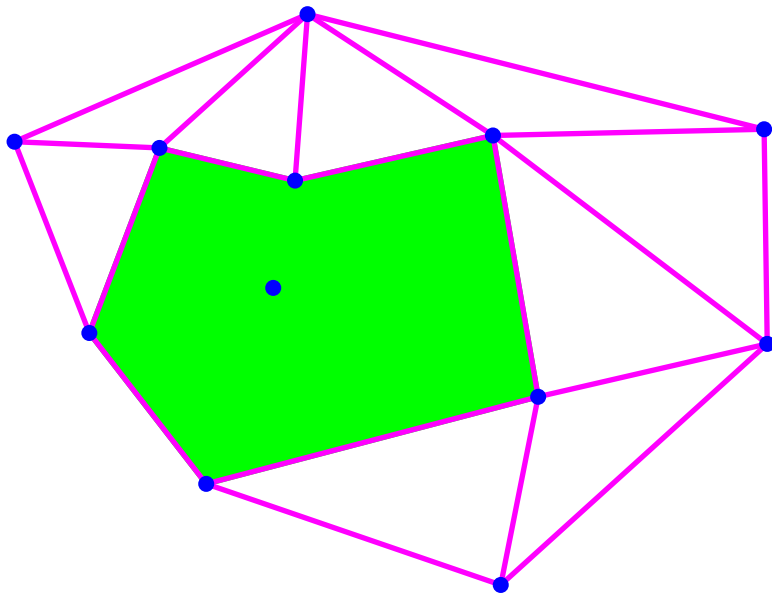
Insertion dans Delaunay



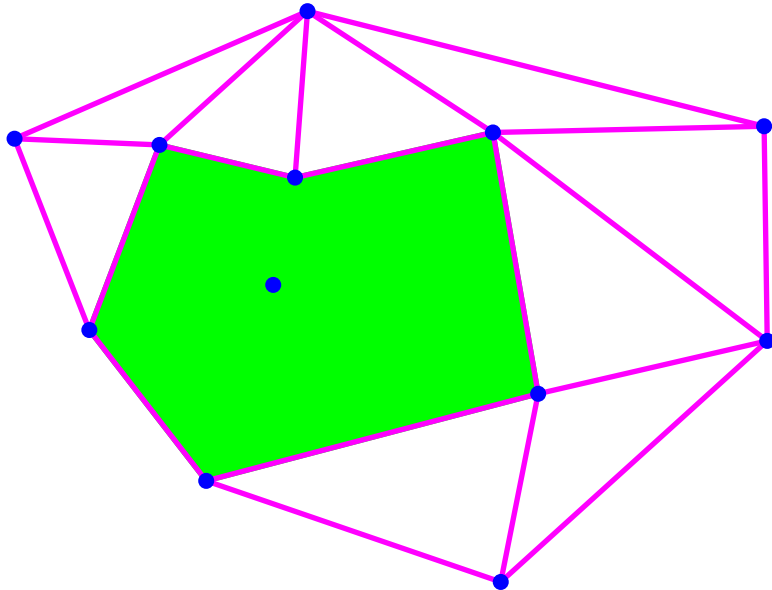
Insertion dans Delaunay



Insertion dans Delaunay

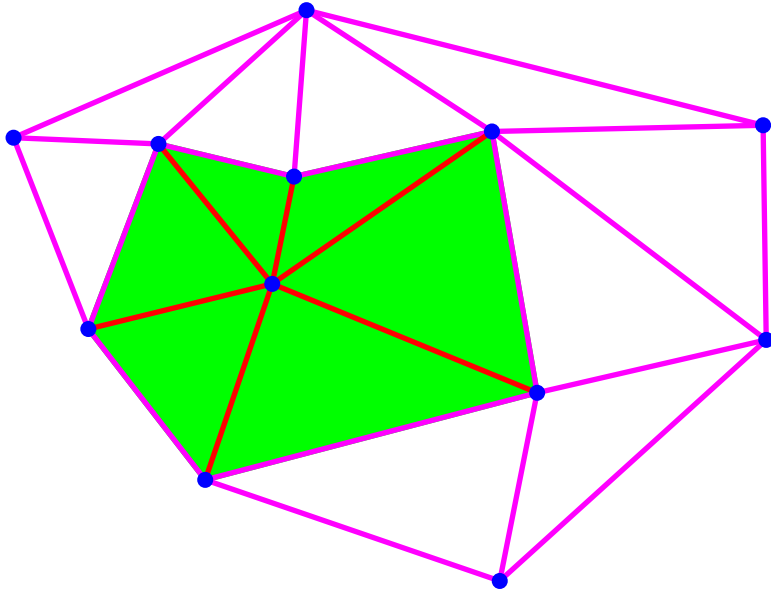


Insertion dans Delaunay



est forcément étoilé

Insertion dans Delaunay

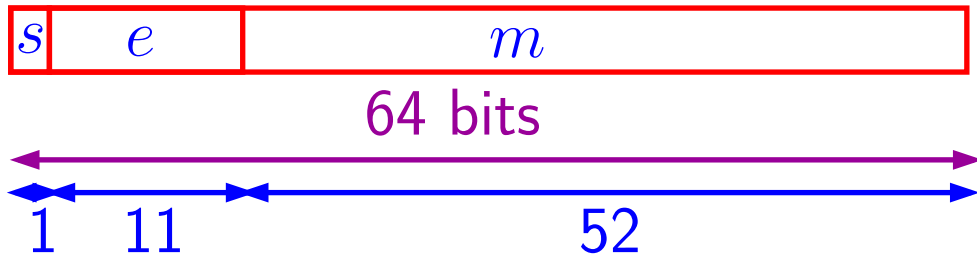


est forcément étoilé

Rappels sur l'arithmétique flottante

double

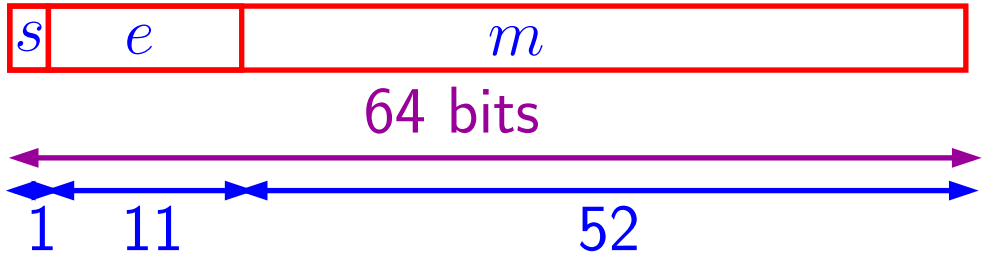
Norme IEEE 754



Rappels sur l'arithmétique flottante

double

Norme IEEE 754

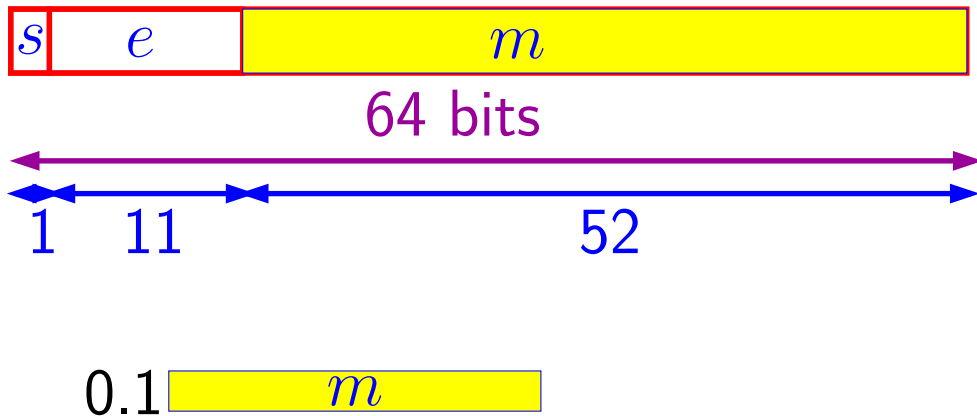


0.1

Rappels sur l'arithmétique flottante

double

Norme IEEE 754



Rappels sur l'arithmétique flottante

double

Norme IEEE 754



64 bits



Rappels sur l'arithmétique flottante

double

Norme IEEE 754



64 bits



$$-1 \overset{s}{\square} 0.1 \overset{m}{\square} 2^{-1024+} \overset{e}{\square}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

double

Norme IEEE 754



64 bits



$$-1 \overset{s}{\square} 0.1 \overset{m}{\square} 2^{-1024 + \overset{e}{\square}}$$

nombres "normalisés"

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables



Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables



$$0.11010 \dots 01001 \times 2^e$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11010 \dots 01010 \times 2^e$$



$$0.11010 \dots 01001 \times 2^e$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11010 \dots 01010 \times 2^e$$

$$0.11010 \dots 01011 \times 2^e$$



$$0.11010 \dots 01001 \times 2^e$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

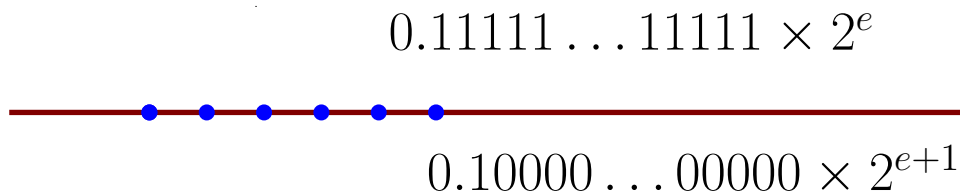
Nombres représentables

$$0.11111 \dots 11111 \times 2^e$$



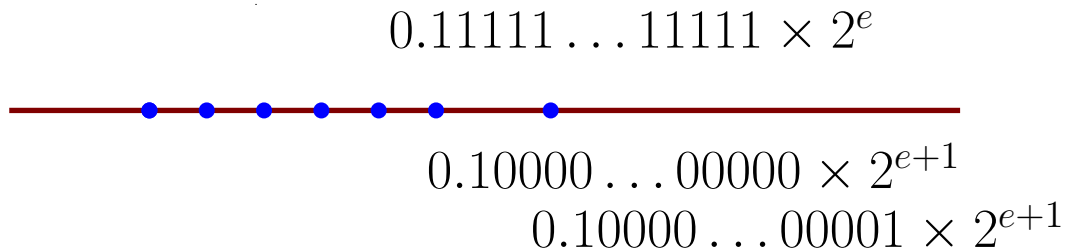
Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables



Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables



Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11111 \dots 11111 \times 2^e$$



$$0.10000 \dots 00000 \times 2^{e+1}$$

$$0.10000 \dots 00001 \times 2^{e+1}$$

$$0.10000 \dots 00010 \times 2^{e+1}$$

$$0.10000 \dots 00011 \times 2^{e+1}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable

$$0.00000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$$



Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable

$$0.00000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$$



$$0.10000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable

$$0.00000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$$



$$0.10000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000 \dots 00001 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000 \dots 00010 \times 2^{-1024}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable

$$0.00000 \dots 00000 \times 2^{-1024} \quad 0.11111 \dots 11111 \times 2^{-1024}$$



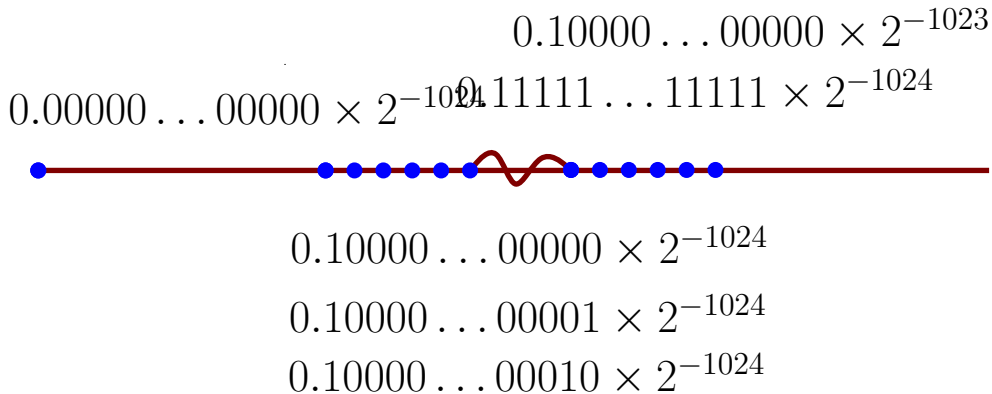
$$0.10000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000 \dots 00001 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000 \dots 00010 \times 2^{-1024}$$

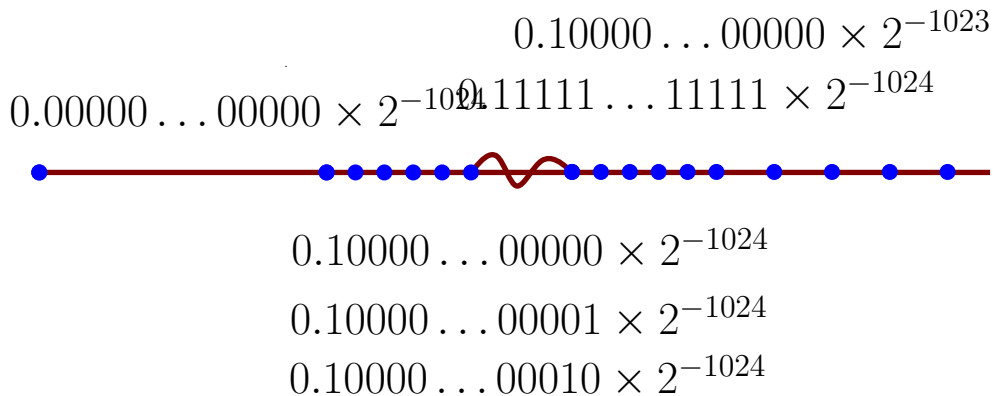
Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable



Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable



Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres dénormalisés

$$0.00000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000 \dots 00000 \times 2^{-1023}$$



Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres dénormalisés

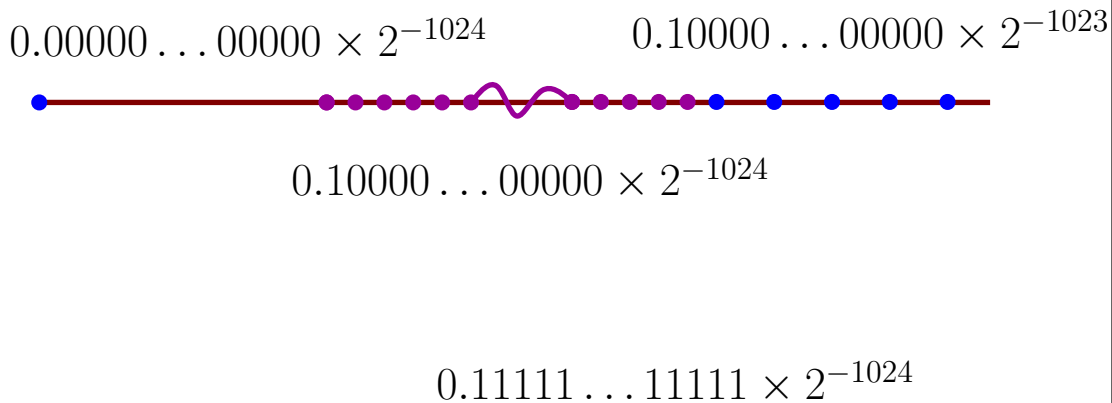
$0.00000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$

$0.10000 \dots 00000 \times 2^{-1023}$



Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres dénormalisés



Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres dénormalisés

$$0.00000 \dots 00000 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000 \dots 00000 \times 2^{-1023}$$



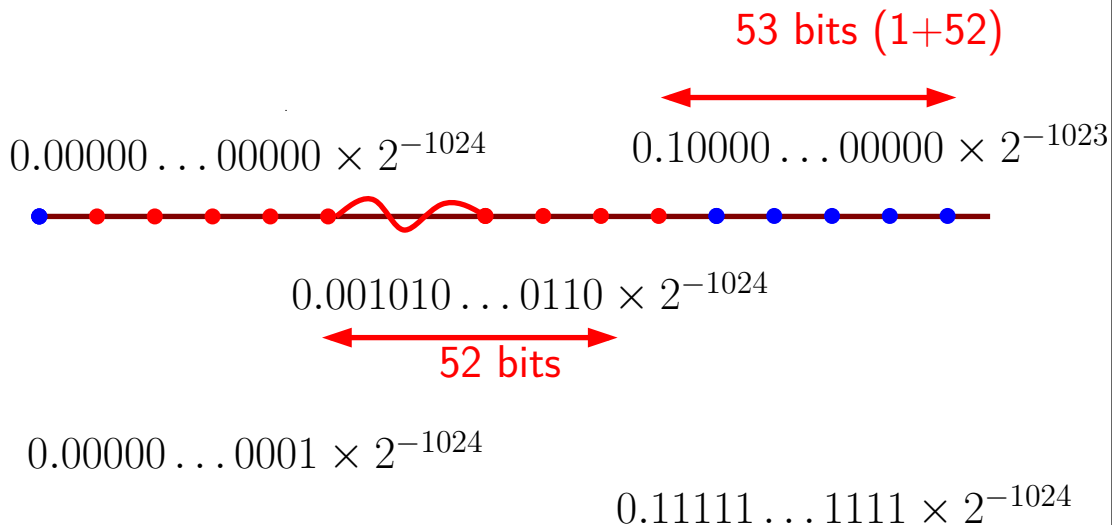
$$0.001010 \dots 0110 \times 2^{-1024}$$

$$0.00000 \dots 0001 \times 2^{-1024}$$

$$0.11111 \dots 1111 \times 2^{-1024}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres dénormalisés



Rappels sur l'arithmétique flottante

double

Norme IEEE 754



64 bits



$$-1 \overset{s}{\square} 0.1 \overset{m}{\square} 2^{-1024 + \overset{e}{\square}}$$

nombres "normalisés"

Rappels sur l'arithmétique flottante

double

Norme IEEE 754



64 bits



$$-1 \overset{s}{\square} 0. \overset{m}{\square} 2^{-1024}$$

nombres "dénormalisés"

Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



Nombres représentables

Rappels sur l'arithmétique flottante

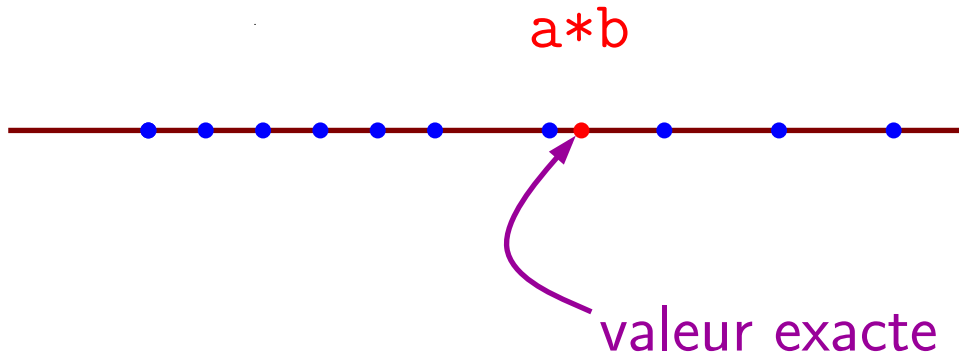
Règles d'arrondi

$a*b$



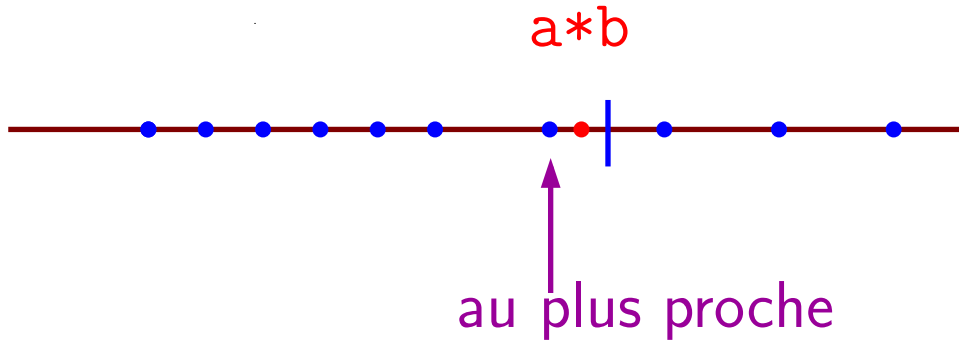
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



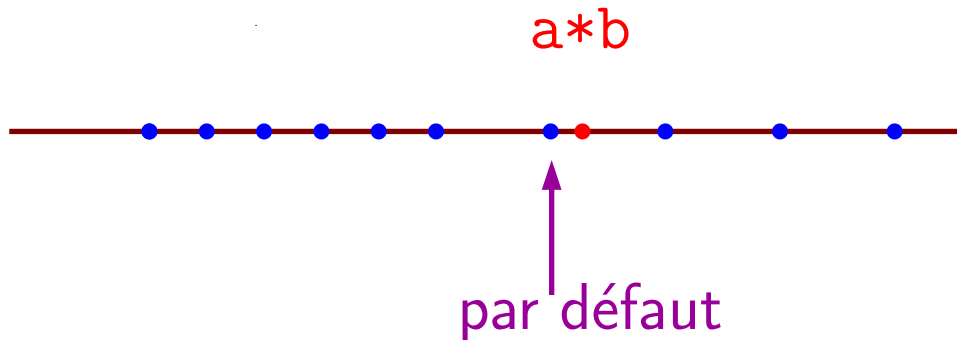
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



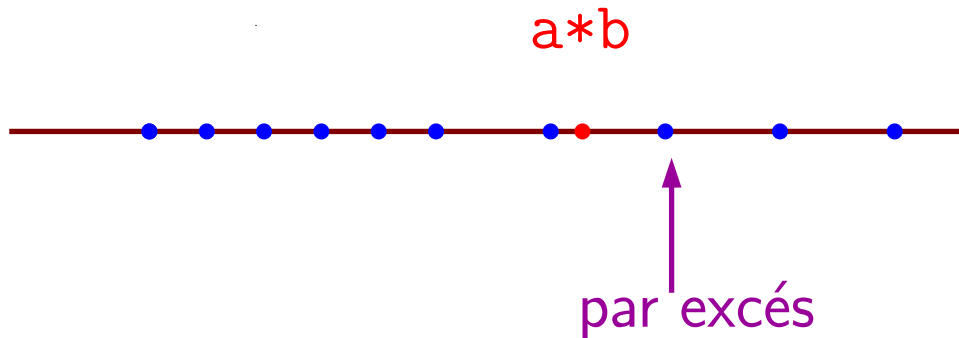
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



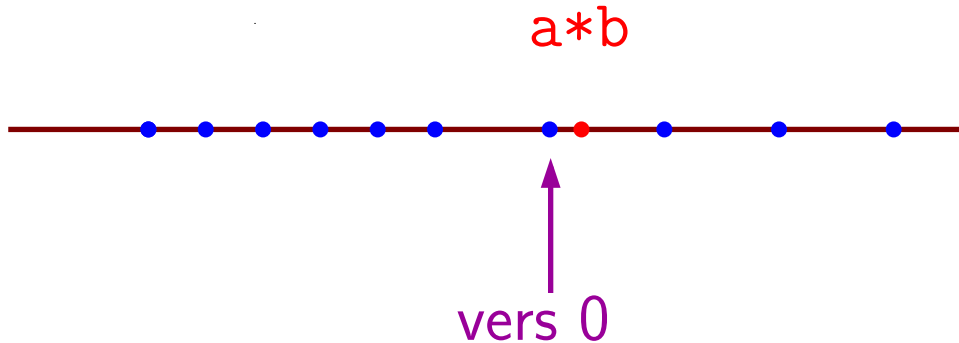
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi

4 opérations et racine carrée



$a+b$

$a*b$

$\text{sqrt}(a)$

$a-b$

a/b

Rappels sur l'arithmétique flottante

double 53 chiffres binaires

float 24 chiffres binaires

Rappels sur l'arithmétique flottante

double	53 chiffres binaires
float	24 chiffres binaires
modèle jouet	2 chiffres décimaux significatifs

Rappels sur l'arithmétique flottante

double 53 chiffres binaires

float 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux
significatifs

$$35 + 3.7 =$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

double 53 chiffres binaires

float 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux
significatifs

$$35 + 3.7 = 39$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

double 53 chiffres binaires

float 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux
significatifs

$$35 + 3.7 = 39$$

$$35 + 3.3 + 0.4 =$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

double 53 chiffres binaires

float 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux
significatifs

$$35 + 3.7 = 39$$

$$35 + 3.3 + 0.4 = 38$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

double 53 chiffres binaires

float 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux
significatifs

$$35 + 3.7 = 39$$

$$35 + 3.3 + 0.4 = 38$$

$$35 + (3.3 + 0.4) =$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

double 53 chiffres binaires

float 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux
significatifs

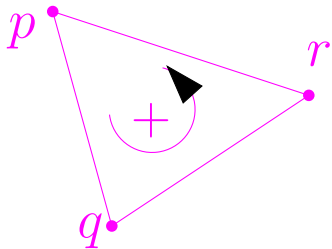
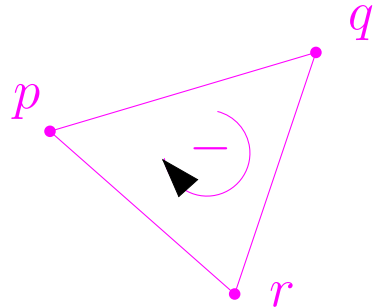
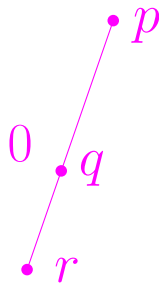
$$35 + 3.7 = 39$$

$$35 + 3.3 + 0.4 = 38$$

$$35 + (3.3 + 0.4) = 39$$

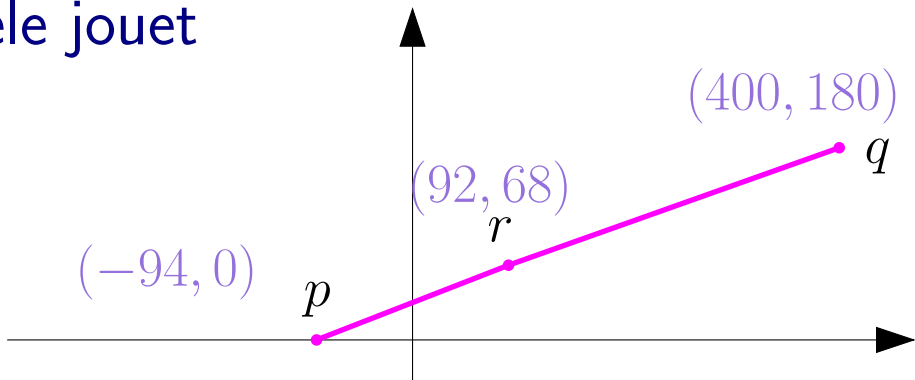
Prédicats

Prédicat d'orientation

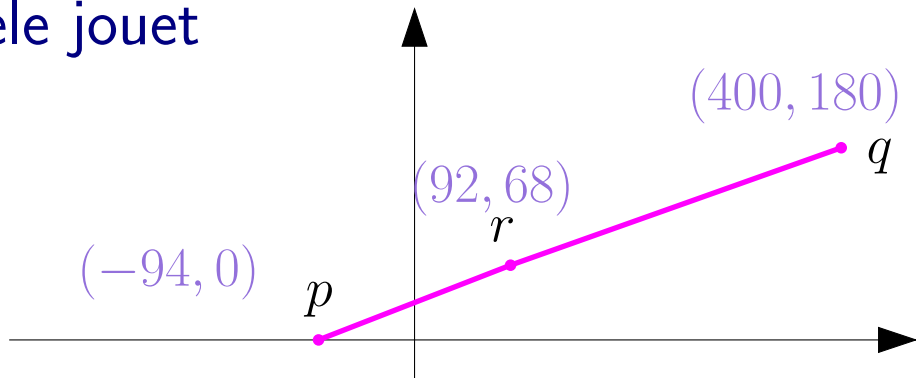


$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

modèle jouet

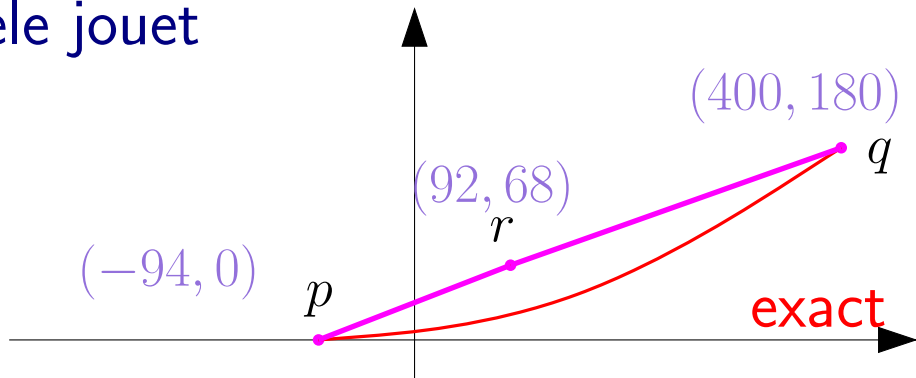


modèle jouet



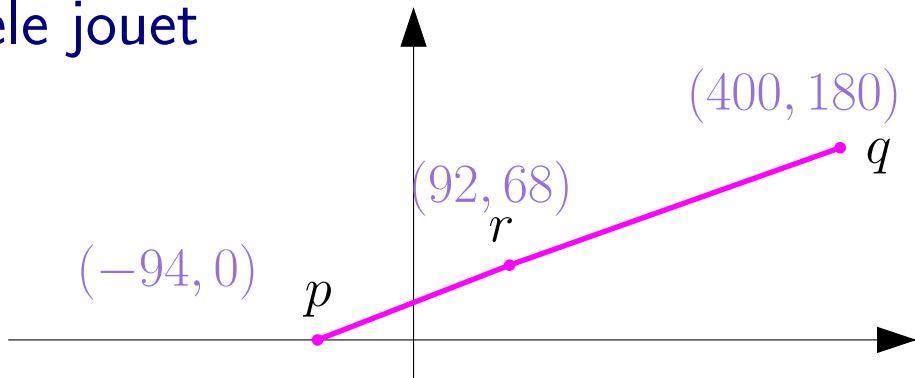
$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

modèle jouet



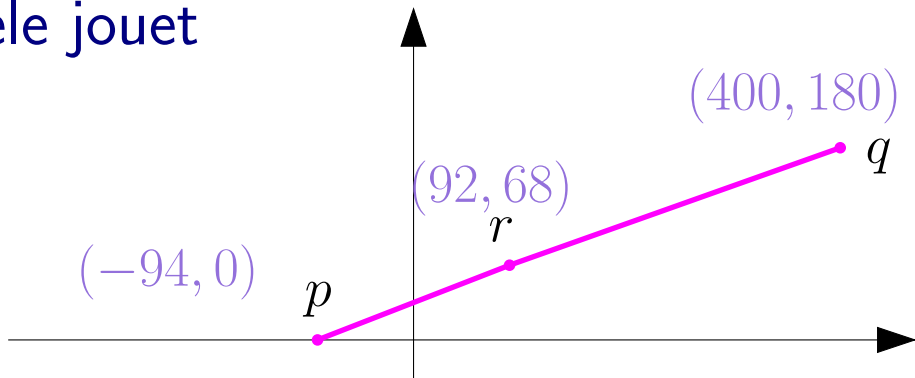
$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 = 112$$

modèle jouet



$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$
$$494 * 68 - 186 * 180$$

modèle jouet

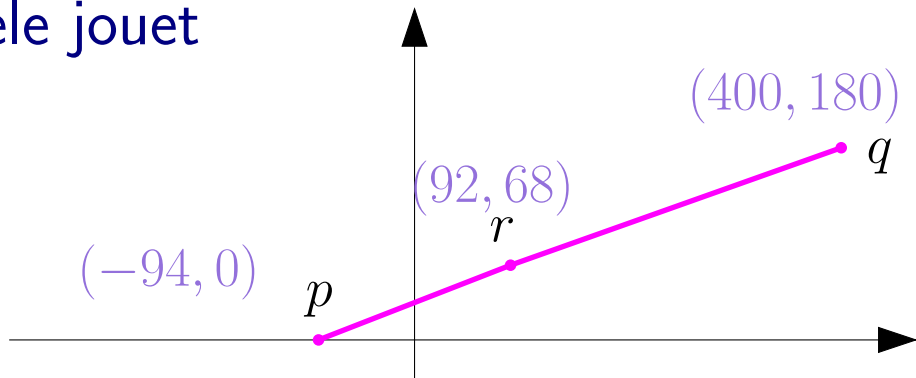


$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

$$494 * 68 - 186 * 180$$

$$490 * 68 - 190 * 180$$

modèle jouet



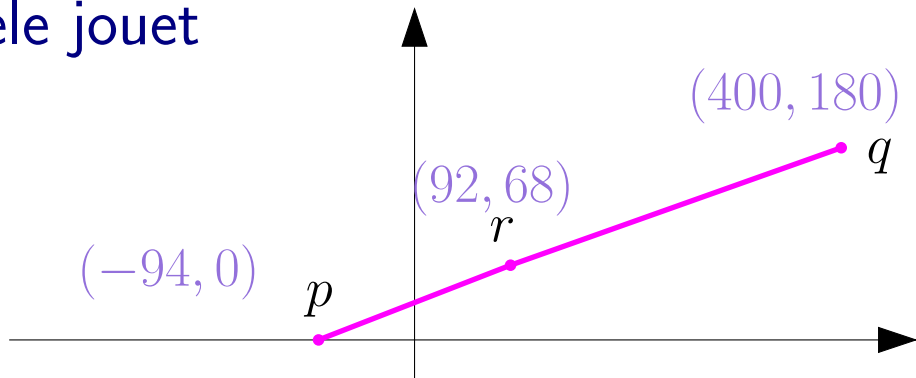
$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

$$494 * 68 - 186 * 180$$

$$490 * 68 - 190 * 180$$

$$= 33320 - 34200$$

modèle jouet



$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

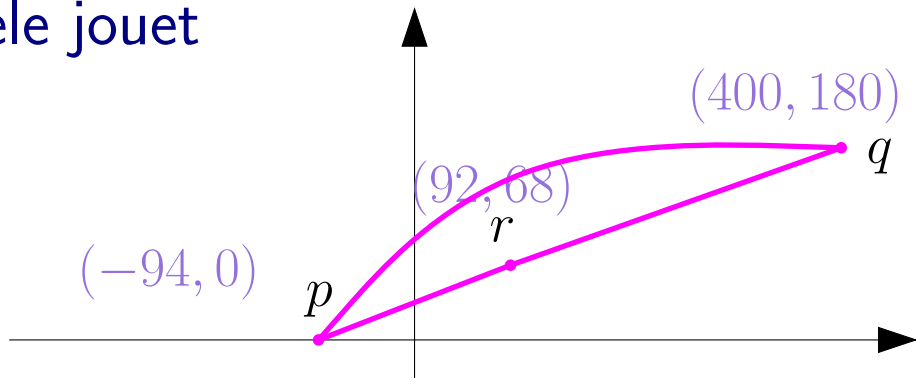
$$494 * 68 - 186 * 180$$

$$490 * 68 - 190 * 180$$

$$= 33320 - 34200$$

$$= 33000 - 34000$$

modèle jouet



$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

$$494 * 68 - 186 * 180$$

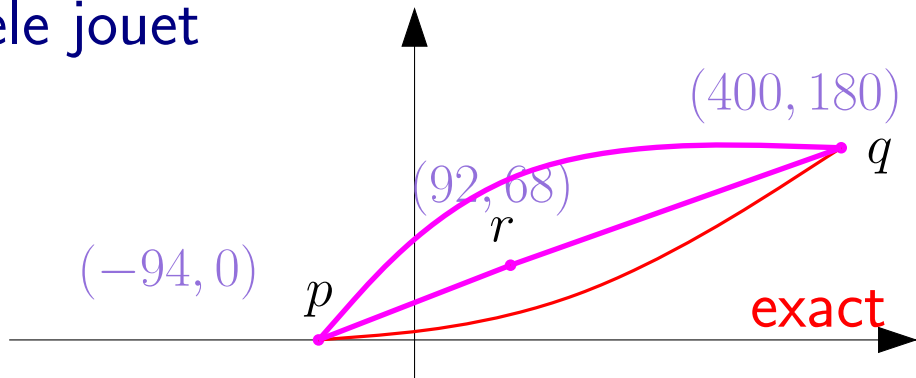
$$490 * 68 - 190 * 180$$

$$= 33320 - 34200$$

$$= 33000 - 34000$$

$$= -1000$$

modèle jouet



$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 = 112$$

$$494 * 68 - 186 * 180$$

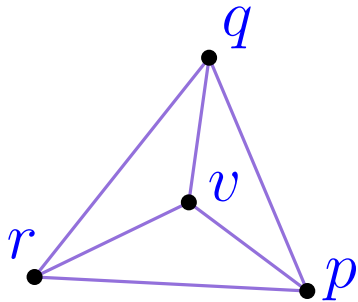
$$490 * 68 - 190 * 180$$

$$= 33320 - 34200$$

$$= 33000 - 34000$$

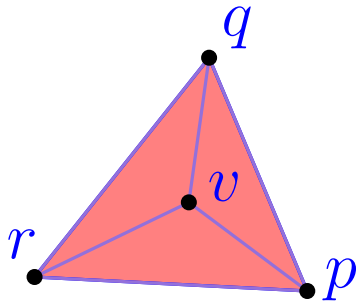
$$= -1000$$

théorème géométrique utile aux algorithmes

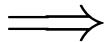


$$\begin{array}{l} pqv \\ qrv \\ rpv \end{array} \text{ CCW} \implies pqr$$

théorème géométrique utile aux algorithmes



pqv
 qrv
 rpv CCW



pqr CCW

modèle jouet

modèle jouet

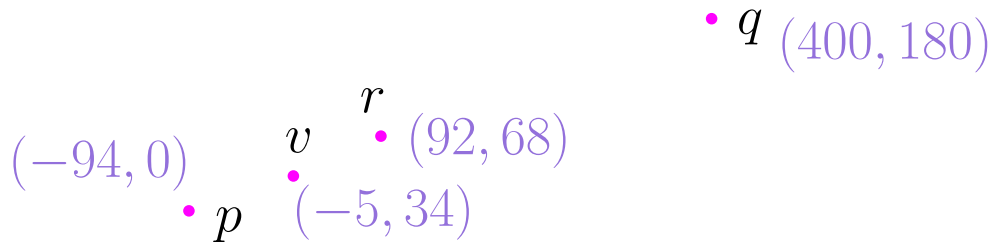
Ça fait planter les théorèmes

modèle jouet

$$\begin{array}{ccc} & & r \\ & v & \bullet (92, 68) \\ (-94, 0) & \bullet & \\ \bullet p & & (-5, 34) \end{array}$$

$$\bullet q (400, 180)$$

modèle jouet



$$\begin{array}{l} pqv \\ qrv \\ rpv \end{array} \text{ CCW} \implies pqr \text{ CCW}$$

calcul "jouet"

modèle jouet

Ça fait planter les théorèmes • q (400, 180)

$$\begin{array}{ccc} & & r \\ & & \bullet (92, 68) \\ (-94, 0) & v & \\ \bullet p & & (-5, 34) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} pqv \\ qrv \\ rpv \end{array} \text{ CCW} \implies pqr \text{ CCW}$$

$$\text{calcul "jouet"} \longrightarrow pqr \text{ CW}$$

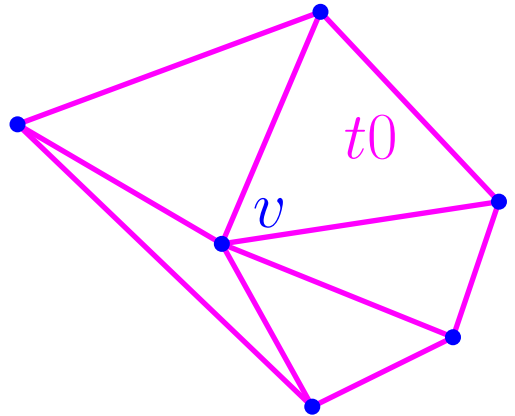
modèle jouet

modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes

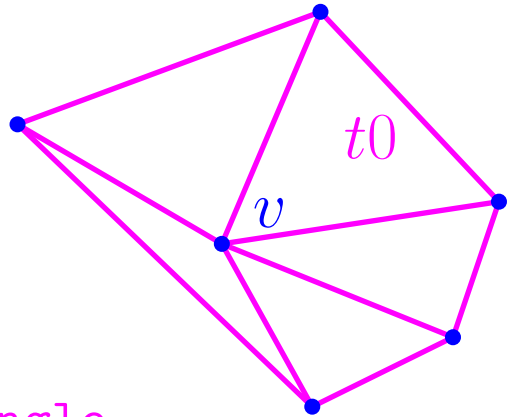
modèle jouet

tourner autour d'un sommet



modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

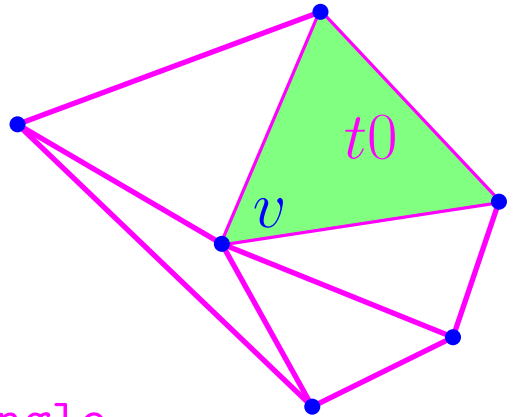
let vpq ccw triangle

go to neighbor through qv

while triangle $\neq t_0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

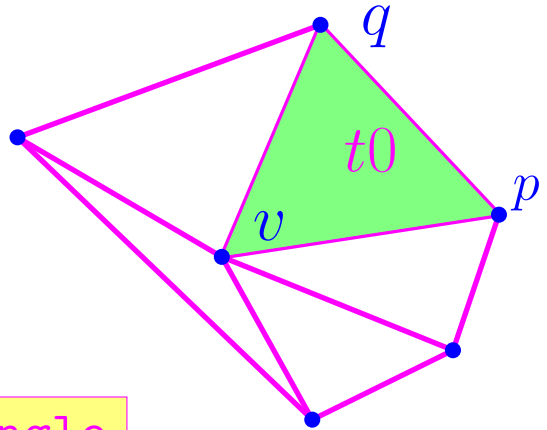
let vpq ccw triangle

go to neighbor through qv

while triangle $\neq t_0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

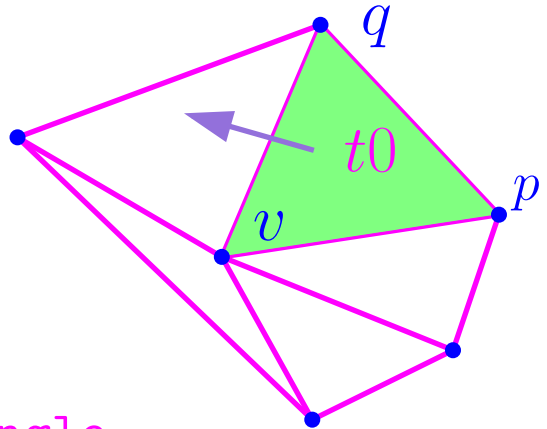
```
let  $vpq$  ccw triangle
```

```
go to neighbor through  $qv$ 
```

```
while triangle  $\neq t_0$ 
```

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

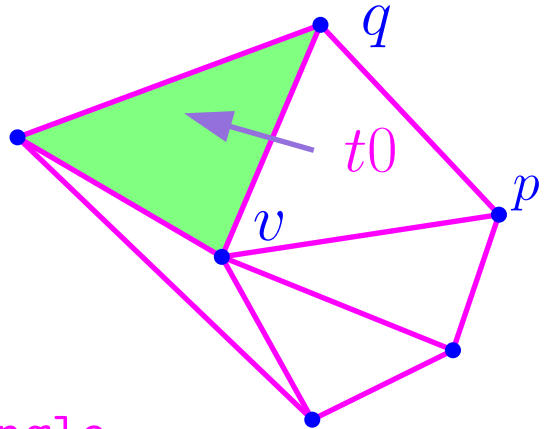
let vpq ccw triangle

go to neighbor through qv

while triangle $\neq t_0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

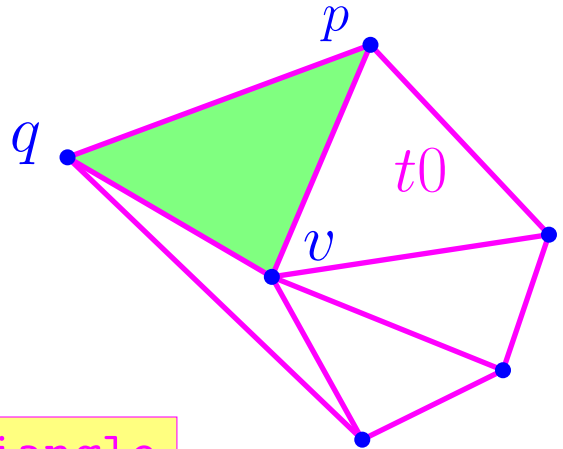
let vpq ccw triangle

go to neighbor through qv

while triangle $\neq t_0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

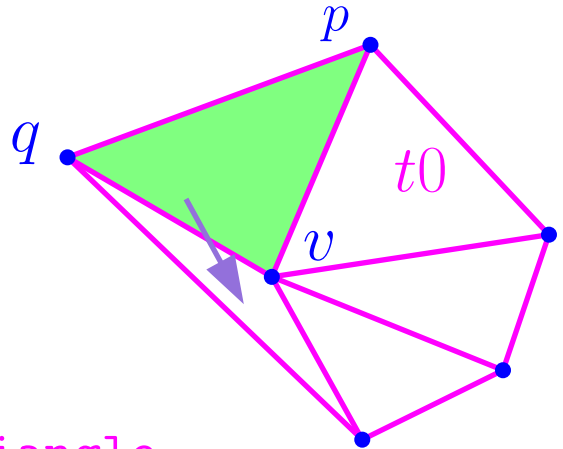
```
let  $vpq$  ccw triangle
```

```
go to neighbor through  $qv$ 
```

```
while triangle  $\neq t_0$ 
```

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

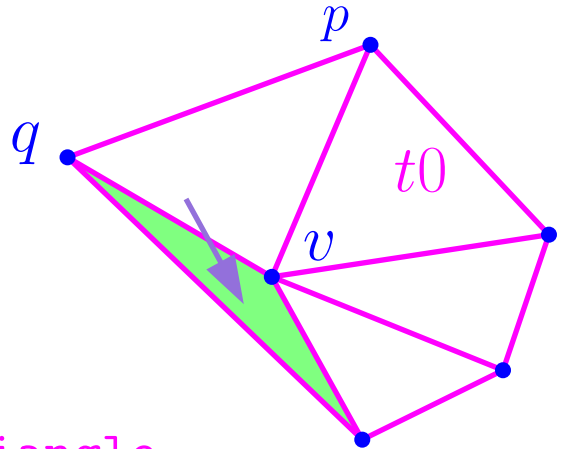
let vpq ccw triangle

go to neighbor through qv

while triangle $\neq t_0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

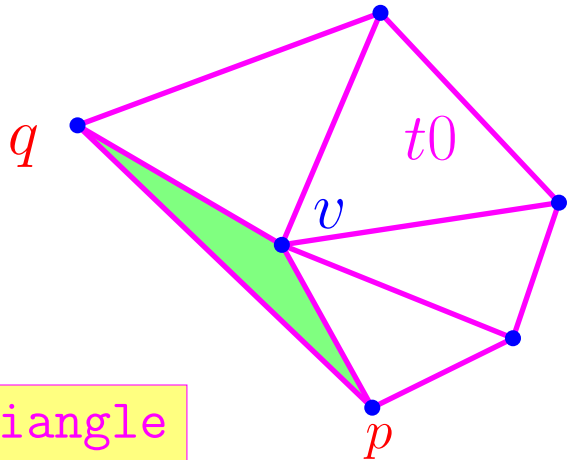
let vpq ccw triangle

go to neighbor through qv

while triangle $\neq t_0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

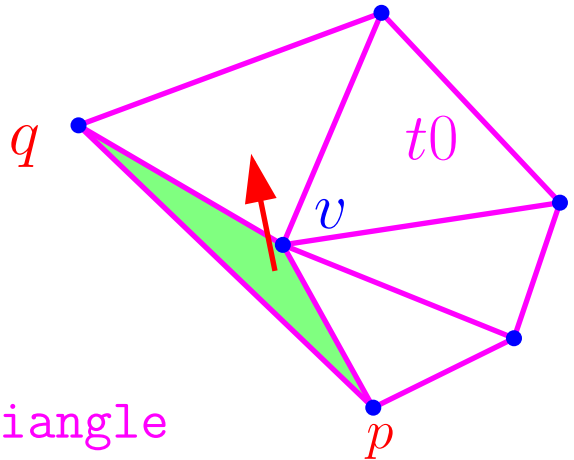
```
let  $vpq$  ccw triangle
```

```
go to neighbor through  $qv$ 
```

```
while triangle  $\neq t_0$ 
```

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

let vpq ccw triangle

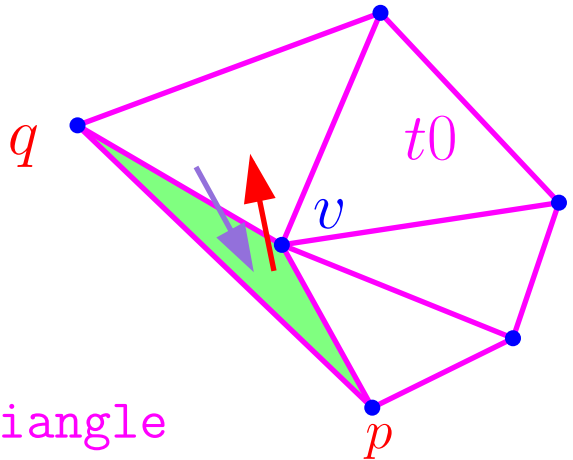
go to neighbor through qv

while triangle $\neq t_0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet

Ça boucle



do

let vpq ccw triangle

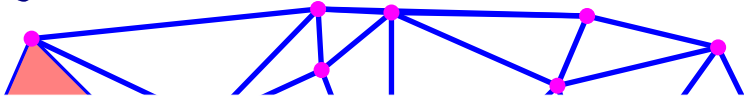
go to neighbor through qv

while triangle $\neq t_0$

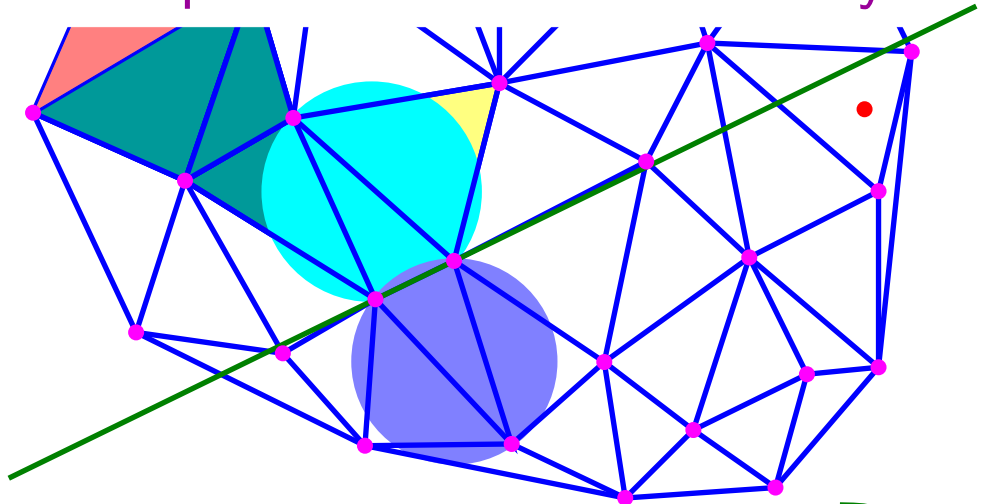
modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes

modèle jouet



Marche par visibilité dans Delaunay



Pas de cycle dans ce cas. car puissance(\bullet)



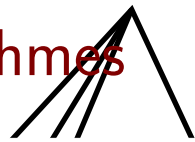
modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes

ça boucle

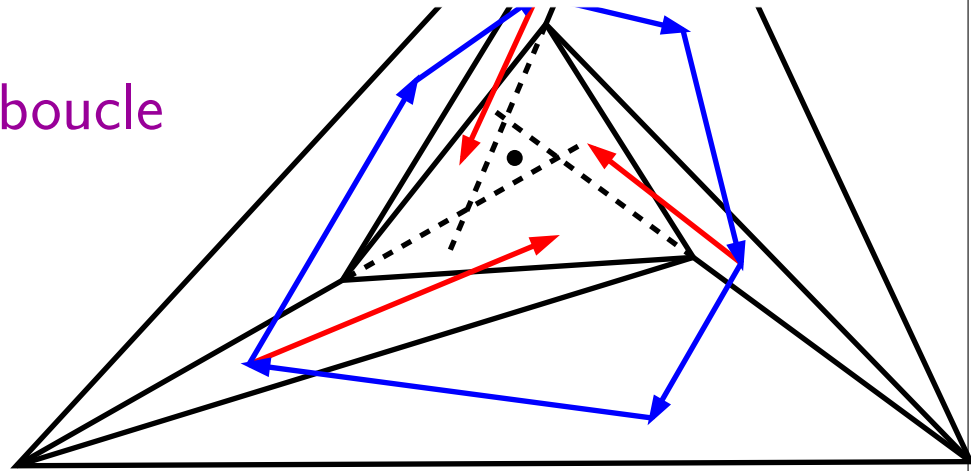
modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes



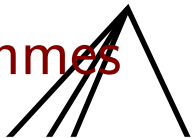
Marche par visibilité

ça boucle



modèle jouet

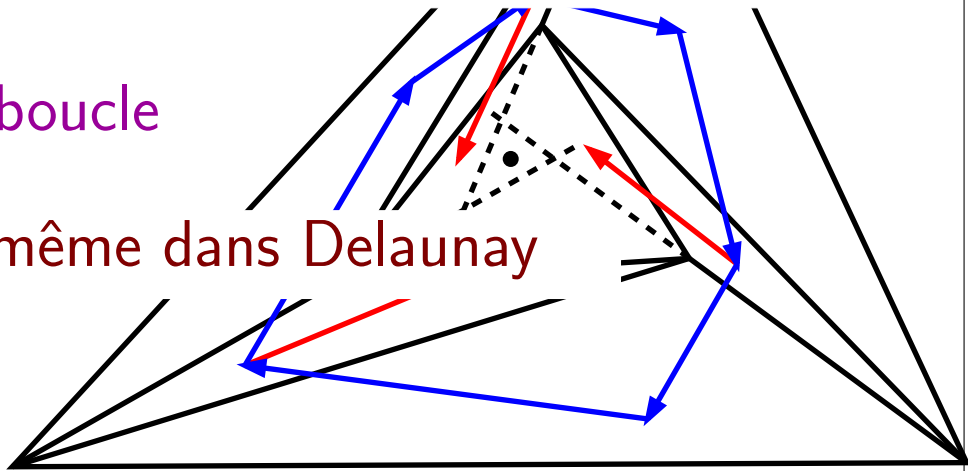
Ça fait planter les algorithmes



Marche par visibilité

ça boucle

même dans Delaunay



Solution 1

Solution 1

Oublions quelques

millénaires de géométrie

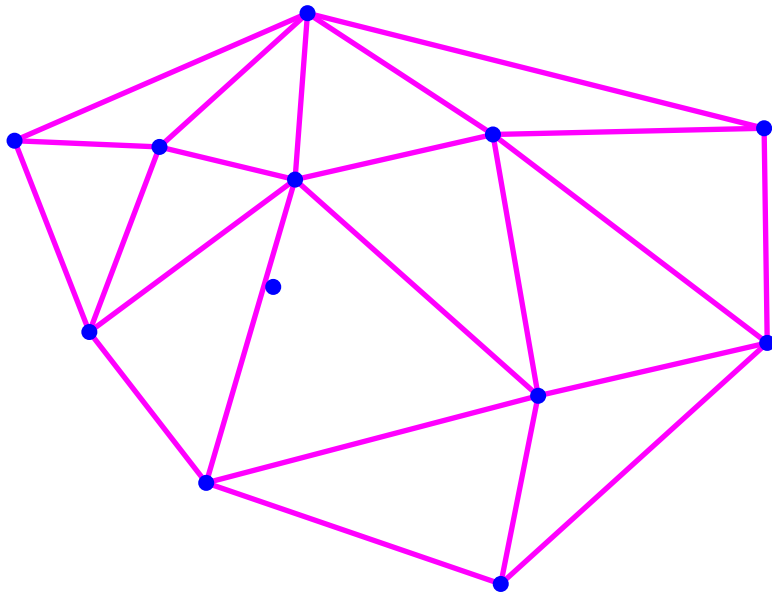
Solution 1

Oublions quelques

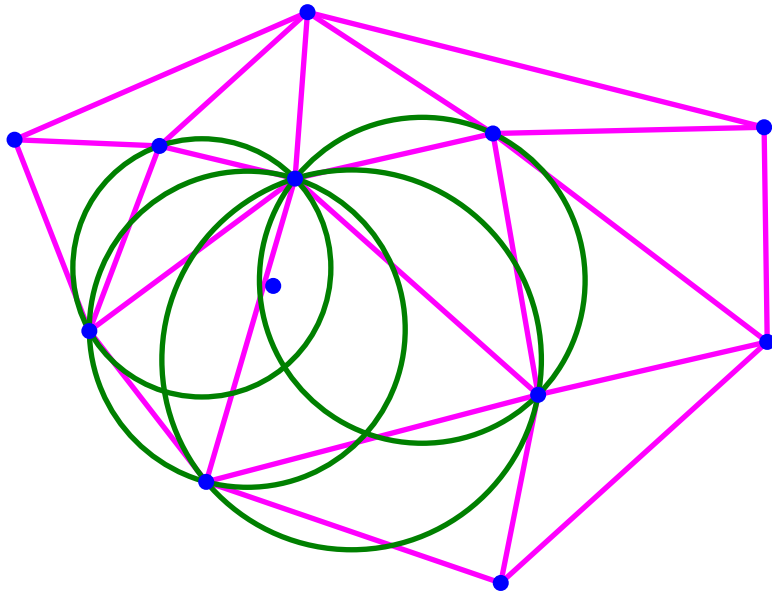
millénaires de géométrie

Concevons les algorithmes sans théorèmes

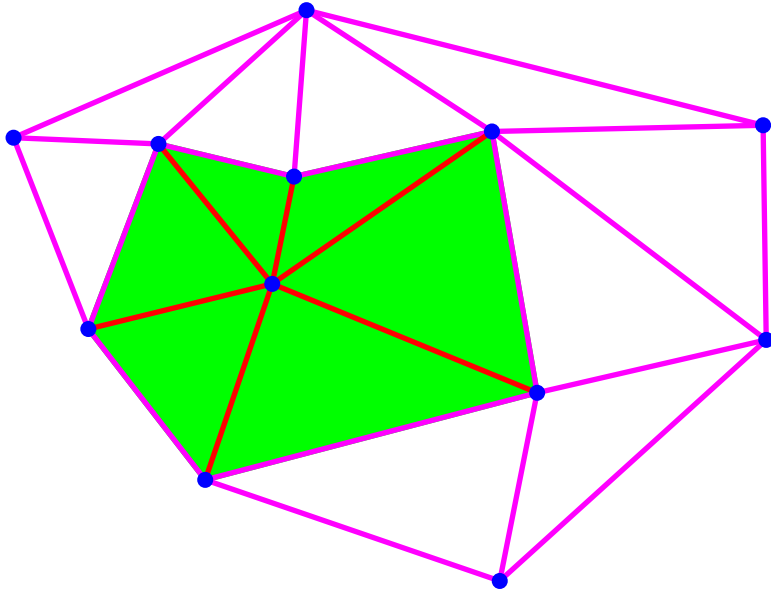
Insertion dans Delaunay



Insertion dans Delaunay



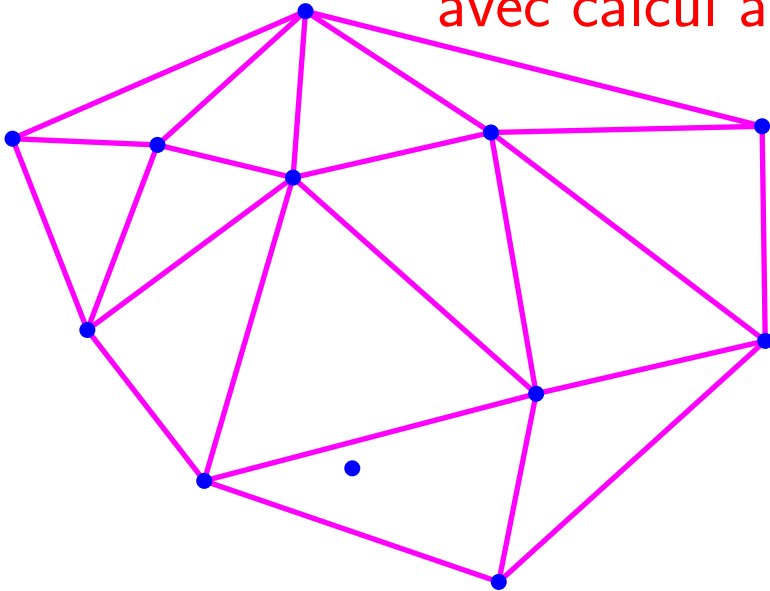
Insertion dans Delaunay



est forcément étoilé

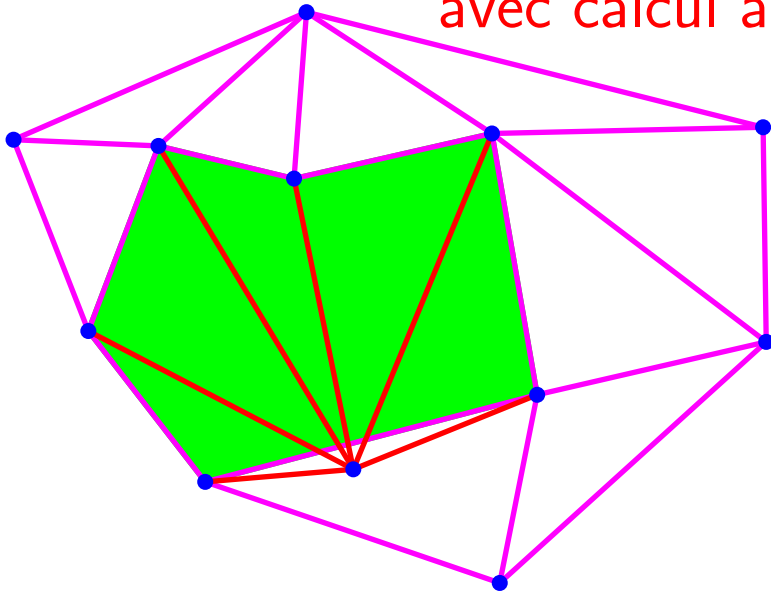
Insertion dans Delaunay

avec calcul arrondi



Insertion dans Delaunay

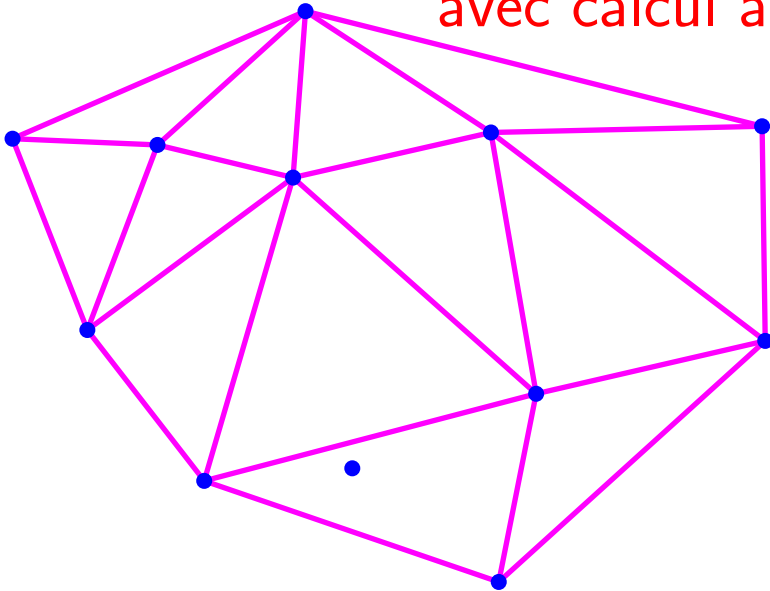
avec calcul arrondi



n'est pas forcément étoilé

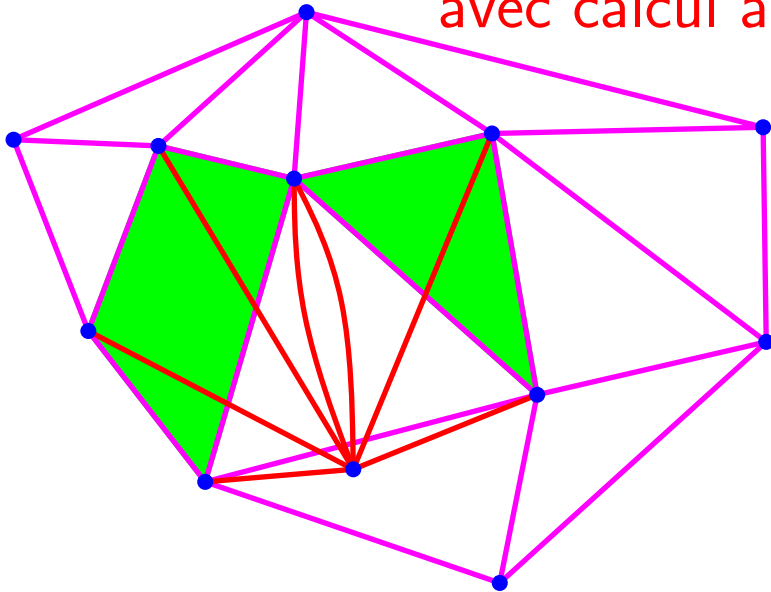
Insertion dans Delaunay

avec calcul arrondi



Insertion dans Delaunay

avec calcul arrondi



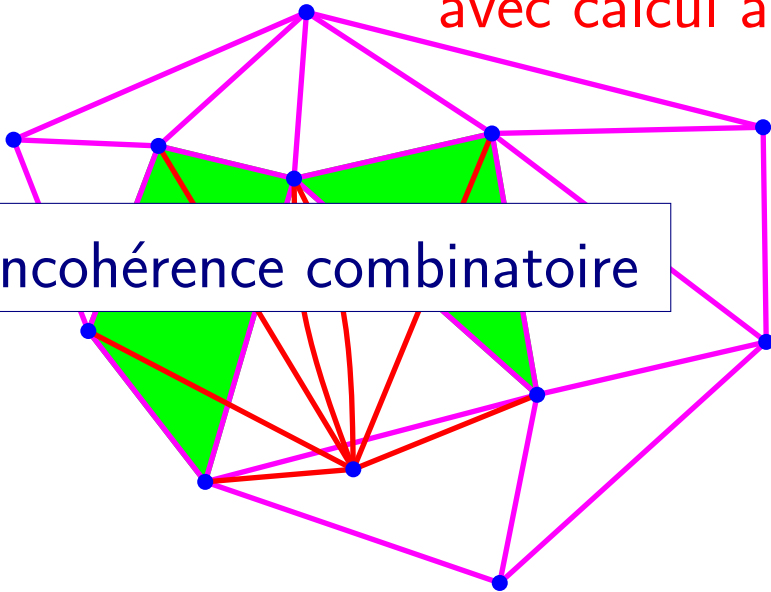
n'est pas forcément étoilé

Insertion dans Delaunay

avec calcul arrondi

Incohérence combinatoire

n'est pas forcément étoilé



Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

Solution 1

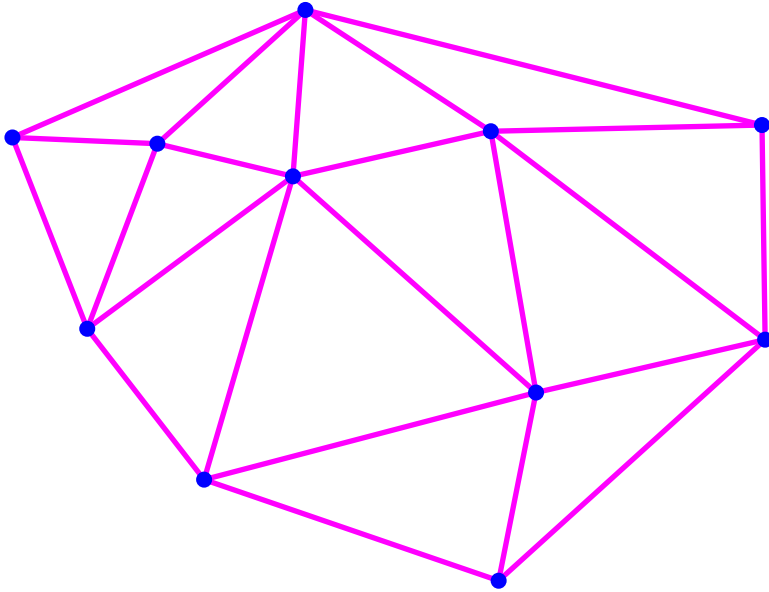
Concevons les algorithmes sans théorèmes

Vérifions la cohérence combinatoire

Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

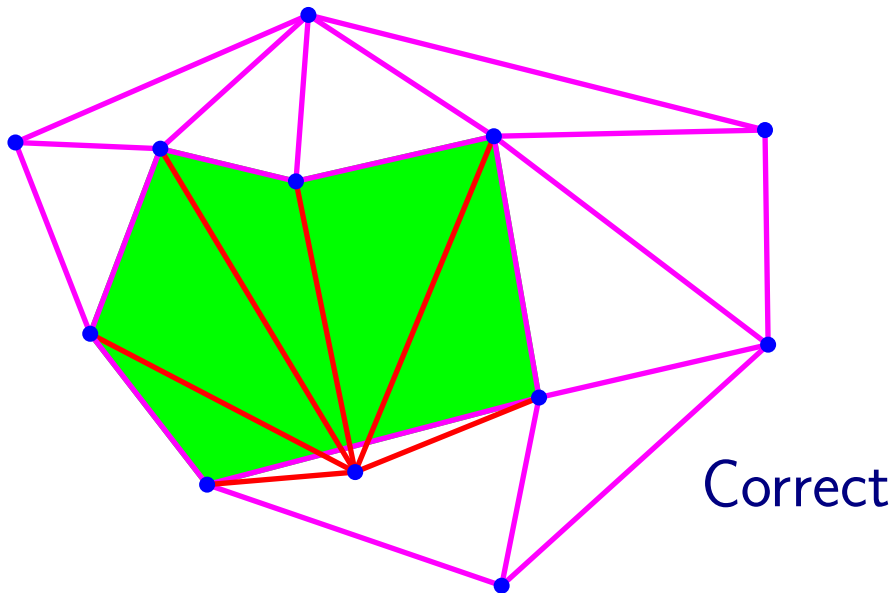
Vérifions la cohérence combinatoire



Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

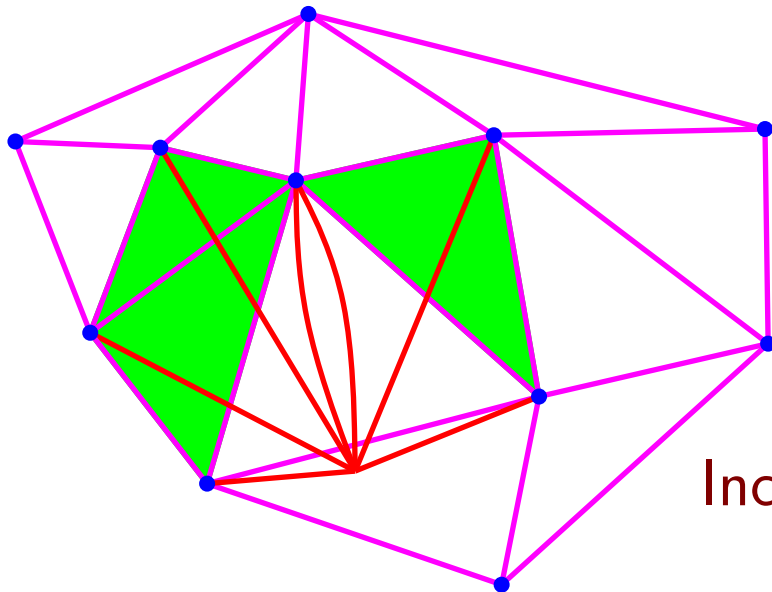
Vérifions la cohérence combinatoire



Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

Vérifions la cohérence combinatoire



Incorrect

Solution 1

En vérifiant la cohérence combinatoire

Solution 1

En vérifiant la cohérence combinatoire

On obtient au mieux

une correction combinatoire

Solution 1

En vérifiant la cohérence combinatoire

On obtient au mieux

une correction combinatoire

ce qu'on calcule est

combinatoirement

une triangulation

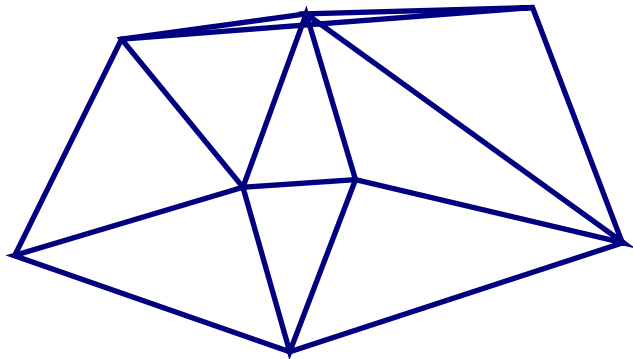
ce qu'on calcule est **combinatoirement**
une triangulation

ce qu'on calcule est **combinatoirement**
une triangulation

le plongement peut avoir des intersections

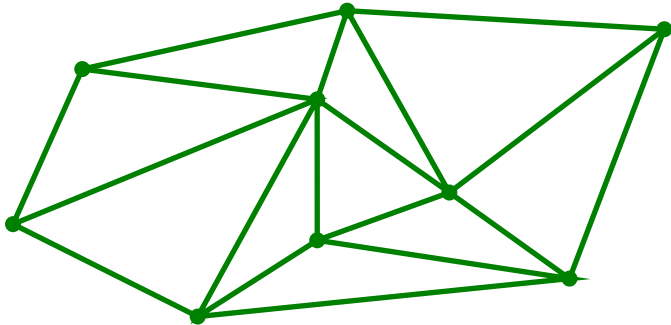
ce qu'on calcule est **combinatoirement**
une triangulation

le plongement peut avoir des intersections



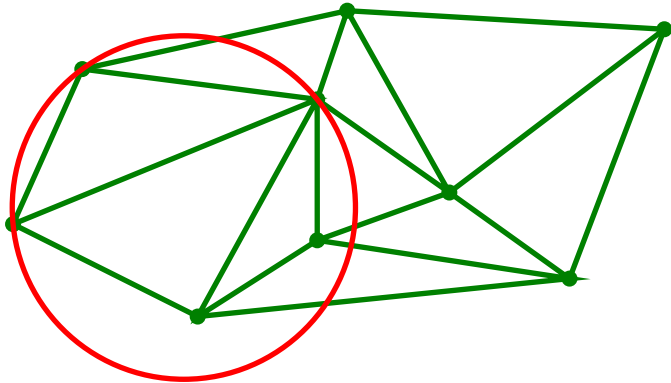
ce qu'on calcule est **combinatoirement**
une triangulation

le plongement peut avoir des intersections
c'est pas Delaunay



ce qu'on calcule est **combinatoirement**
une triangulation

le plongement peut avoir des intersections
c'est pas Delaunay



On vérifie que l'on a

combinatoirement

une triangulation

On vérifie que l'on a

combinatoirement

une triangulation

Peut-être que c'est

combinatoirement

pas Delaunay

On vérifie que l'on a

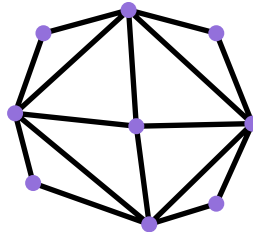
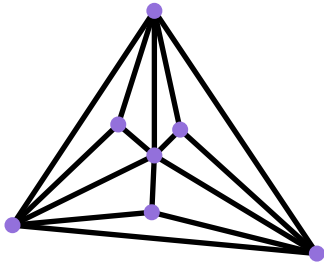
combinatoirement

une triangulation

Peut-être que c'est

combinatoirement

pas Delaunay



Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

Vérifions la cohérence combinatoire

Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

Vérifions la cohérence combinatoire

peu (plus) utilisé

Solution 2

Concevons les algorithmes avec théorèmes

Faisons comme si on savait calculer sur les réels

Solution 2

Concevons les algorithmes avec théorèmes

Faisons comme si on savait calculer sur les réels

On a un sous-ensemble manipulable des réels
par ex: les rationnels

Solution 2

Concevons les algorithmes avec théorèmes

Faisons comme si on savait calculer sur les réels

On a un sous-ensemble manipulable des réels

par ex: les rationnels

algébriques ?

Solution 2

Concevons les algorithmes avec théorèmes

Faisons comme si on savait calculer sur les réels

On a un sous-ensemble manipulable des réels
par ex: les rationnels
algébriques ?

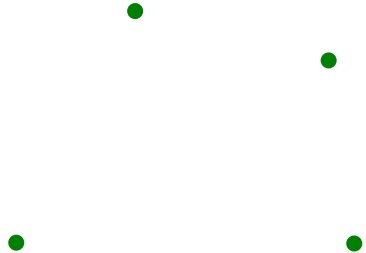
Calcul exact

Prédicats versus constructions

Prédicats versus constructions

Prédicat

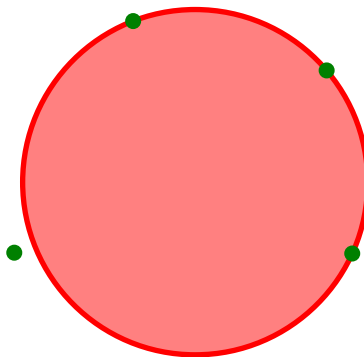
test cocircularité



Prédicats versus constructions

Prédicat

test cocircularité



Décision (immédiate)

Prédicats versus constructions

Construction

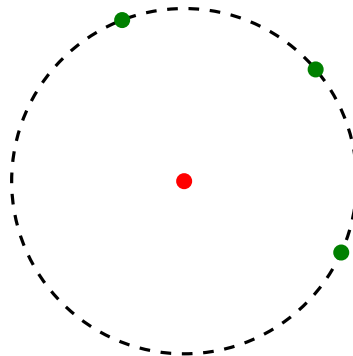
centre cercle circonscrit



Prédicats versus constructions

Construction

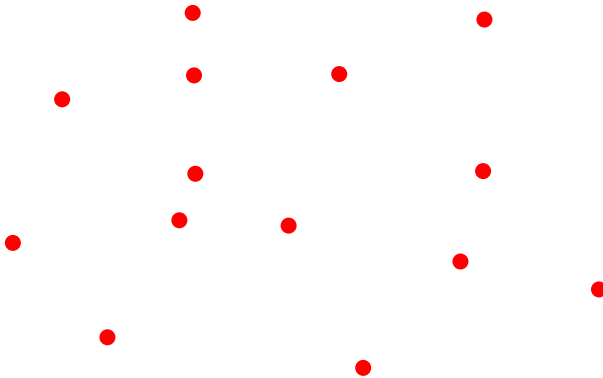
centre cercle circonscrit



Nouvel objet réutilisable

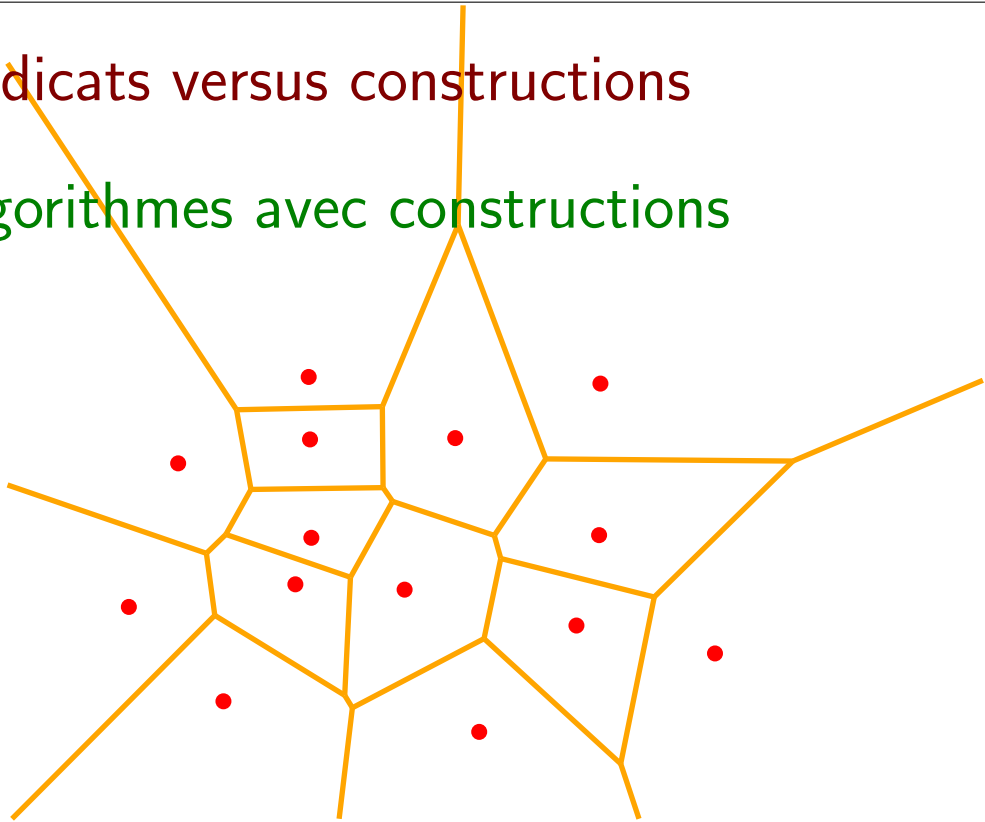
(décision ultérieure)

Prédicats versus constructions



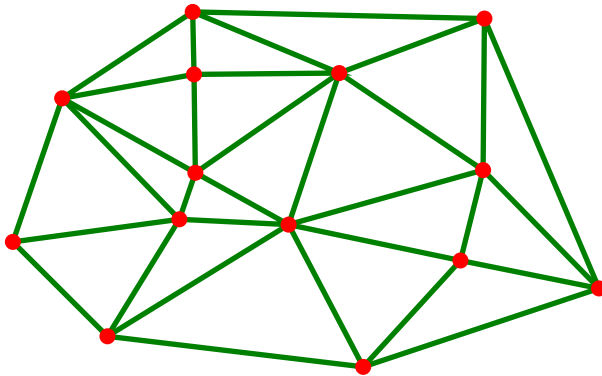
Prédicats versus constructions

Algorithmes avec constructions



Prédicats versus constructions

Algorithmes avec prédicats



Algorithmes avec prédicats

Calcul exact

Algorithmes avec prédicats

Calcul exact

nécessaire



Algorithmes avec prédicats

Calcul exact

Paradigme du calcul exact

Algorithmes avec prédicats

Répondre exactement aux prédicats

mais pas forcément du calcul exact

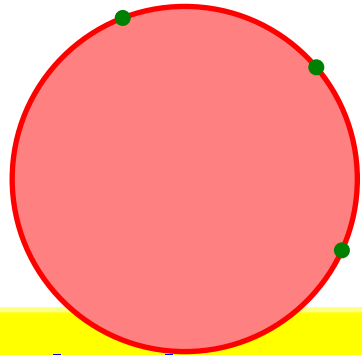
Paradigme du calcul exact

Algorithmes avec prédicats

Répondre exactement aux prédicats

mais pas forcément du calcul exact

test cocircularité



Paradigme du calcul exact

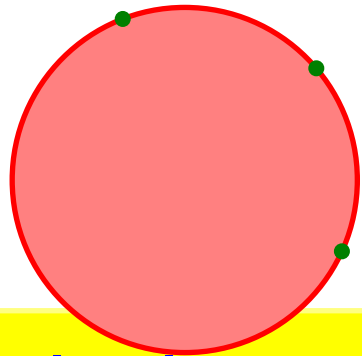
Algorithmes avec prédicats

Répondre exactement aux prédicats

mais pas forcément du calcul exact

test cocircularité

calcul exact superflu •



Paradigme du calcul exact

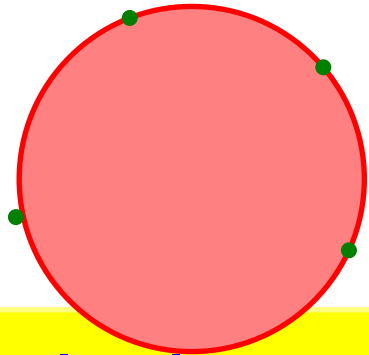
Algorithmes avec prédicats

Répondre exactement aux prédicats

mais pas forcément du calcul exact

test cocircularité

calcul exact nécessaire



Paradigme du calcul exact

calcul exact nécessaire

pour la cohérence des résultats

calcul exact nécessaire

pour la cohérence des résultats

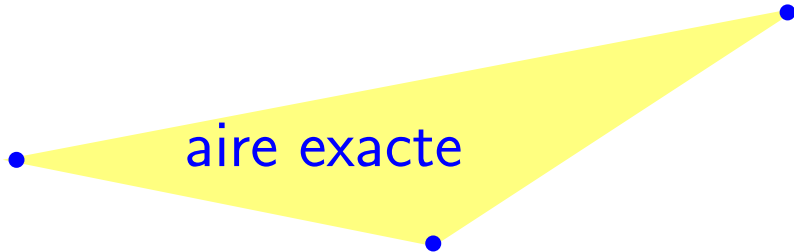
pas pour l'exactitude

Répondre exactement aux prédicats



Répondre exactement aux prédicats

Calcul exact



Répondre exactement aux prédicats

Calcul exact

Calcul approché



Répondre exactement aux prédicats

Calcul exact

Calcul approché certifié



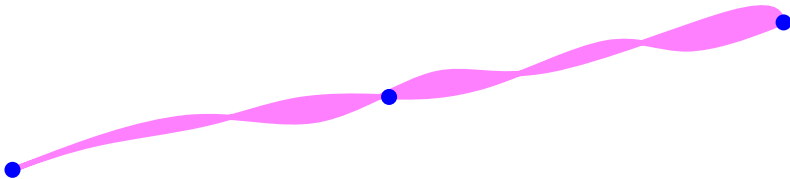
Répondre exactement aux prédicats



Répondre exactement aux prédicats

et si c'est pas sur

on peut se rabattre sur

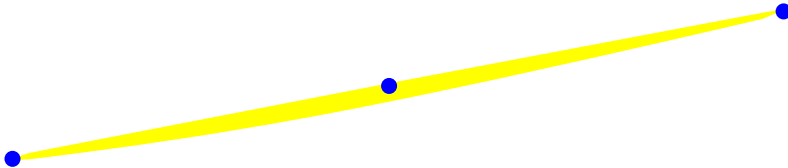


Répondre exactement aux prédicats

et si c'est pas sur

on peut se rabattre sur

le calcul exact



Comment certifier un calcul approché ?

Comment certifier un calcul approché ?

calcul d'erreur

$x + y$



Comment certifier un calcul approché ?

calcul d'erreur

$$x \oplus y = x+y + \text{erreur}$$

Comment certifier un calcul approché ?

calcul d'erreur

$$x \oplus y = x+y + \text{erreur}$$

$x + y$ exact


$$0.11010 \dots 010010101001 \times 2^e$$

Comment certifier un calcul approché ?

calcul d'erreur

$$x \oplus y = x+y + \text{erreur}$$

IEEE 754

$x + y$ exact

0.11010...010110101001 $\times 2^e$

53 bits

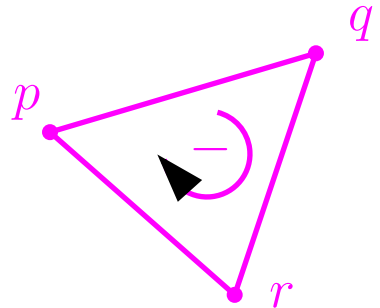
$x \oplus y$

erreur $\leq |x+y| 2^{-54}$

Filtre statique

exemple : prédicat d'orientation

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

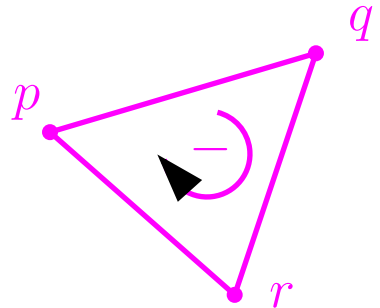


Filtre statique

exemple : prédicat d'orientation

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star| |y_\star| \leq M$$



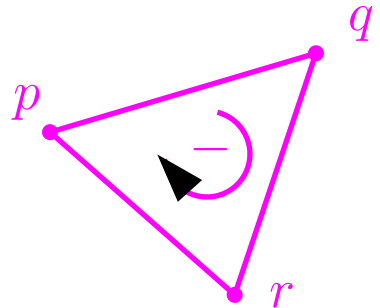
Filtre statique

exemple : prédicat d'orientation

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star| |y_\star| \leq M$$

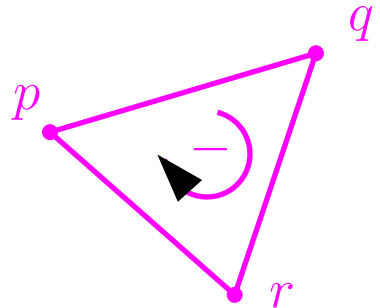
$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$



Filtre statique

exemple : prédicat d'orientation

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$



$$|x_\star| |y_\star| \leq M$$

$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$

$$\text{erreur}_{x_\star - x_p} \leq 2M 2^{-54} = 2^{-53} M$$

$$|x_\star| |y_\star| \leq M$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$

$$\text{erreur}_{x_\star - x_p} \leq 2M 2^{-54} = 2^{-53} M$$

$$|x_\star| |y_\star| \leq M$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$

$$\text{erreur}_{x_\star - x_p} \leq 2M 2^{-54} = 2^{-53} M$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$|x_\star| |y_\star| \leq M$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$

$$\text{erreur}_{x_\star - x_p} \leq 2M 2^{-54} = 2^{-53} M$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$\begin{aligned} \text{erreur}_{(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)} &\leq 4M^2 2^{-53} + 2(2M \cdot 2^{-53} M) \\ &\leq 2^{-50} M^2 \end{aligned}$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$\text{erreur}_{(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)} \leq 2^{-50} M^2$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$\text{erreur}_{(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)} \leq 2^{-50} M^2$$

$$\left| \begin{array}{cc} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{array} \right| \leq 8M^2$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$\text{erreur}_{(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)} \leq 2^{-50} M^2$$

$$\left| \begin{array}{cc} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{array} \right| \leq 8M^2$$

$$\begin{aligned} \text{erreur} \left| \begin{array}{cc} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{array} \right| &\leq 8M^2 2^{-53} + 2 \cdot 2^{-50} M^2 \\ &\leq 3 \cdot 2^{-50} M^2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 8M^2$$

$$\text{erreur} \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 3.2^{-50} M^2$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 8M^2$$

$$\text{erreur} \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 3.2^{-50} M^2$$

si $|\text{valeur}| \geq \text{erreur}$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 8M^2$$

$$\text{erreur} \begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 3.2^{-50} M^2$$

si $|\text{valeur}| \geq \text{erreur}$

le prédicat est certifié

$$\left| \begin{array}{cc} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{array} \right| \leq 8M^2$$

$$\text{erreur} \left| \begin{array}{cc} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{array} \right| \leq 3.2^{-50} M^2$$

si $|\text{valeur}| \geq \text{erreur}$

le prédicat est certifié

sinon

calcul exact (entier)

Filtre statique

Contre

Pour

Filtre statique

Contre

Hypothèses sur les données

Opérations restreintes $+$ $-$ \times $\sqrt{\quad}$

Pour

Filtre statique

Contre

Hypothèses sur les données

Opérations restreintes $+$ $-$ \times $\sqrt{\quad}$

Taux de succès correct

Pour

Filtre statique

Contre

Hypothèses sur les données

Opérations restreintes + - × √

Taux de succès correct

Très rapide

Pour

Filtre statique

Contre

Hypothèses sur les données

Opérations restreintes $+$ $-$ \times $\sqrt{\quad}$

erreur à la main ?

Taux de succès correct

Très rapide

Pour (erreur calculée à la compilation)

Filtre dynamique

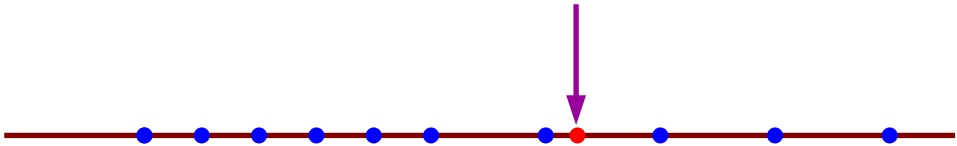
Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

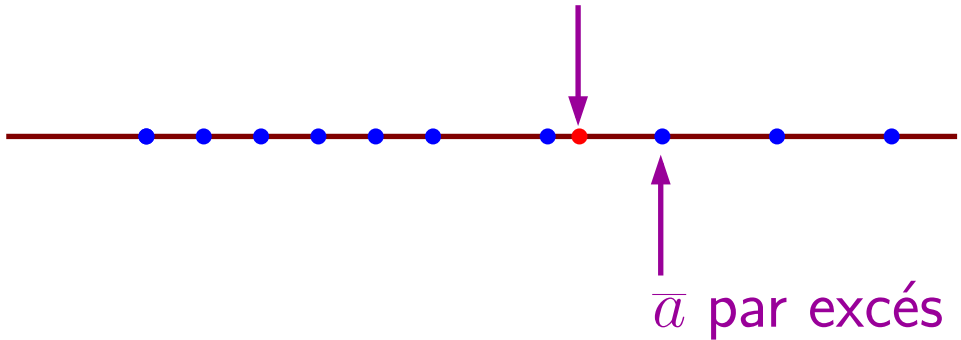
a non représentable



Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

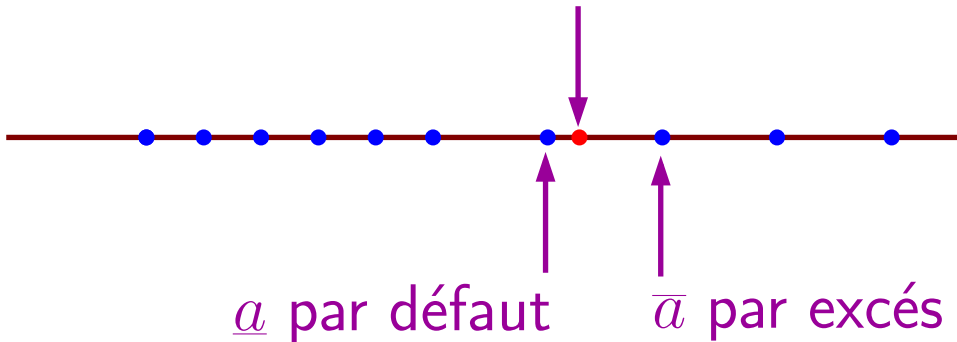
a non représentable



Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

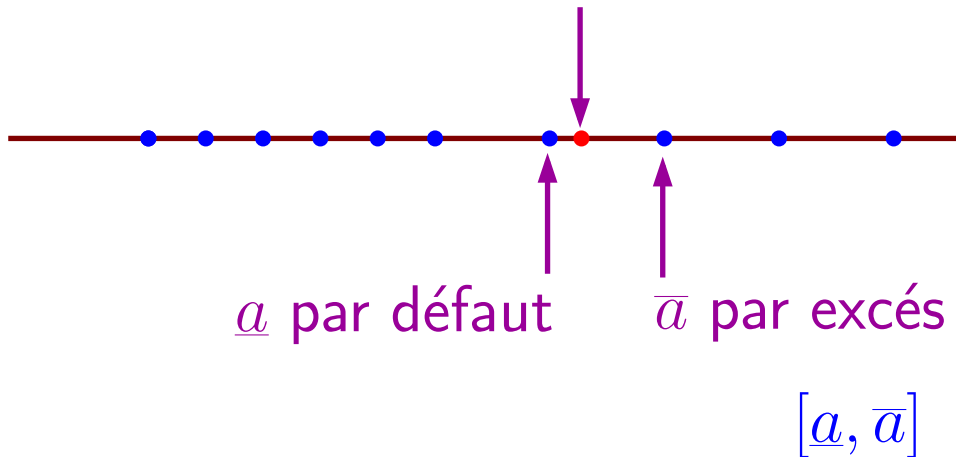
a non représentable



Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

a non représentable



arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] =$$

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

on propage l'approximation

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$$

on propage l'approximation

si $0 \notin [\underline{resultat}, \overline{resultat}]$

le prédicat est certifié

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

on propage l'approximation

si $0 \notin [\underline{resultat}, \overline{resultat}]$

le prédicat est certifié

sinon

calcul exact (entier)

Programmation

```
template <class FT>
Orientation orientation
    ( FT px, FT py, FT qx, FT qy, FT rx, FT ry)
{
    return sign( (qx-px)*(ry-py)-(rx-px)*(qy-py) );
}
```

Programmation

```
template <class FT>
Orientation orientation
    ( FT px, FT py, FT qx, FT qy, FT rx, FT ry)
{
    return sign( (qx-px)*(ry-py)-(rx-px)*(qy-py) );
}
```

FT peut être double

Programmation

```
template <class FT>
Orientation orientation
    ( FT px, FT py, FT qx, FT qy, FT rx, FT ry)
{
    return sign( (qx-px)*(ry-py)-(rx-px)*(qy-py) );
}
```

FT peut être double

mais aussi Interval

Filtre dynamique

Contre

Pour

Filtre dynamique

Contre

Opérations complètes
si on sait faire intervalle

Pas d'hypothèses sur les données

Pour

Filtre dynamique

Contre

Opérations complètes

si on sait faire intervalle

Taux de succès excellent

Pas d'hypothèses sur les données

Pour

Filtre dynamique

Contre

Moins rapide

Opérations complètes

si on sait faire intervalle

Taux de succès excellent

Pas d'hypothèses sur les données

Pour

Filtre dynamique

Contre

Moins rapide (erreur à l'exécution)

Opérations complètes

si on sait faire intervalle

Taux de succès excellent

Pas d'hypothèses sur les données

Pour

Conclusion

paradigme du calcul exact

on isole les problèmes de cohérence

dans les prédicats

Conclusion

paradigme du calcul exact

on isole les problèmes de cohérence

dans les prédicats

Conclusion

paradigme du calcul exact

on isole les problèmes de cohérence

dans les prédicats

on répond exactement au prédicat

Conclusion

paradigme du calcul exact

on isole les problèmes de cohérence

dans les prédicats

on répond exactement au prédicat

1- c'est pour la cohérence, pas pour l'exactitude

2- ça veut pas dire forcément arithmétique exacte

Cas dégénérés

Cas dégénérés

et si les points sont alignés

cocycliques

• • •

Cas dégénérés

et si les points sont alignés

cocycliques

...

que faut-il faire



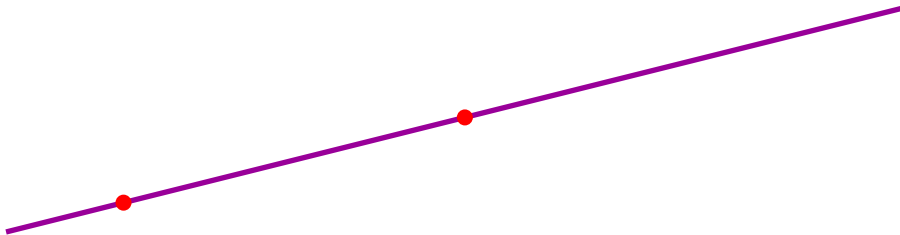
Cas dégénérés

Mauvais argument :

Cas dégénérés

Mauvais argument :

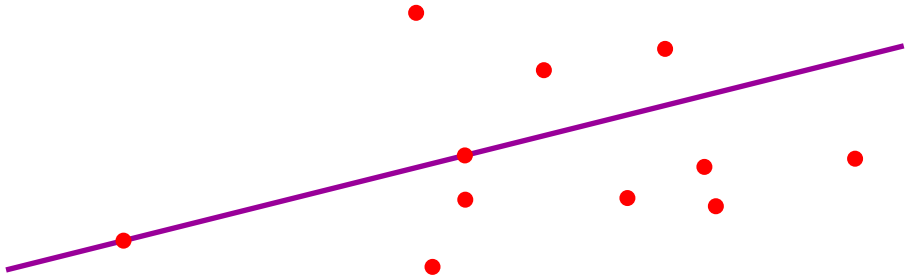
ça n'arrive pas



Cas dégénérés

Mauvais argument :

ça n'arrive pas



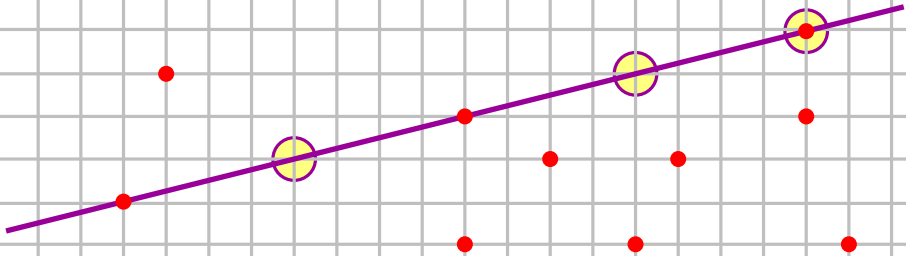
Proba nulle

Cas dégénérés

Mauvais argument :

ça n'arrive pas

Mais si car les points sont discrets



Retour sur l'origine du problème

Retour sur l'origine du problème

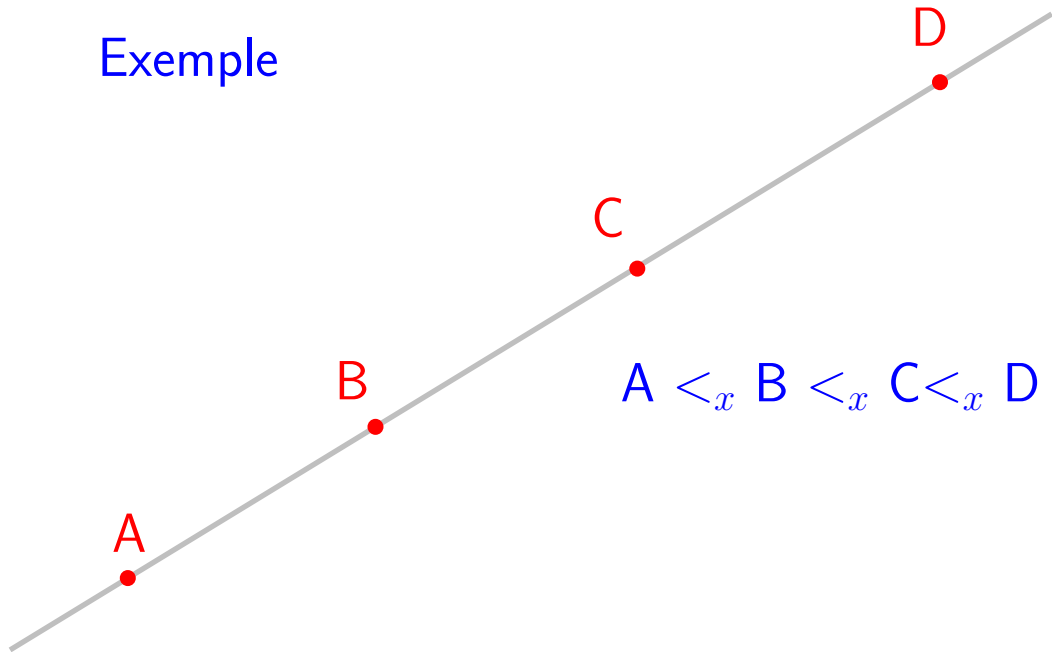
On a tendance à utiliser la géométrie

i.e. les théorèmes géométriques

dans les algorithmes

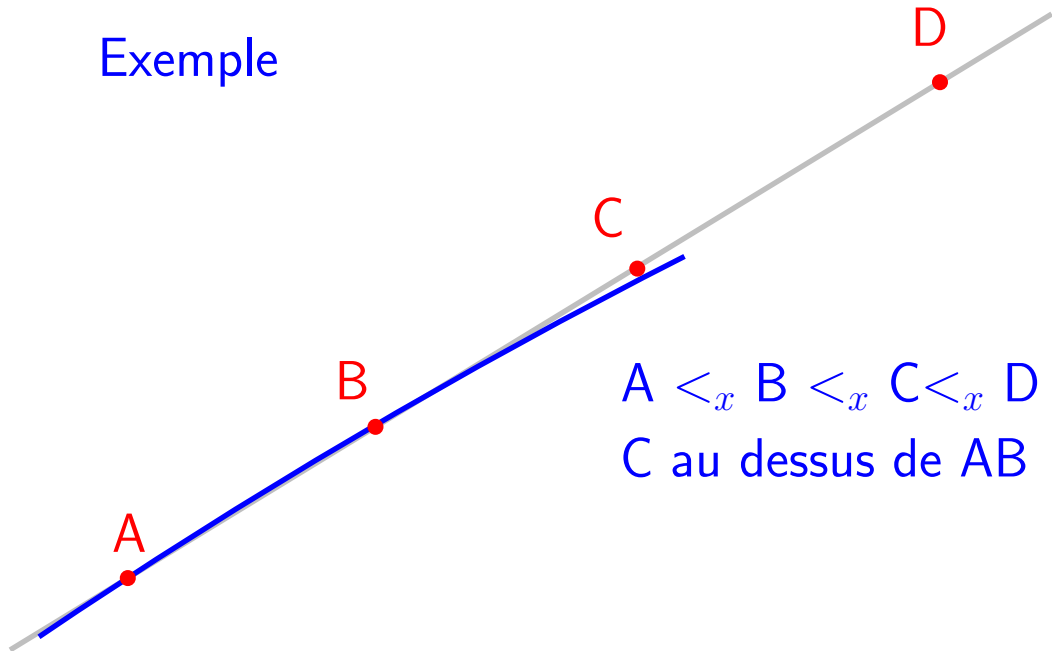
Robustesse

Exemple



Robustesse

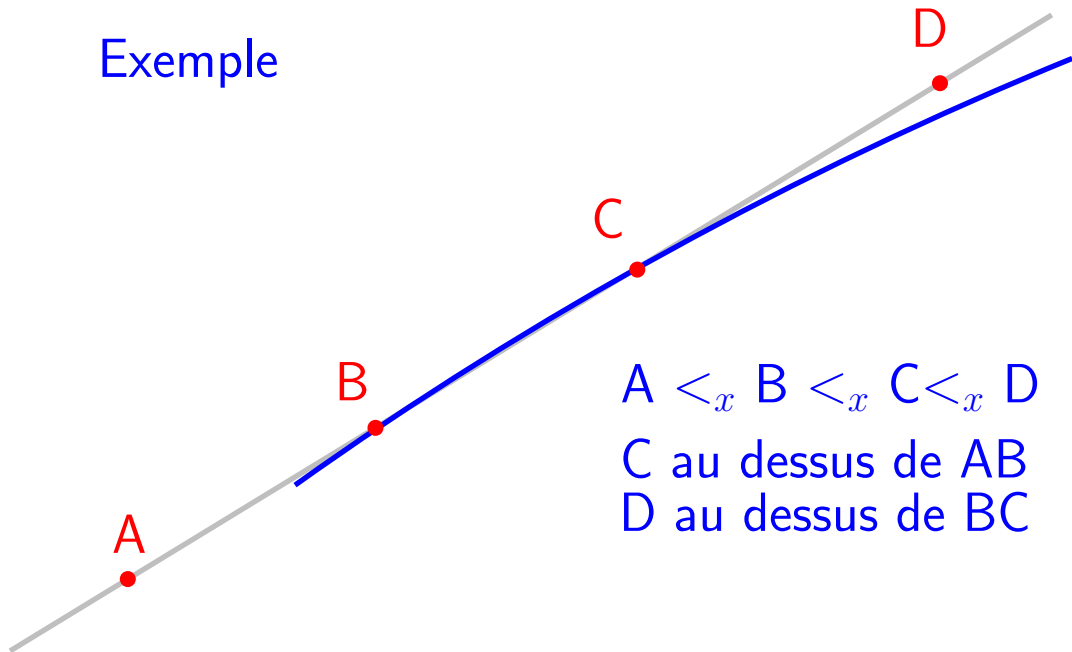
Exemple



$A <_x B <_x C <_x D$
 C au dessus de AB

Robustesse

Exemple



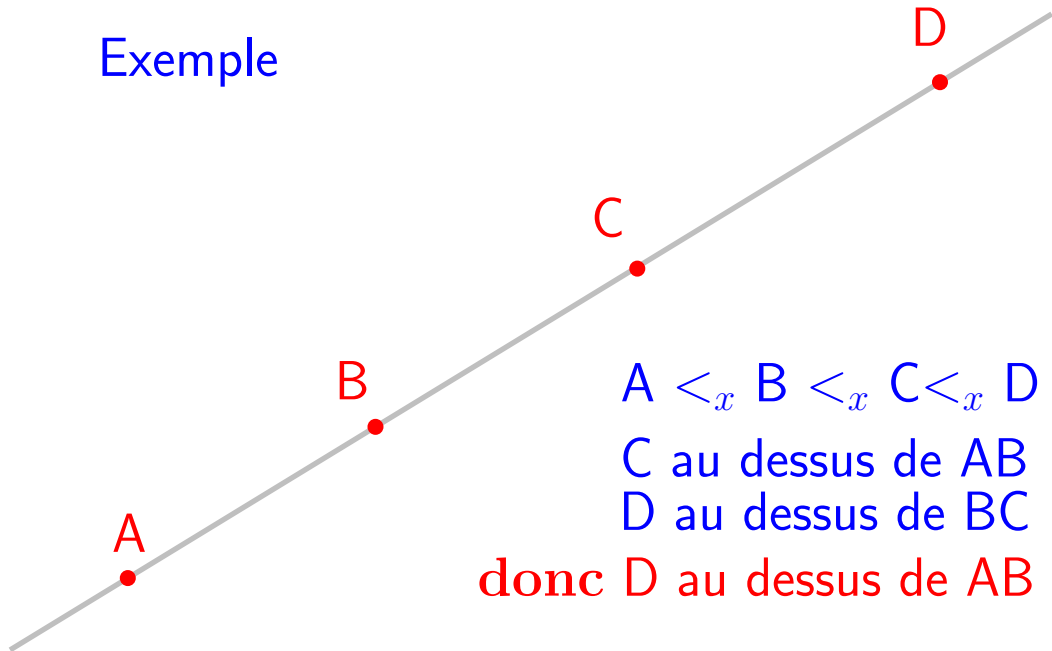
$$A <_x B <_x C <_x D$$

C au dessus de AB

D au dessus de BC

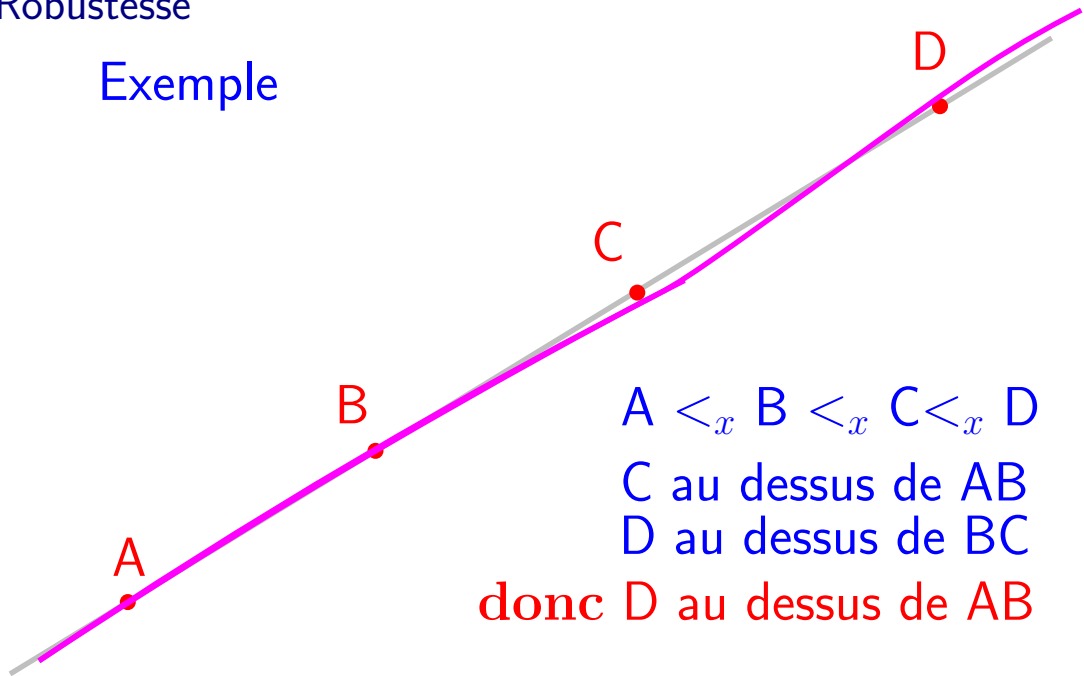
Robustesse

Exemple



Robustesse

Exemple



$A <_x B <_x C <_x D$

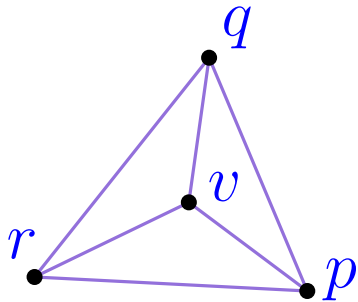
C au dessus de AB

D au dessus de BC

donc D au dessus de AB

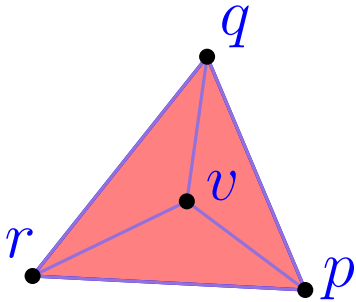
mais l'évaluation des prédicats pourrait donner le contraire

théorème géométrique utile aux algorithmes

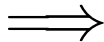


$$\begin{array}{l} pqv \\ qrv \\ rpv \end{array} \text{ CCW} \implies pqr$$

théorème géométrique utile aux algorithmes

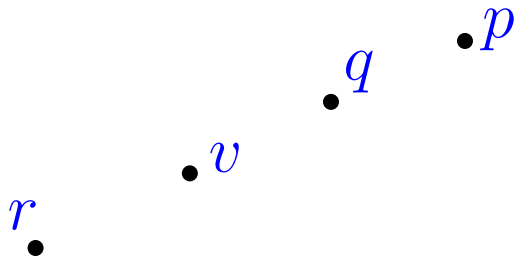


pqv
 qrv **CCW**
 rpv

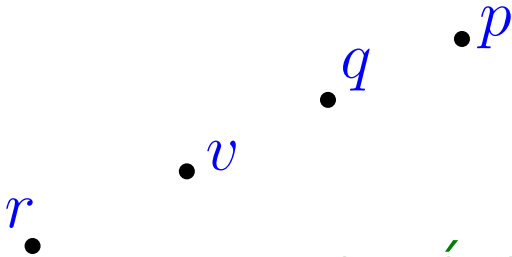


pqr **CCW**

si les points sont alignés

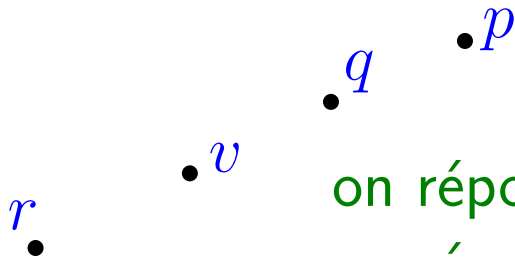


si les points sont alignés



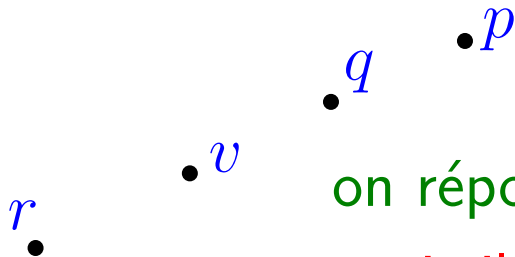
on répond alignés ?

si les points sont alignés



on répond n'importe quoi ?
on répond alignés ?

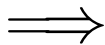
si les points sont alignés



on répond n'importe quoi ?

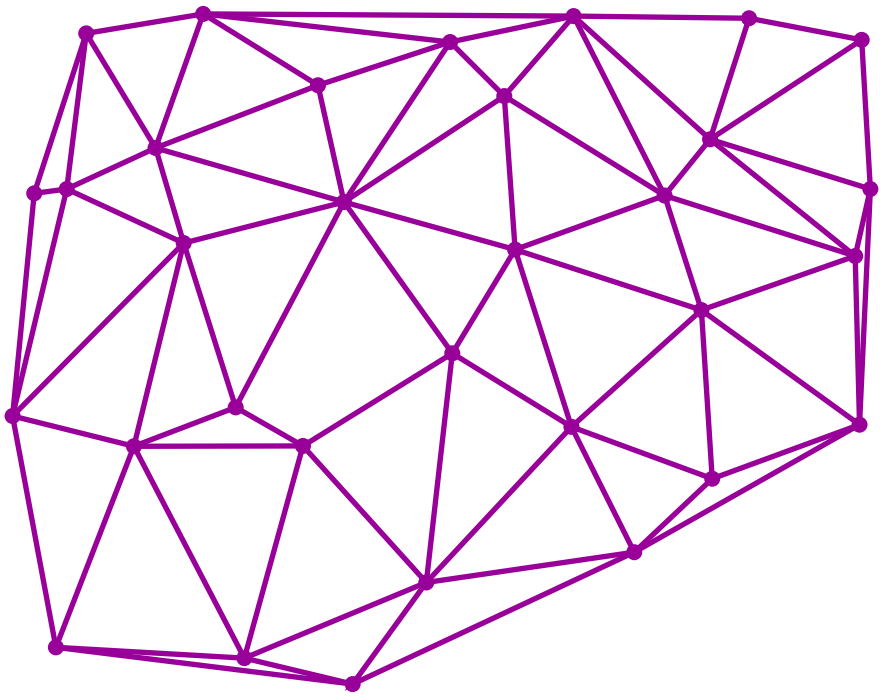
mais il faut être cohérent
vis à vis des théorèmes géométriques

pqv
 qrv **CCW**
 rpv

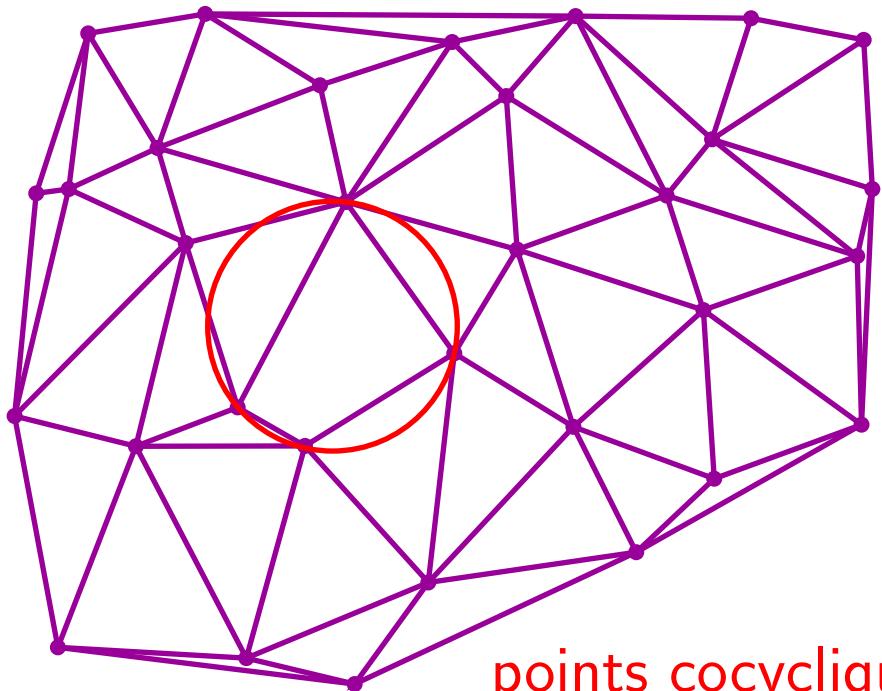


pqr **CCW**

triangulation de Delaunay

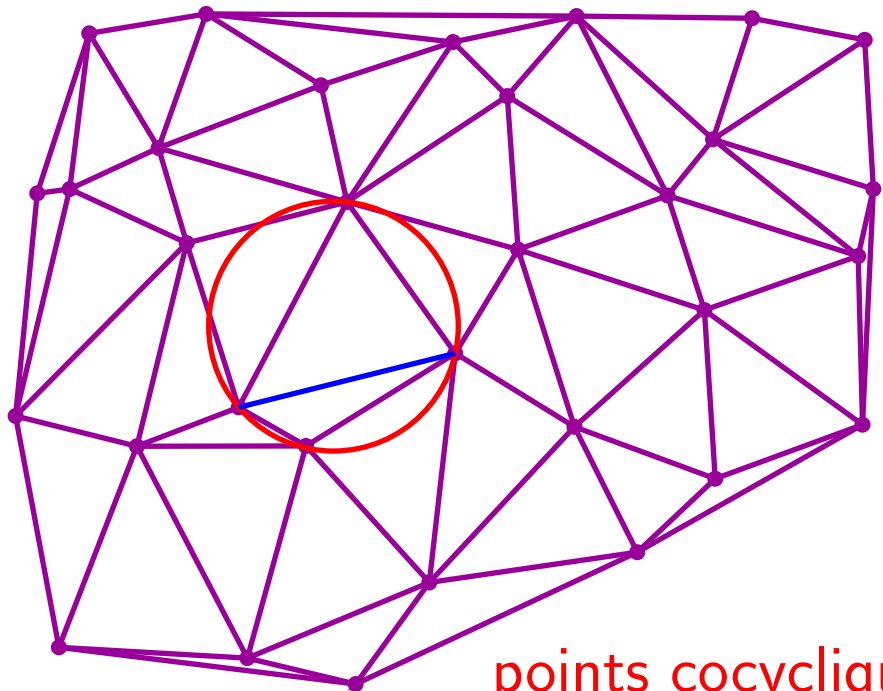


triangulation de Delaunay



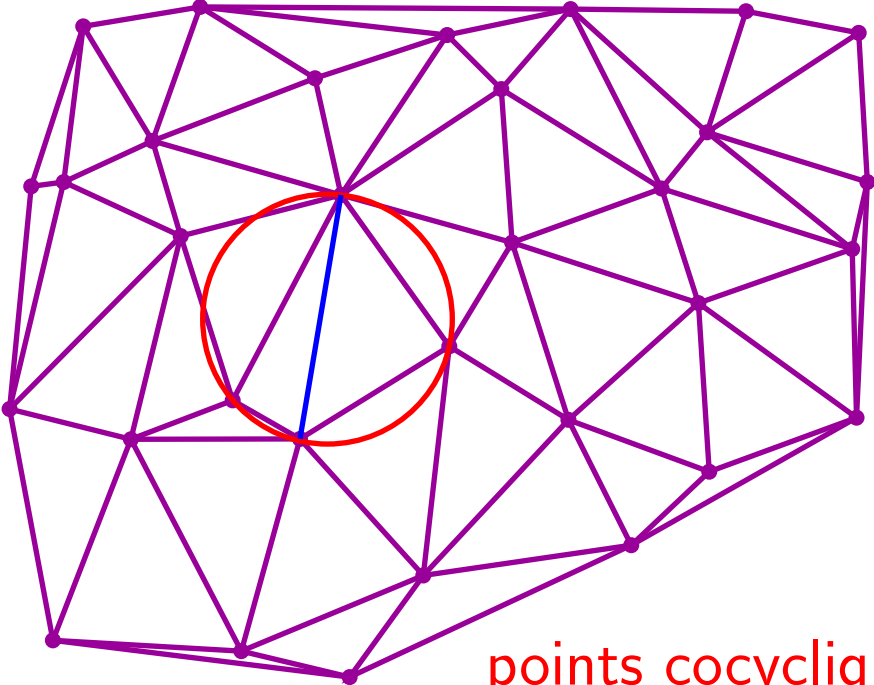
points cocycliques

triangulation de Delaunay



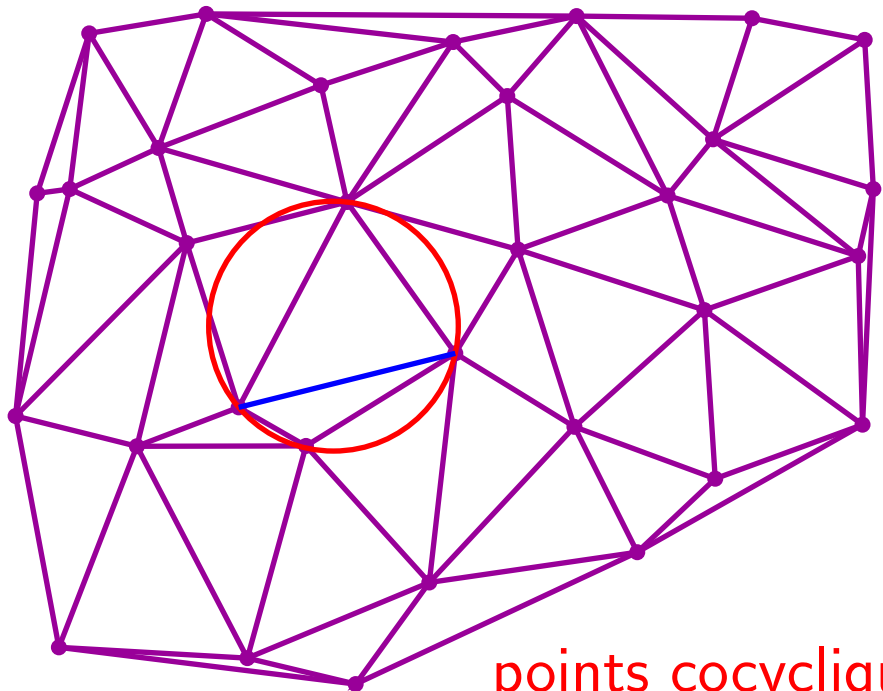
points cocycliques

triangulation de Delaunay



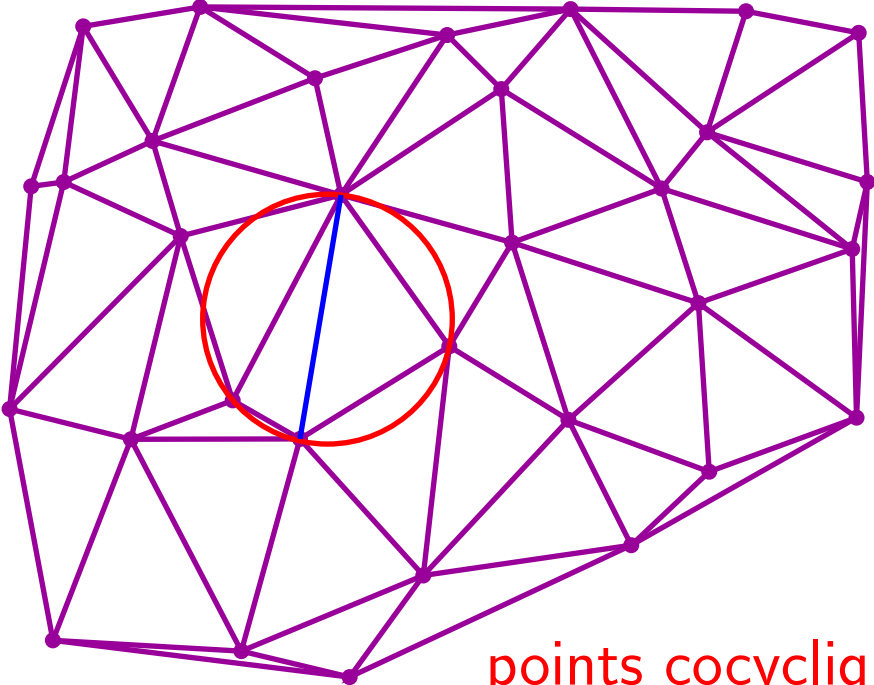
points cocycliques

triangulation de Delaunay



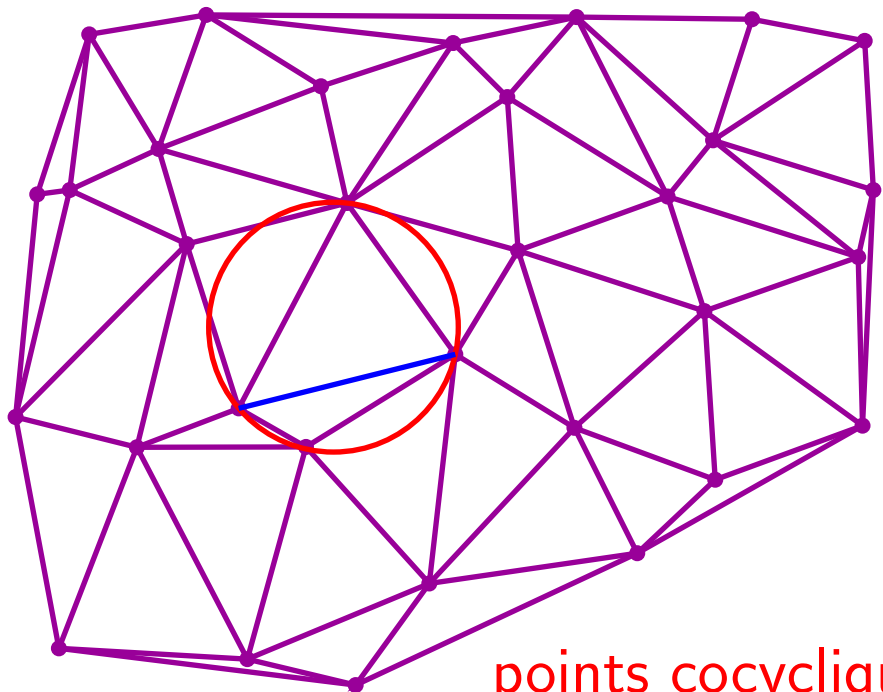
points cocycliques

triangulation de Delaunay



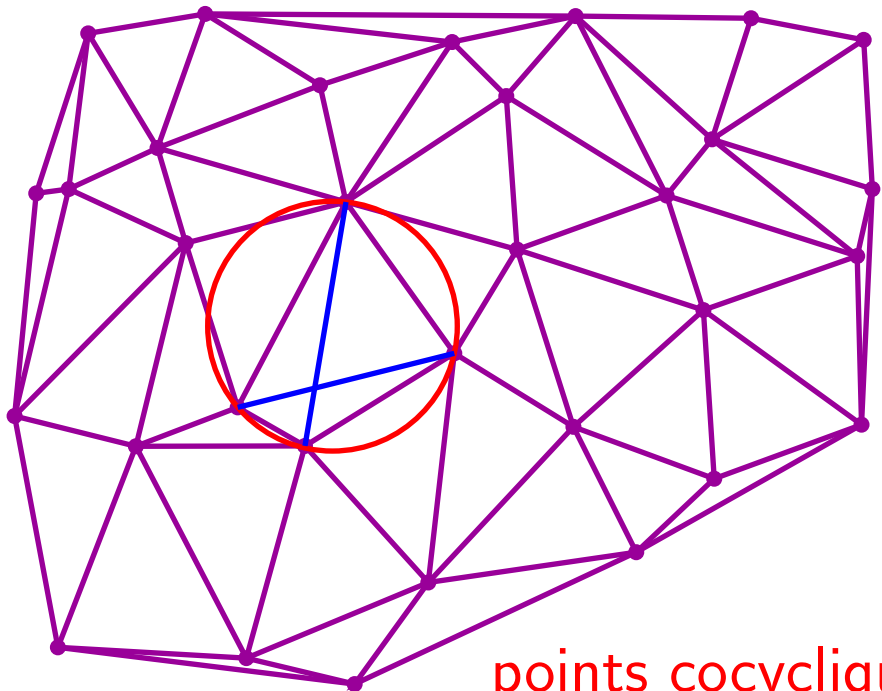
points cocycliques

triangulation de Delaunay



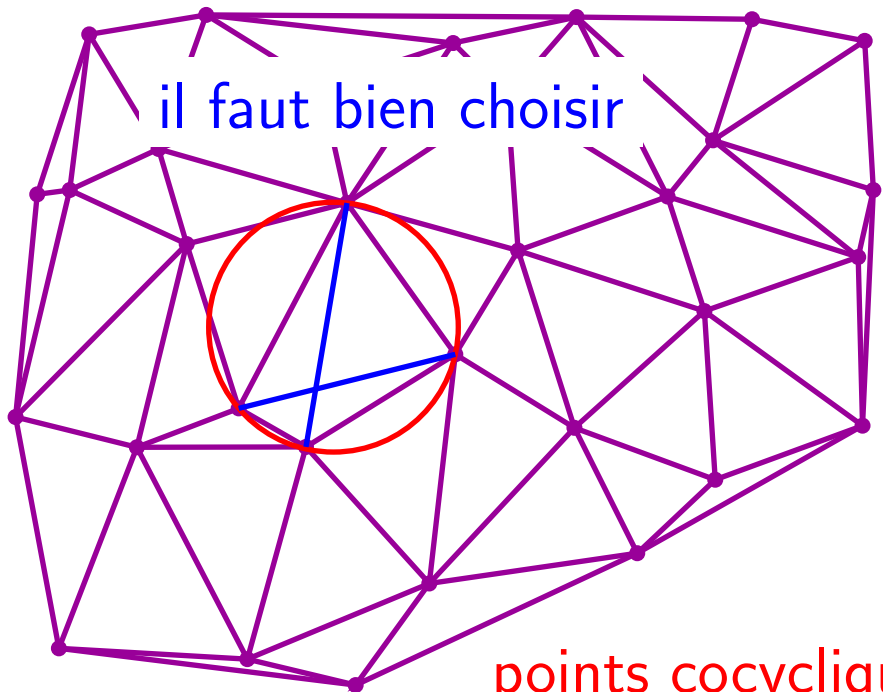
points cocycliques

triangulation de Delaunay



points cocycliques

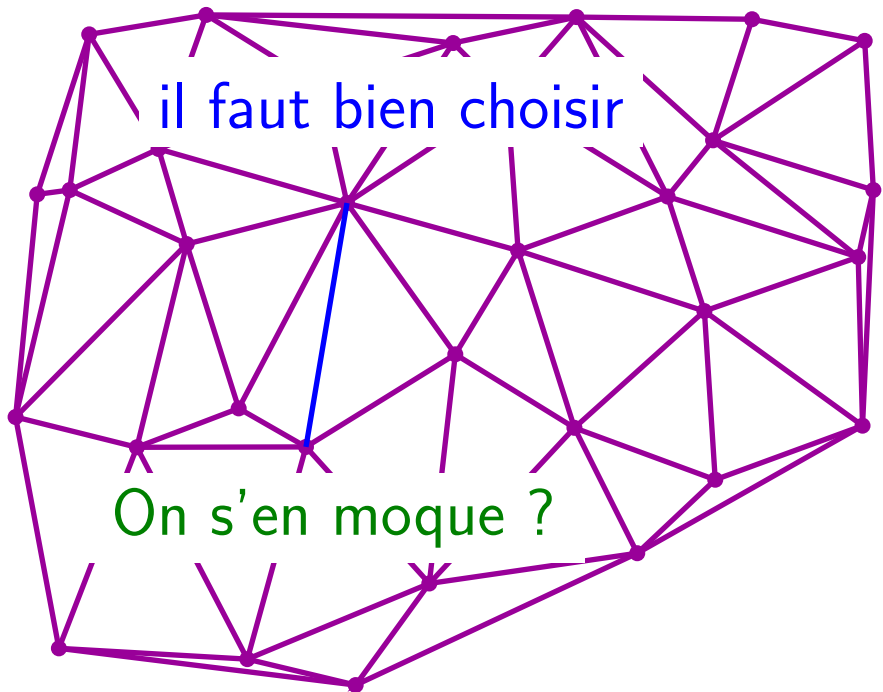
triangulation de Delaunay



il faut bien choisir

points cocycliques

triangulation de Delaunay

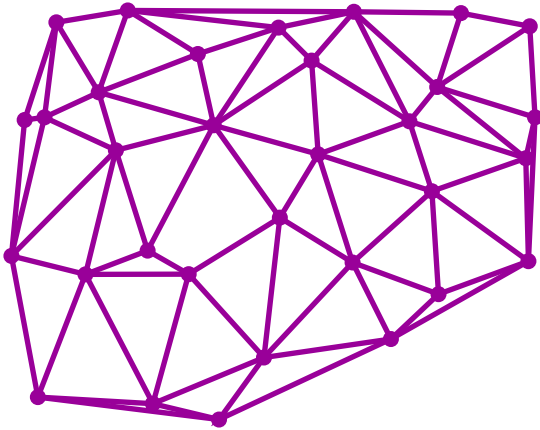


il faut bien choisir

On s'en moque ?

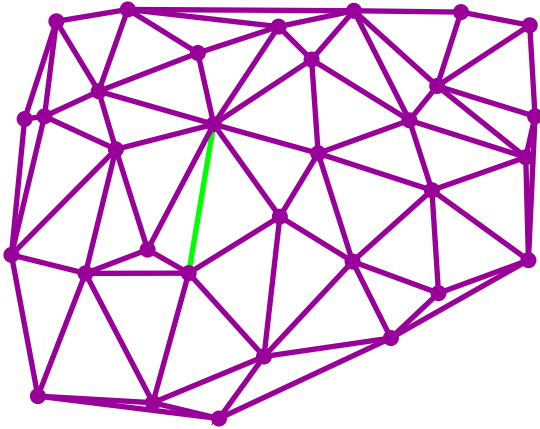
soit on traite les cas particuliers explicitement

soit on traite les cas particuliers explicitement



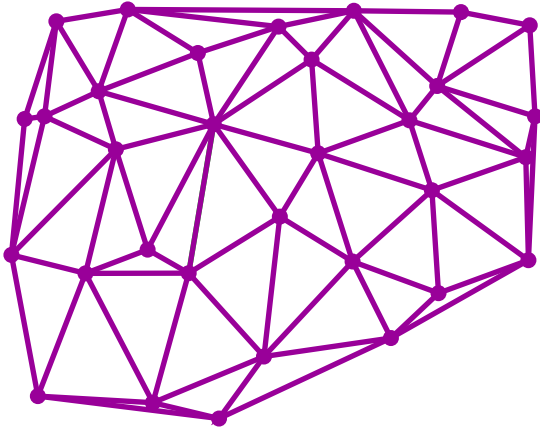
l'arête litigieuse
est absente

soit on traite les cas particuliers explicitement



l'arête litigieuse
est absente
est "marquée"

soit on traite les cas particuliers explicitement



l'arête litigieuse
est absente
est "marquée"

soit on simule l'absence de cas particuliers

SoS : Simulation of Simplicity

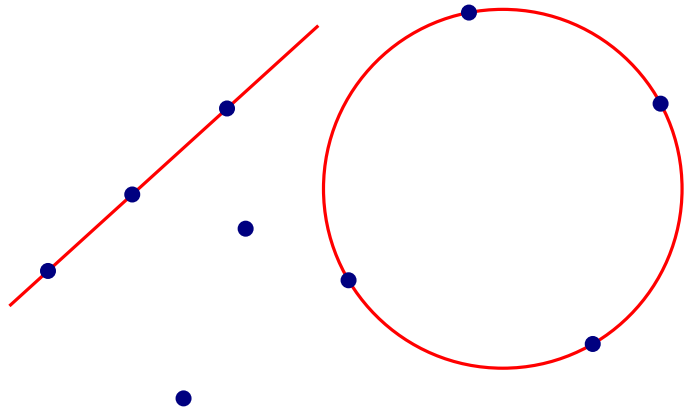
SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

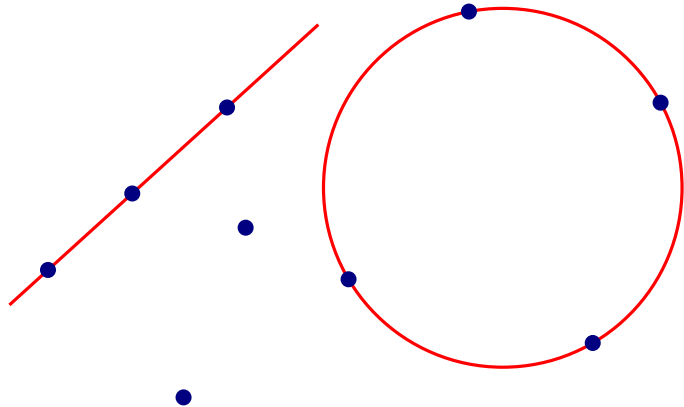
Les données



SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

Les données **eventuellement dégénérées**

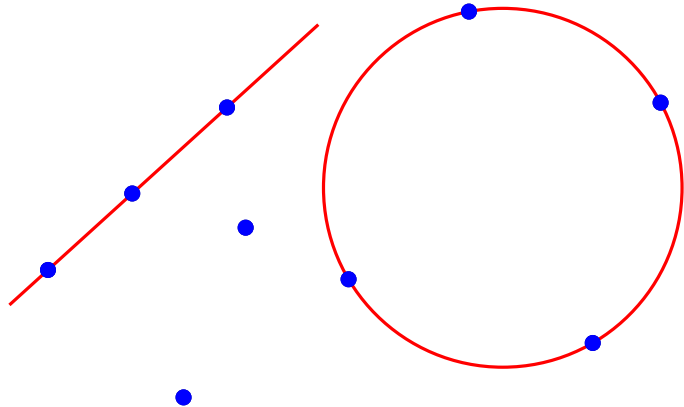


SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

Les données **eventuellement dégénérées**
vont dépendre d'un paramètre ε

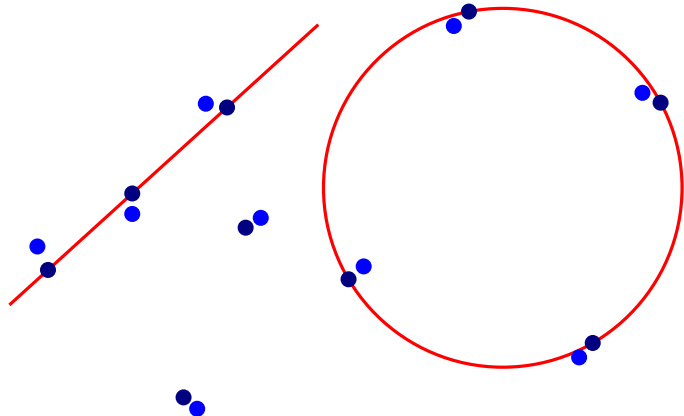
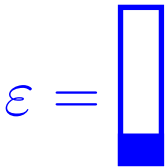
$$\varepsilon = \boxed{}$$



SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

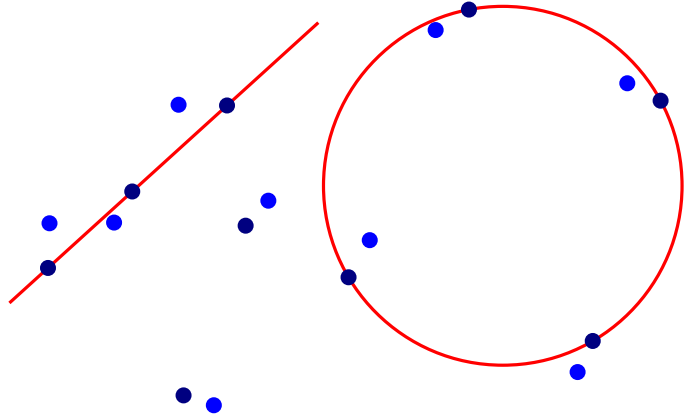
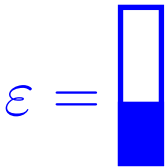
Les données **eventuellement dégénérées**
vont dépendre d'un paramètre ε



SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

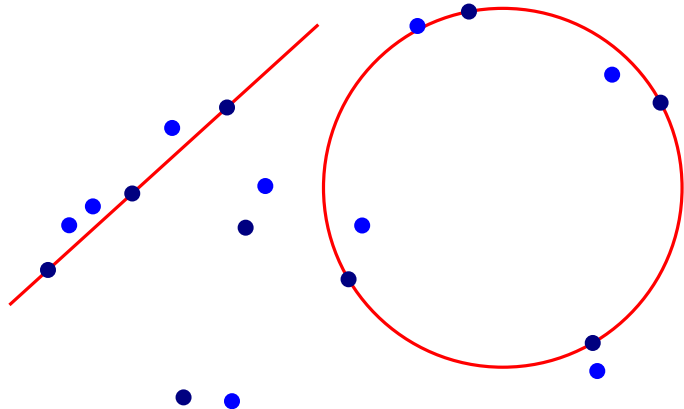
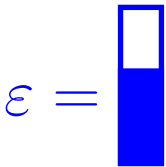
Les données **eventuellement dégénérées**
vont dépendre d'un paramètre ε



SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

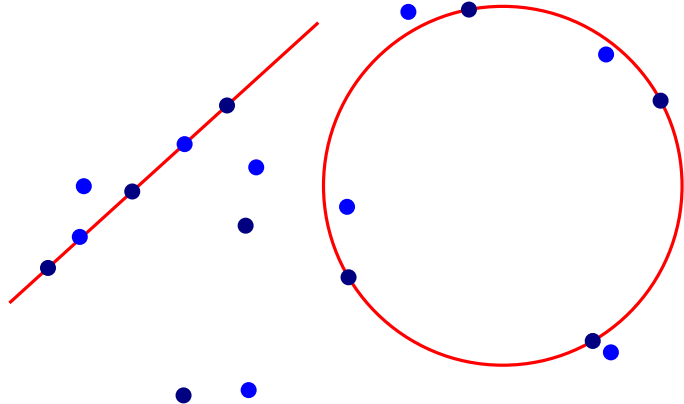
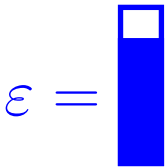
Les données **eventuellement dégénérées**
vont dépendre d'un paramètre ε



SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

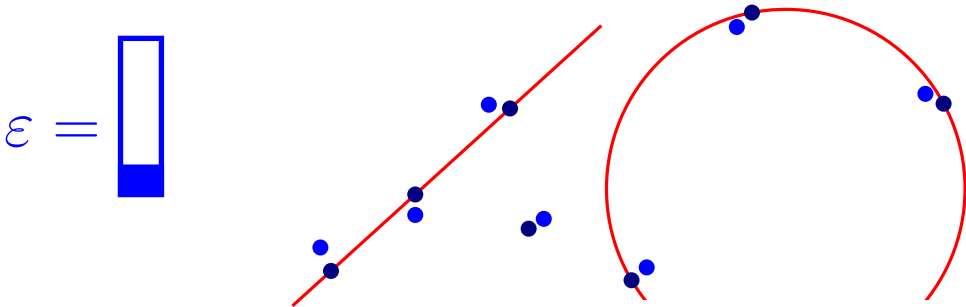
Les données **eventuellement dégénérées**
vont dépendre d'un paramètre ε



SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

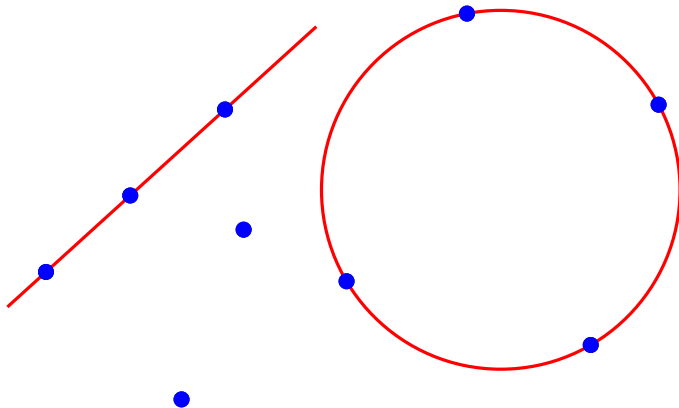
Les données **eventuellement dégénérées**
vont dépendre d'un paramètre ε



On regarde le problème limite $\varepsilon \rightarrow 0$

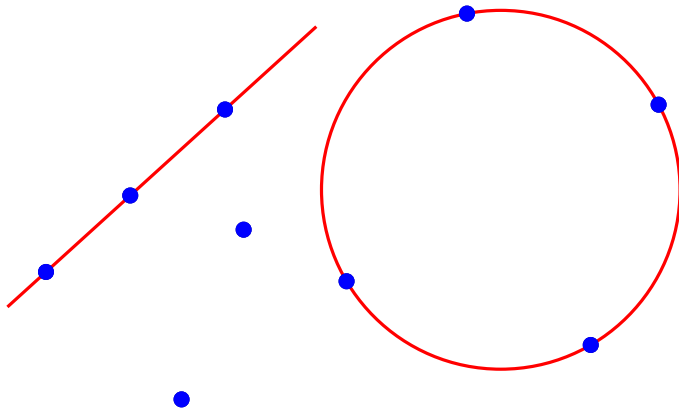


comme pour les problèmes de précision



comme pour les problèmes de précision

Tout se passe dans les prédicats



Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

comment



Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$

1 les dégénérescences soient levées

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$

- 1 les dégénérescences soient levées d'une manière contrôlée ?

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$

- 1 les dégénérescences soient levées
d'une manière contrôlée ?
canonique ?

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$

- 1 les dégénérescences soient levées
d'une manière contrôlée ?
canonique ?
que la limite ait du sens

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$

1 les dégénérescences soient levées
d'une manière contrôlée ?
canonique ?

que la limite ait du sens

2 que ça coûte pas plus cher
en temps, en précision...

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

comment



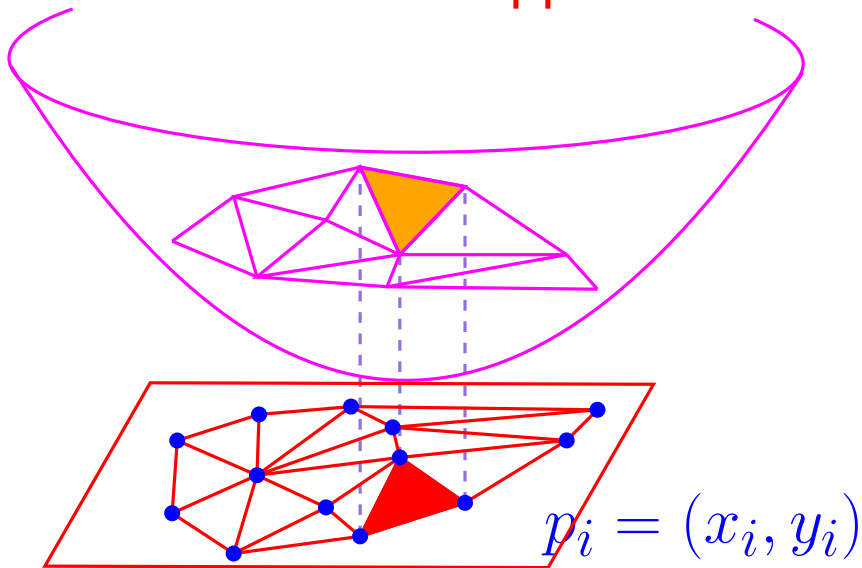
Perturbation pour Delaunay

Perturbation de l'enveloppe convexe 3D



Perturbation pour Delaunay

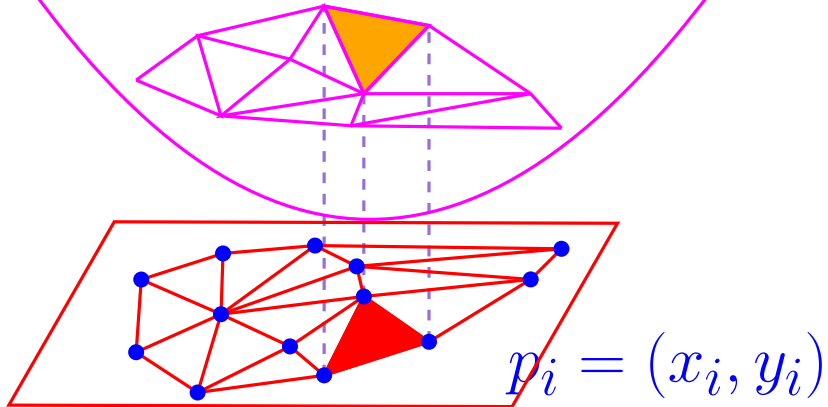
Perturbation de l'enveloppe convexe 3D



Perturbation pour Delaunay

Perturbation de l'enveloppe convexe 3D

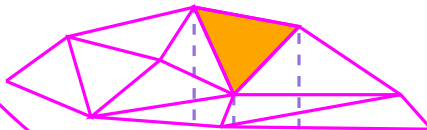
$$p_i^* = (x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2 + \varepsilon^{n-i})$$



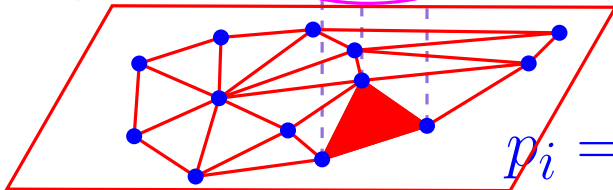
Perturbation pour Delaunay

Perturbation de l'enveloppe convexe 3D

$$p_i^* = (x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2 + \varepsilon^{n-i})$$



Le dernier point est perturbé

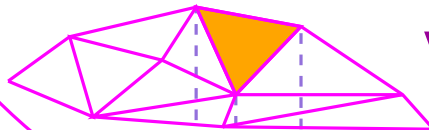


$$p_i = (x_i, y_i)$$

Perturbation pour Delaunay

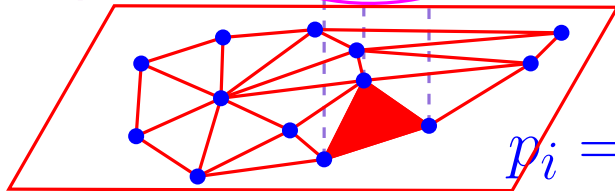
Perturbation de l'enveloppe convexe 3D

$$p_i^* = (x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2 + \varepsilon^{n-i})$$



vers le haut

Le dernier point est perturbé

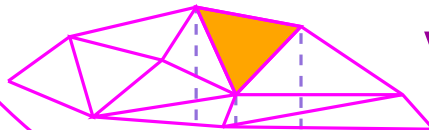


$$p_i = (x_i, y_i)$$

Perturbation pour Delaunay

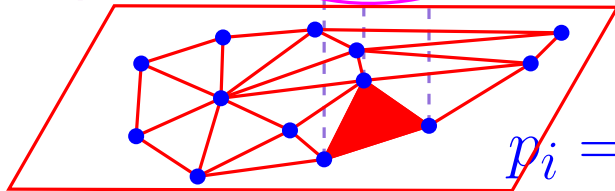
Perturbation de l'enveloppe convexe 3D

$$p_i^* = (x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2 + \varepsilon^{n-i})$$



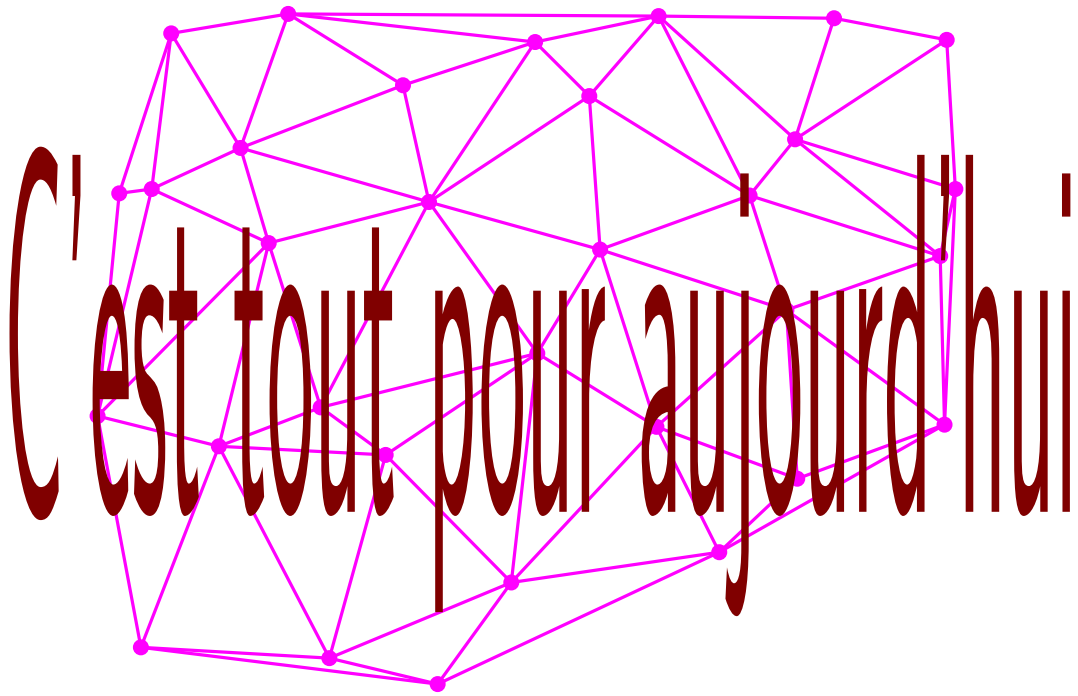
vers le haut

Le dernier point est perturbé



$$p_i = (x_i, y_i)$$

vers l'extérieur du cercle



C'est tout pour aujourd'hui