Proposition de stage L3

Titre : **Combinatoire des intersections de droites de $\mathbb{R}^3$**

Thématique : Informatique mathématique, informatique théorique, géométrie algorithmique, géométrie combinatoire, graphes

Localisation : Nancy

Encadrant référent : Xavier Goaoc (https://members.loria.fr/XGoaoc/)
Co-encadrant : Olivier Devillers (https://members.loria.fr/ODevillers/)
Équipe : GAMBLE, laboratoire LORIA et centre INRIA Nancy Grand Est
https://gamble.loria.fr/

Ce stage propose d'étudier une question mêlant géométrie et combinatoire. L'objectif est une analyse théorique aboutissant, idéalement, à des constructions ou des théorèmes. Cette question est motivée par une problématique d'informatique, plus précisément de vision par ordinateur.

1 Contexte

Considérons un ensemble fini $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ de droites de $\mathbb{R}^3$. Le *graphe d'intersection* de $\mathcal{L}$, noté $G_{\mathcal{L}}$, est le graphe non orienté, sans boucle ni multi-arête, d'ensemble de sommets $\mathcal{L}$ et où $\{\ell_i, \ell_j\}$ forme une arête si et seulement ℓ_i et ℓ_j se coupent (c'est à dire que $\ell_i \cap \ell_j \neq \emptyset$). Le graphe d'intersection est parfois appelé *graphe d'incidences*.

Il s'avère qu'un nombre trop élevé d'arêtes dans $G_{\mathcal{L}}$ contraint *très fortement* la géométrie de $\mathcal{L}$. Ainsi, par exemple, il existe une constante K telle que si $G_{\mathcal{L}}$ a plus de $Kn^{3/2}$ arêtes, alors au moins $\sqrt{n}$ des droites de $\mathcal{L}$ sont contenues dans un même plan ou dans une même quadrique[1]. *C.f.* [3, Théorème 2.1].

L'objectif de ce stage est d'explorer certaines variations de ce phénomène, en étudiant l'asymptotique, pour $n \to \infty$, du nombre maximum d'arêtes de $G_{\mathcal{L}}$ sous certaines hypothèses sur la géométrie de $\mathcal{L}$. On s'intéressera en particulier au cas où $G_{\mathcal{L}}$ est biparti, c'est à dire que l'on peut diviser $\mathcal{L}$ en deux ensembles (disons les droites *bleues* et les droites *rouges*) telles que deux droites d'une même couleur sont disjointes. On supposera, pour simplifier, qu'il y a autant de droites bleues que de droites rouges.

2 Point de départ

La première question qui nous intéressera est la conjecture suivante :

> **Conjecture.** Si chaque couleur contient deux droites *populaires*, c'est à dire coupant *toutes* les droites de l'autre couleur, et que ces quatre droites populaires sont en position générique[2], alors $G_{\mathcal{L}}$ a $O(n)$ arêtes.

La meilleure borne connue à ce jour est $O(n^{4/3})$ [2, Proposition 8] et découle d'un argument d'*exclusion de sous-graphe* dans une classe de graphes particuliers, les *graphes semi-algébriques*. On pourra commencer par étudier cette preuve et examiner dans quelle mesure ses arguments sont fins.

---

1. Une *quadrique* est une surface de $\mathbb{R}^3$ définie comme le lieu d'annulation d'un polynome de degré 2.
2. La notion de position générique considérée ici est un peu technique : 4 droites sont en position générale s'il n'existe pas une infinité de droites les coupant toutes les 4.

3 Motivation et prolongements

La conjecture ci-dessus est apparue au cours de l'étude du problème de *cohérence multi-vues* en vision par ordinateur. On en donne ici l'intuition, et on renvoie à l'introduction de [2] pour une formalisation précise.

Supposons données k photographies $I_1, I_2, \ldots, I_k$, avec pour chaque image une position spatiale de l'appareil photographique. On dit que ces images sont *cohérentes* s'il existe un objet 3D X tel que pour tout $1 \le i \le k$, la vue de X depuis la $i$ème position correspond à la $i$ème photographie. Une question pertinente pour les méthodes de reconstruction, notamment en *structure from motion*, est de savoir s'il existe une valeur de k à partir de laquelle la cohérence "se propage" : autrement dit, si l'on sait que tout sous-ensemble de $k-1$ photographies + points de vues est cohérent, peut on en déduire que l'ensemble des k photographies + points de vues est cohérent ?

Dans [2], nous avons prouvé que la réponse à cette question est négative si les photographies sont prises par un appareil photo *central*, c'est à dire ayant un centre optique par lequel passent tous les rayons lumineux (comme la bonne vieille *camera oscura*). Pour montrer cela, nous avons reformulé les images et points de vues en ensembles de droites colorées (une couleur par image). Les questions de cohérence se traduisent alors en conditions d'intersections entre ces droites, et nous avons, pour tout k, construit k ensembles de droites qui satisfont les conditions de cohérence $k-1$ à $k-1$, mais pas la condition de cohérence des k couleurs. Ainsi, il n'existe pas de k à partir duquel la cohérence se propage.

Le fait que nos contre-exemples ne s'appliquent qu'aux appareils photo centraux vient du fait que dans nos constructions, les droites d'une même couleur sont toutes concourrantes. Il existe cependant des systèmes d'imagerie non centraux comme par exemple les caméras *two-slits*, *pushbroom* ou encore *pencil*, *c.f.* [4, 1]. La question de savoir si notre méthode de construction se généralise aux caméras *two slits* est très étroitement liée à une version forte de la conjecture ci-dessus :

> **Question.** Supposons que l'on ait des droites de k couleurs dans $\mathbb{R}^3$, avec n droites de chaque couleur. Supposons que pour chaque couleur, toutes les droites de cette couleur puissent être coupées par deux droites (non colorées, et appelées populaires). Supposons que les droites populaires soient 4 à 4 en position générique. Est-il vrai que le nombre de points de $\mathbb{R}^3$ appartenant à au moins une droite de *chaque* couleur est $O(n)$?

Une réponse positive à cette question rendrait donc les constructions de [2] irréalisables dans le cas des appareils photo 2-fentes, réouvrant ainsi le débat sur la propagation de cohérence pour ce type de systèmes d'imagerie...

4 Compétences attendues

Goût pour la géométrie et la combinatoire, bases mathématiques solide (notamment en algèbre linéaire).

Références

[1] Guillaume Batog, Xavier Goaoc, and Jean Ponce. Admissible linear map models of linear cameras. In *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1578–1585. IEEE, 2010.

[2] Boris Bukh, Xavier Goaoc, Alfredo Hubard, and Matthew Trager. Consistent Sets of Lines with no Colorful Incidence. In *34th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2018)*, volume 99 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 17 :1–17 :14, 2018. Disponible à : https://arxiv.org/abs/1803.06267.

[3] Larry Guth. Ruled surface theory and incidence geometry. In *A Journey Through Discrete Mathematics*, pages 449–466. Springer, 2017. Disponible à : https://arxiv.org/abs/1606.07682.

[4] Jean Ponce. What is a camera ? In *2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1526–1533. IEEE, 2009.