Leçon 1

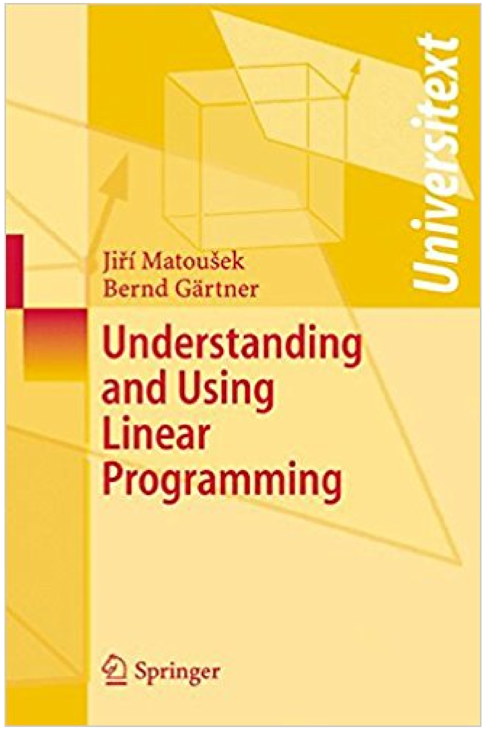
Programmation linéaire

Xavier Goaoc

Leçon 1

Programmation linéaire

Xavier Goaoc



La programmation linéaire est la théorie des systèmes d'inégalités linéaires.

système linéaire, sous-espace affine, pivot de Gauss
$\rightarrow$ programme linéaire, polyèdre, algorithme du simplexe

Développée tardivement (Kantorovitch 1939, Dantzig 1947, ...)

impact difficile à surévaluer, en théorie et en pratique.

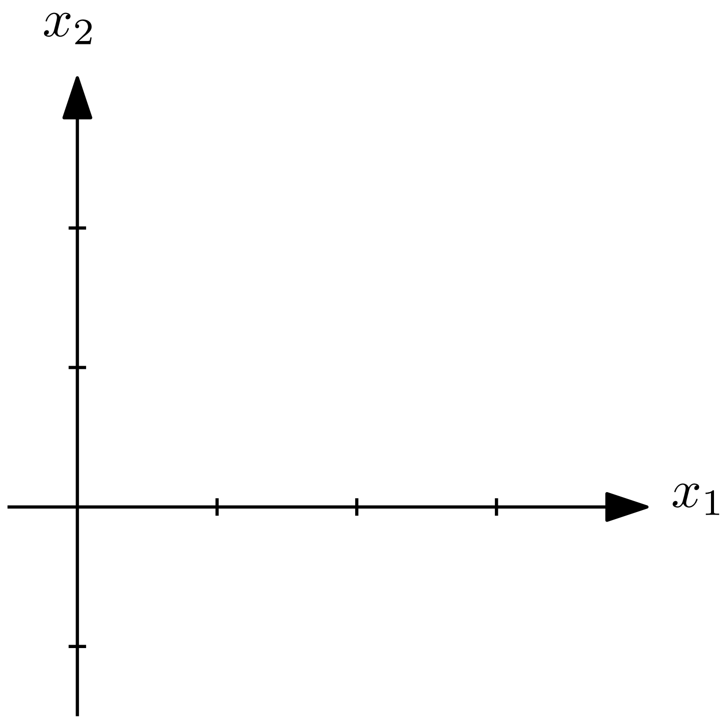
Premiers exemples de programmes linéaires

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$

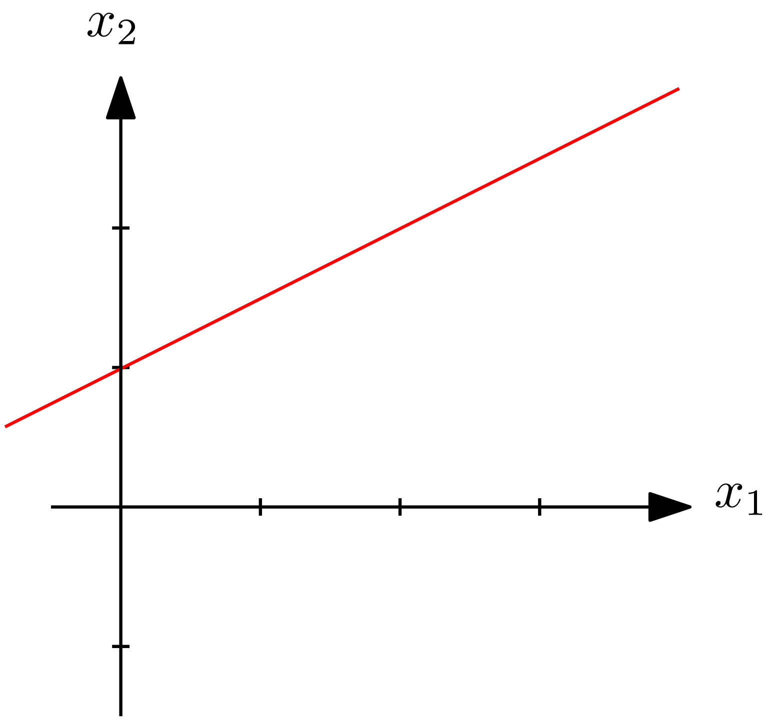
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$



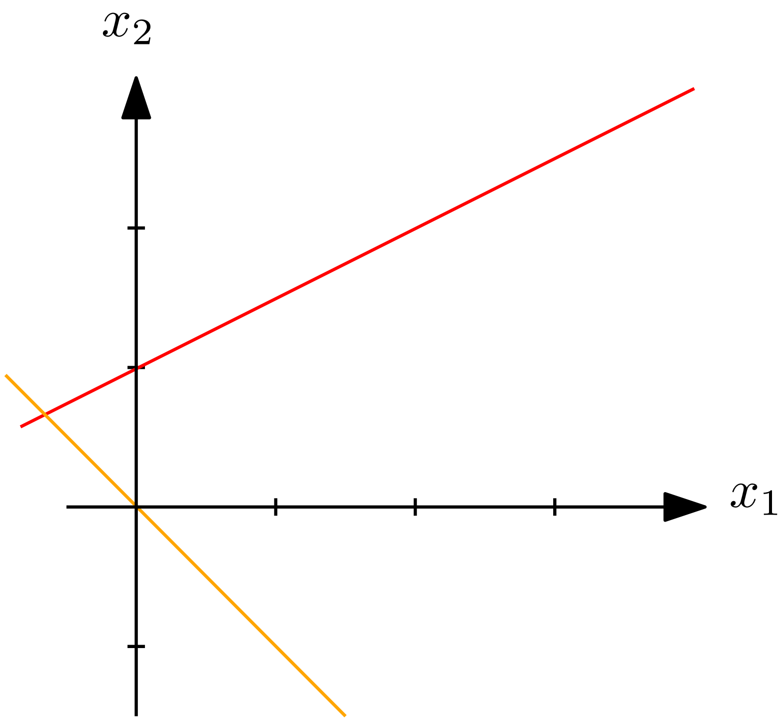
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



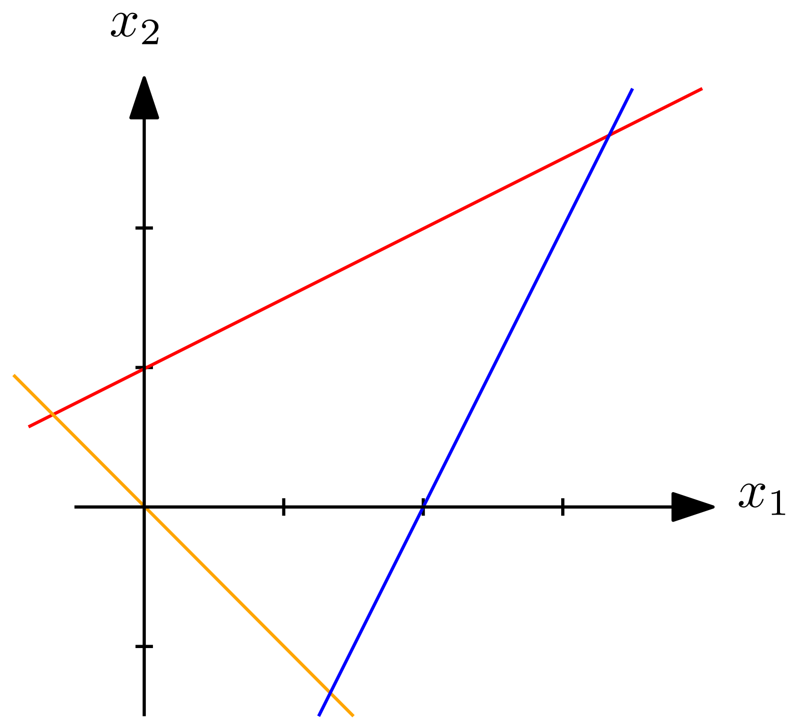
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



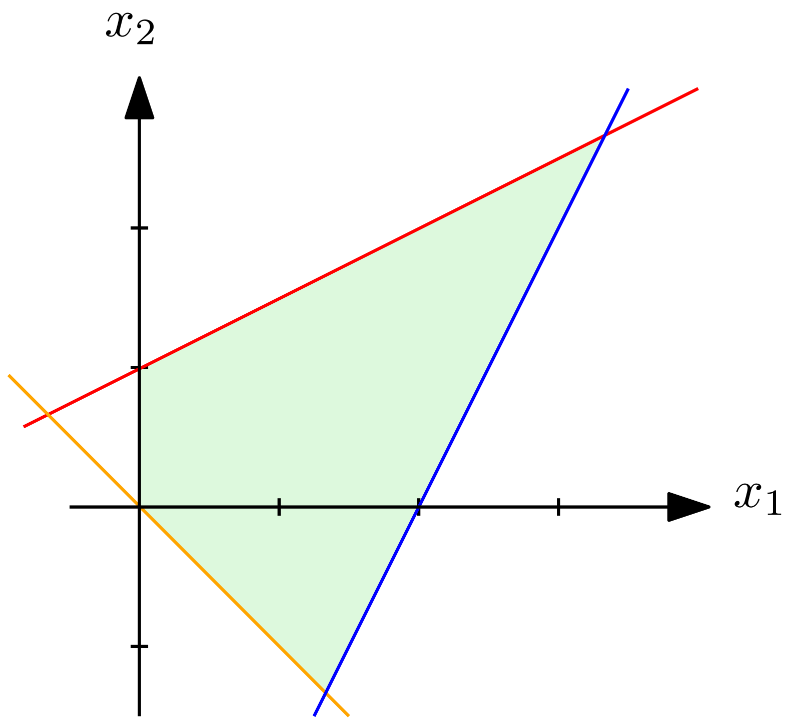
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



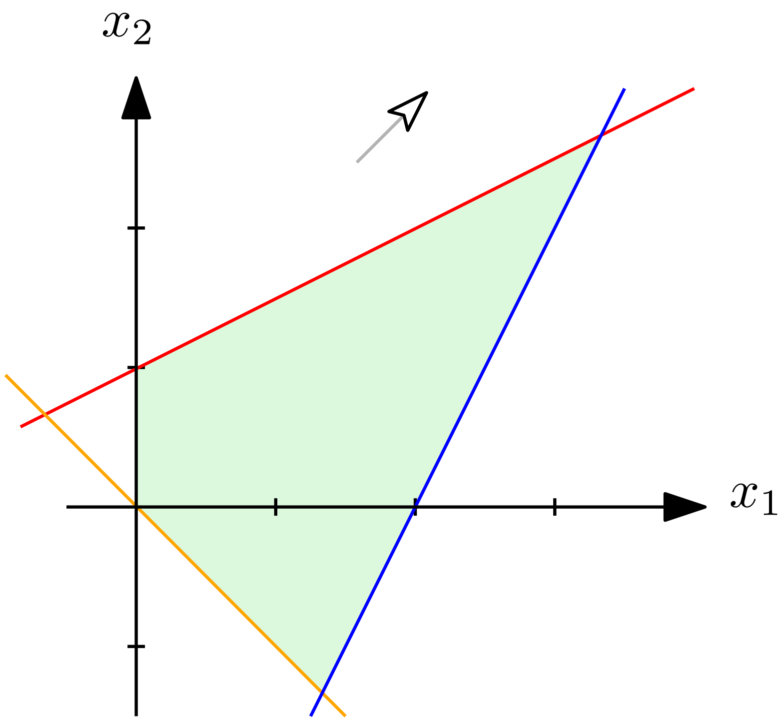
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



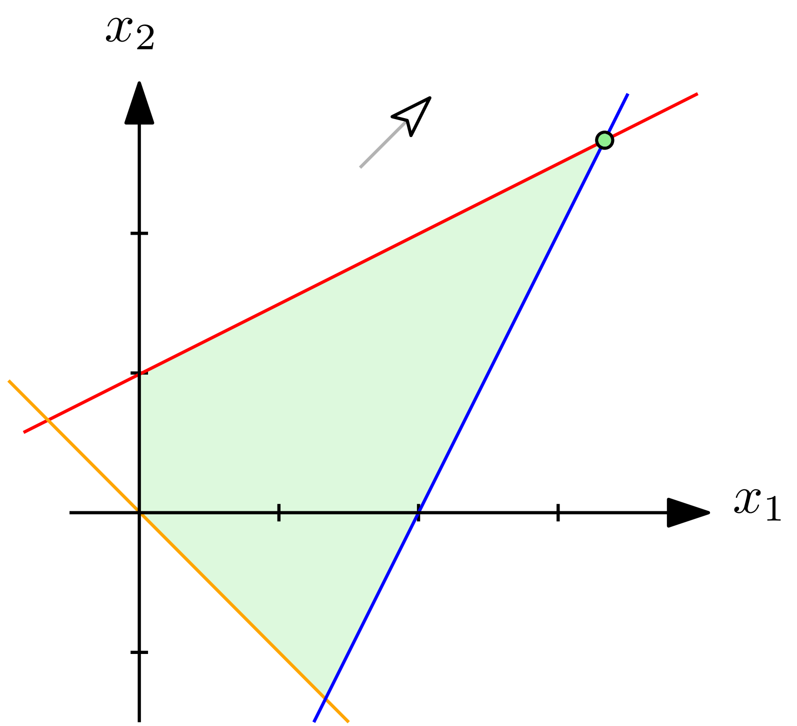
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



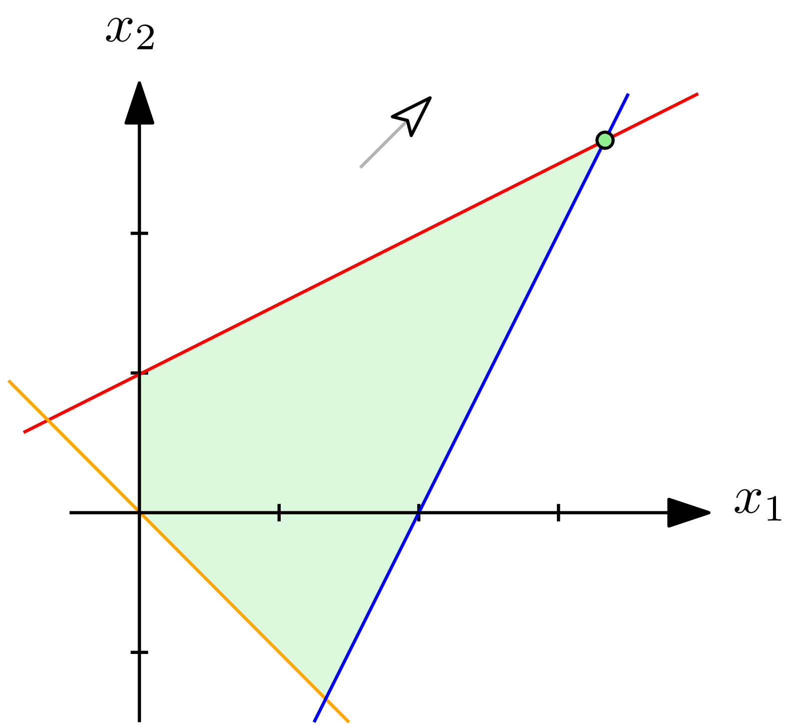
Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$



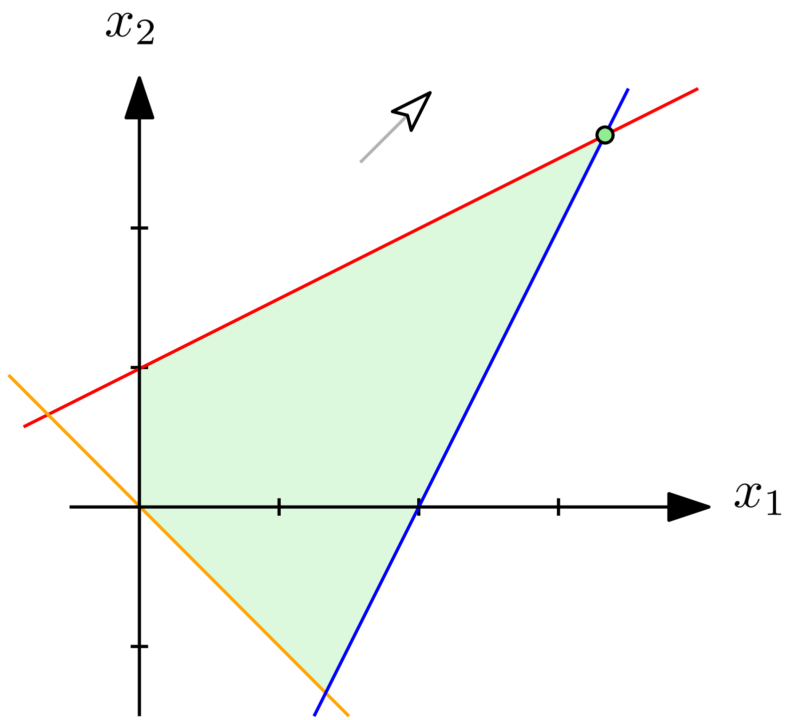
Une forme générale

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \leq b \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Un programme linéaire (**PL**) est un problème qui consiste à maximiser sur $\mathbb{R}^d$ une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\
& 2x_2 - x_1 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \geq 0 \\
& x_2 - 2x_1 \geq -4
\end{array}
$$



Une forme générale

$$
\begin{array}{ll}
\max & c^T x \\
\text{t.q.} & Ax \leq b
\end{array}
$$

$$x \in \mathbb{R}^d,\ A \in \mathbb{R}^{n\times d},\ b \in \mathbb{R}^n$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Résoudre un programme linéaire = déterminer un vecteur x optimal
ou qu'aucun x ne satisfait toutes les contraintes.

Valeur d' un PL = valeur maximale dans $[-\infty, +\infty]$ atteinte par la fonction à optimiser

Résoudre un programme linéaire = déterminer un vecteur x optimal
ou qu'aucun x ne satisfait toutes les contraintes.

Valeur d' un PL = valeur maximale dans $[-\infty, +\infty]$ atteinte par la fonction à optimiser

Algorithmes du simplexe, méthode de l'ellipsoide, méthodes de point intérieur, algorithmes primal-dual, méthodes par échantillonnage, ...

Résoudre un programme linéaire = déterminer un vecteur x optimal
ou qu'aucun x ne satisfait toutes les contraintes.

Valeur d' un PL = valeur maximale dans $[-\infty, +\infty]$ atteinte par la fonction à optimiser

Algorithmes du simplexe, méthode de l'ellipsoide, méthodes de point intérieur, algorithmes primal-dual, méthodes par échantillonnage, ...

On sait résoudre les programmes linéaires efficacement

en pratique : algorithmes du simplexe, implantation efficaces, ...
plusieurs milliers de variables et de contraintes.

Résoudre un programme linéaire $=$ déterminer un vecteur x optimal
ou qu'aucun x ne satisfait toutes les contraintes.

Valeur d' un PL $=$ valeur maximale dans $[-\infty, +\infty]$ atteinte par la fonction à optimiser

Algorithmes du simplexe, méthode de l'ellipsoide, méthodes de point intérieur, algorithmes primal-dual, méthodes par échantillonnage, ...

On sait résoudre les programmes linéaires efficacement

en pratique : algorithmes du simplexe, implantation efficaces, ...
plusieurs milliers de variables et de contraintes.

en théorie : algorithmes polynomiaux en la représentation du PL.
(On cherche encore un algorithme polynomial en n et d...)

Résoudre un programme linéaire $=$ déterminer un vecteur x optimal
ou qu'aucun x ne satisfait toutes les contraintes.

Valeur d' un PL $=$ valeur maximale dans $[-\infty, +\infty]$ atteinte par la fonction à optimiser

Algorithmes du simplexe, méthode de l'ellipsoide, méthodes de point intérieur, algorithmes primal-dual, méthodes par échantillonnage, ...

On sait résoudre les programmes linéaires efficacement

en pratique : algorithmes du simplexe, implantation efficaces, ...
plusieurs milliers de variables et de contraintes.

en théorie : algorithmes polynomiaux en la représentation du PL.
(On cherche encore un algorithme polynomial en n et d...)

Réduire une question à un (ou plusieurs) PL est une bonne nouvelle !

Exemple 1 : optimisation logistique

Une pâtisserie industrielle possède deux sites de production, à Quimper et à Vannes. Elle expédie sa production vers Rouen, Paris et Bordeau. La capacité maximale de production de Quimper est de 350 caisses/semaine et celle de Vannes est de 650 caisses par semaine. La demande à satisfaire à chaque destination est de 300 caisses par semaine. Les quantités de CO_2 émises pour transporter une caisse d'un site de production vers un site de consommation sont :

	Paris	Rouen	Bordeau
Quimper	25	17	18
Vannes	25	18	14

On cherche à déterminer le plan de production et de transport qui satisfait les demandes en dégageant le moins de CO_2 possible.

Exemple 1 : optimisation logistique

Une pâtisserie industrielle possède deux sites de production, à Quimper et à Vannes. Elle expédie sa production vers Rouen, Paris et Bordeau. La capacité maximale de production de Quimper est de 350 caisses/semaine et celle de Vannes est de 650 caisses par semaine. La demande à satisfaire à chaque destination est de 300 caisses par semaine. Les quantités de CO_2 émises pour transporter une caisse d'un site de production vers un site de consommation sont :

	Paris	Rouen	Bordeau
Quimper	25	17	18
Vannes	25	18	14

On cherche à déterminer le plan de production et de transport qui satisfait les demandes en dégageant le moins de CO_2 possible.

$$\min \quad 25x_{PQ} + 25x_{PV} + 17x_{RQ} + 18x_{RV} + 18x_{BQ} + 14x_{BV}$$

$$\text{t.q.} \quad \begin{array}{ll} x_{PQ} + x_{PV} \geq 300 & x_{PQ} + x_{RQ} + x_{BQ} \leq 350 \\ x_{RQ} + x_{RV} \geq 300 & x_{PV} + x_{RV} + x_{BV} \leq 650 \\ x_{BQ} + x_{BV} \geq 300 & x_{PQ}, \ldots, x_{BV} \geq 0 \end{array}$$

Exemple 1 : optimisation logistique

Une pâtisserie industrielle possède deux sites de production, à Quimper et à Vannes. Elle expédie sa production vers Rouen, Paris et Bordeau. La capacité maximale de production de Quimper est de 350 caisses/semaine et celle de Vannes est de 650 caisses par semaine. La demande à satisfaire à chaque destination est de 300 caisses par semaine. Les quantités de CO_2 émises pour transporter une caisse d'un site de production vers un site de consommation sont :

	Paris	Rouen	Bordeau
Quimper	25	17	18
Vannes	25	18	14

On cherche à déterminer le plan de production et de transport qui satisfait les demandes en dégageant le moins de CO_2 possible.

$$\max \quad -(25x_{PQ} + 25x_{PV} + 17x_{RQ} + 18x_{RV} + 18x_{BQ} + 14x_{BV})$$

$$\text{t.q.} \quad \begin{array}{ll} x_{PQ} + x_{PV} \geq 300 & x_{PQ} + x_{RQ} + x_{BQ} \leq 350 \\ x_{RQ} + x_{RV} \geq 300 & x_{PV} + x_{RV} + x_{BV} \leq 650 \\ x_{BQ} + x_{BV} \geq 300 & x_{PQ}, \ldots, x_{BV} \geq 0 \end{array}$$

Exemple 1 : optimisation logistique

Une imprimerie fonctionne 45 heures par semaine. En une heure elle peut imprimer et découper 25 jeux de tarot, 50 jeux de 54 cartes ou 75 jeux de 32 cartes. Le marché hebdomadaire est de 500 jeux de tarot, 1000 jeux de 54 cartes et 1500 jeux de 32 cartes. Les expéditions ont lieu une fois par semaine, donc le local de stockage doit être capable de contenir la totalité de la production hebdomadaire. Il contient au plus 2000 jeux de tarot ou 4000 jeux de 54 cartes ou 7500 jeux de 32 cartes (ou toute combinaison, par exemple 1000 jeux de tarot et 2000 jeux de 54 cartes). Le profit réalisé est de 1 euro par jeu de tarot, 30 centimes par jeu de 54 cartes et 25 centime par jeu de 32 cartes. L'entreprise cherche la production qui maximise son profit...

$$\max \quad -(25x_{PQ} + 25x_{PV} + 17x_{RQ} + 18x_{RV} + 18x_{BQ} + 14x_{BV})$$

$$\text{t.q.} \quad \begin{array}{ll} x_{PQ} + x_{PV} \geq 300 & x_{PQ} + x_{RQ} + x_{BQ} \leq 350 \\ x_{RQ} + x_{RV} \geq 300 & x_{PV} + x_{RV} + x_{BV} \leq 650 \\ x_{BQ} + x_{BV} \geq 300 & x_{PQ}, \ldots, x_{BV} \geq 0 \end{array}$$

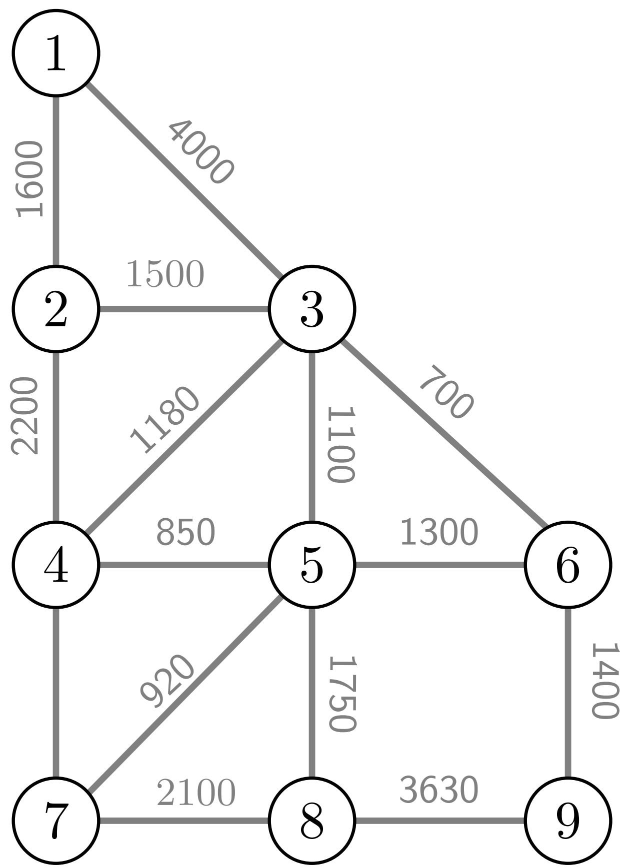
Exemple 1 : optimisation logistique

Un restaurateur dispose de 880 oursins et de 720 huîtres. Il propose à sa clientèle deux types d'assiette : assiette à 20 euros (4 oursins, 1 huître) ou assiette à 15 euros (2 oursins, 3 huître). Quelle recette maximum est envisageable par ce restaurateur ?

$$\max \quad -(25x_{PQ} + 25x_{PV} + 17x_{RQ} + 18x_{RV} + 18x_{BQ} + 14x_{BV})$$

$$\text{t.q.} \quad \begin{array}{ll} x_{PQ} + x_{PV} \geq 300 & x_{PQ} + x_{RQ} + x_{BQ} \leq 350 \\ x_{RQ} + x_{RV} \geq 300 & x_{PV} + x_{RV} + x_{BV} \leq 650 \\ x_{BQ} + x_{BV} \geq 300 & x_{PQ}, \ldots, x_{BV} \geq 0 \end{array}$$

Exemple 2 : flot dans un graphe

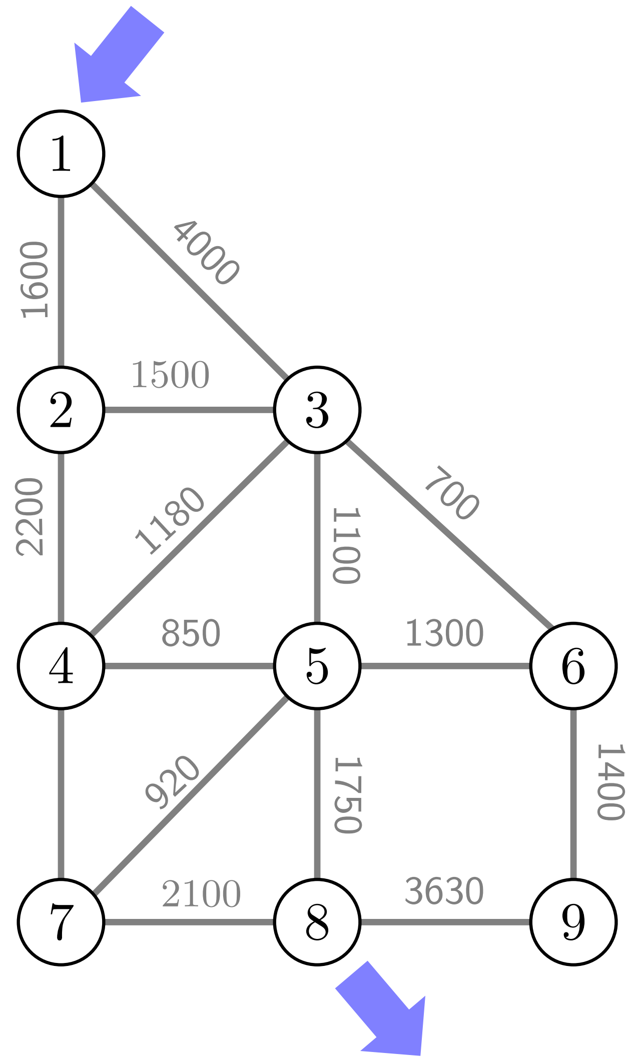


Un réseau (informatique, routier, . . .)

Chaque arête a une capacité

= flot maximal (de données, de voitures, . . .) sur cette arête par unité de temps

Exemple 2 : flot dans un graphe



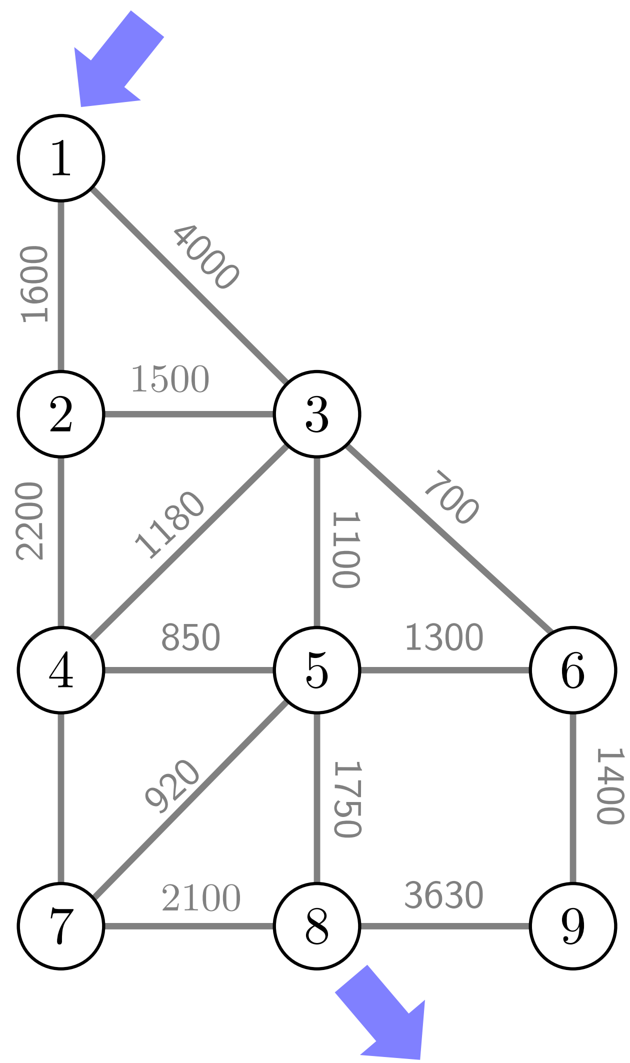
Un réseau (informatique, routier, ...)

Chaque arête a une capacité

= flot maximal (de données, de voitures, ...) sur cette arête par unité de temps

Le flot maximum possible entre deux sommets donné est donné par un PL.

Exemple 2 : flot dans un graphe



Un réseau (informatique, routier, . . .)

Chaque arête a une capacité

= flot maximal (de données, de voitures, . . .) sur cette arête par unité de temps

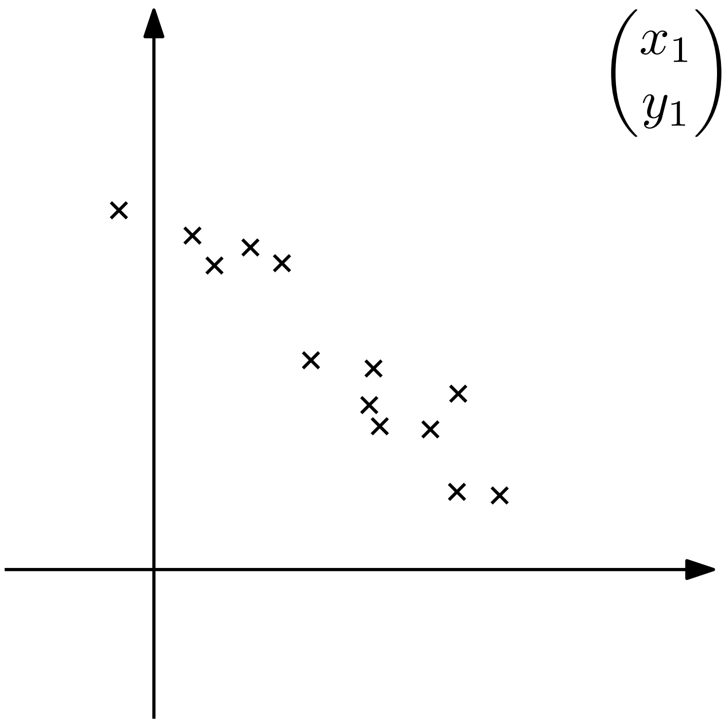
Le flot maximum possible entre deux sommets donné est donné par un PL.

une variable par arête

écrire les lois de Kirchhoff
(sauf aux deux sommets en question)

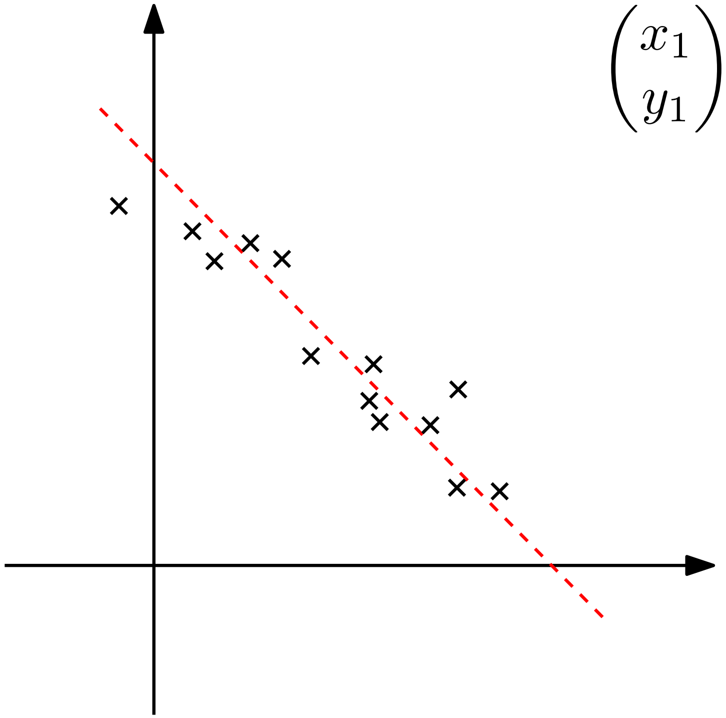
maximiser le flot en un des sommets spéciaux

Exemple 3 : régression linéaire ℓ^1



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$ des points de données dans $\mathbb{R}^2$.

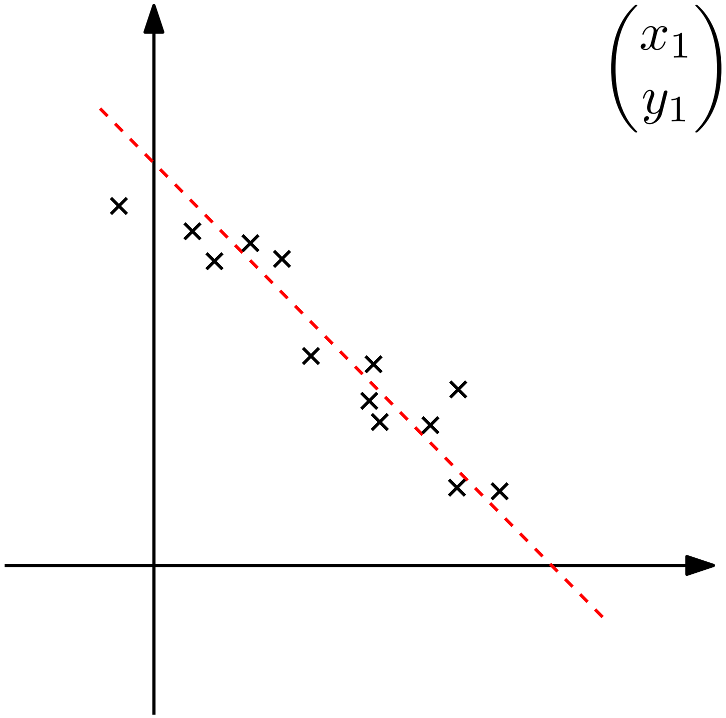
Exemple 3 : régression linéaire ℓ^1



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$ des points de données dans $\mathbb{R}^2$.

Comment trouver la droite minimisant la somme des distance ℓ^1 à ces points ?

Exemple 3 : régression linéaire ℓ^1



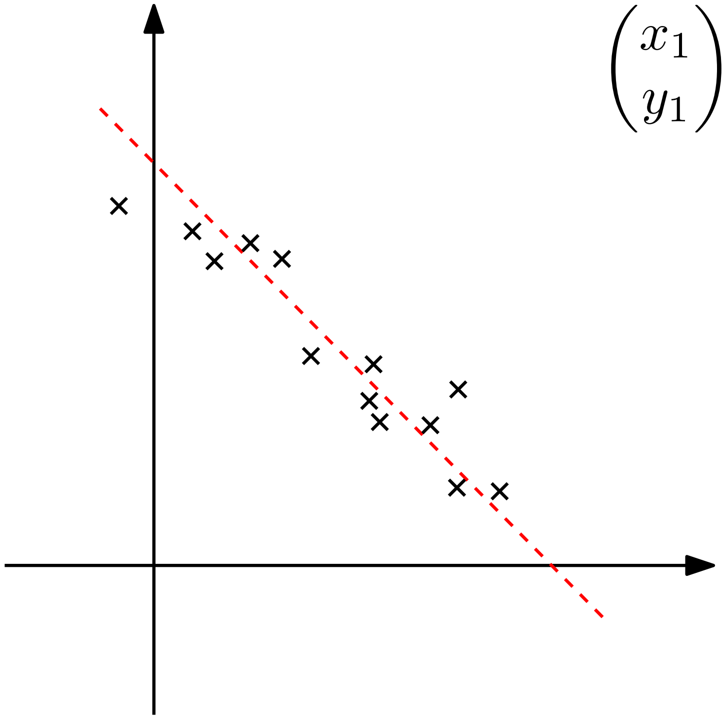
$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ des points de données dans $\mathbb{R}^2$.

Comment trouver la droite minimisant la somme des distance ℓ^1 à ces points ?

Idée : introduire deux variables a, b et chercher

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$$

Exemple 3 : régression linéaire ℓ^1



$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ des points de données dans $\mathbb{R}^2$.

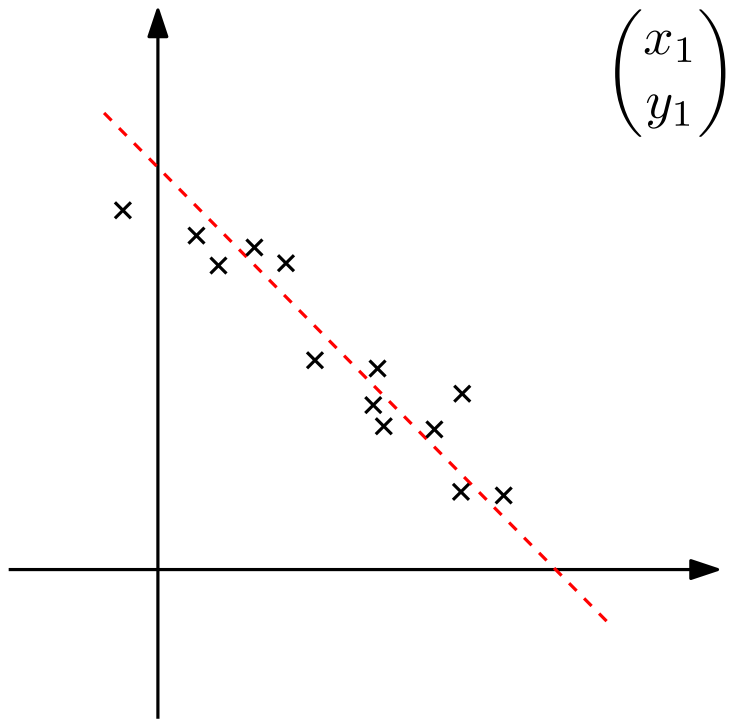
Comment trouver la droite minimisant la somme des distance ℓ^1 à ces points ?

Idée : introduire deux variables a, b et chercher

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$$

pas PL...

Exemple 3 : régression linéaire ℓ^1



$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ des points de données dans $\mathbb{R}^2$.

Comment trouver la droite minimisant la somme des distance ℓ^1 à ces points ?

Idée : introduire deux variables a, b et chercher

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$$

pas PL...

Meilleure idée : introduire 2+n variables $a, b, e_1, e_2, \dots, e_n$ et chercher

$$\begin{aligned} \min \quad & e_1 + e_2 + \ldots + e_n \\ \text{t.q.} \quad & e_i \geq ax_i + b - y_i \\ & e_i \geq -(ax_i + b - y_i) \end{aligned} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

Méthode du simplexe

Intuition géométrique

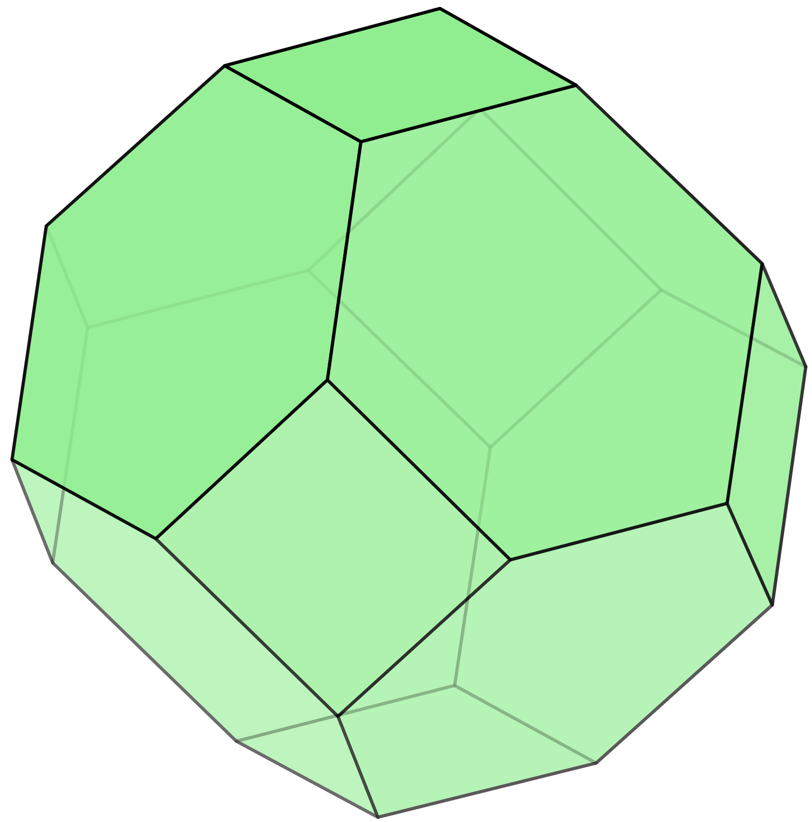
(P) $\quad \max c^T x$

$\quad\quad$ t.q. $Ax \leq b$

$Ax \leq b =$ intersection de demi-espaces de $\mathbb{R}^d$

$=$ polyèdre convexe (évent. vide)

$x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$



(P) $\max c^T x$

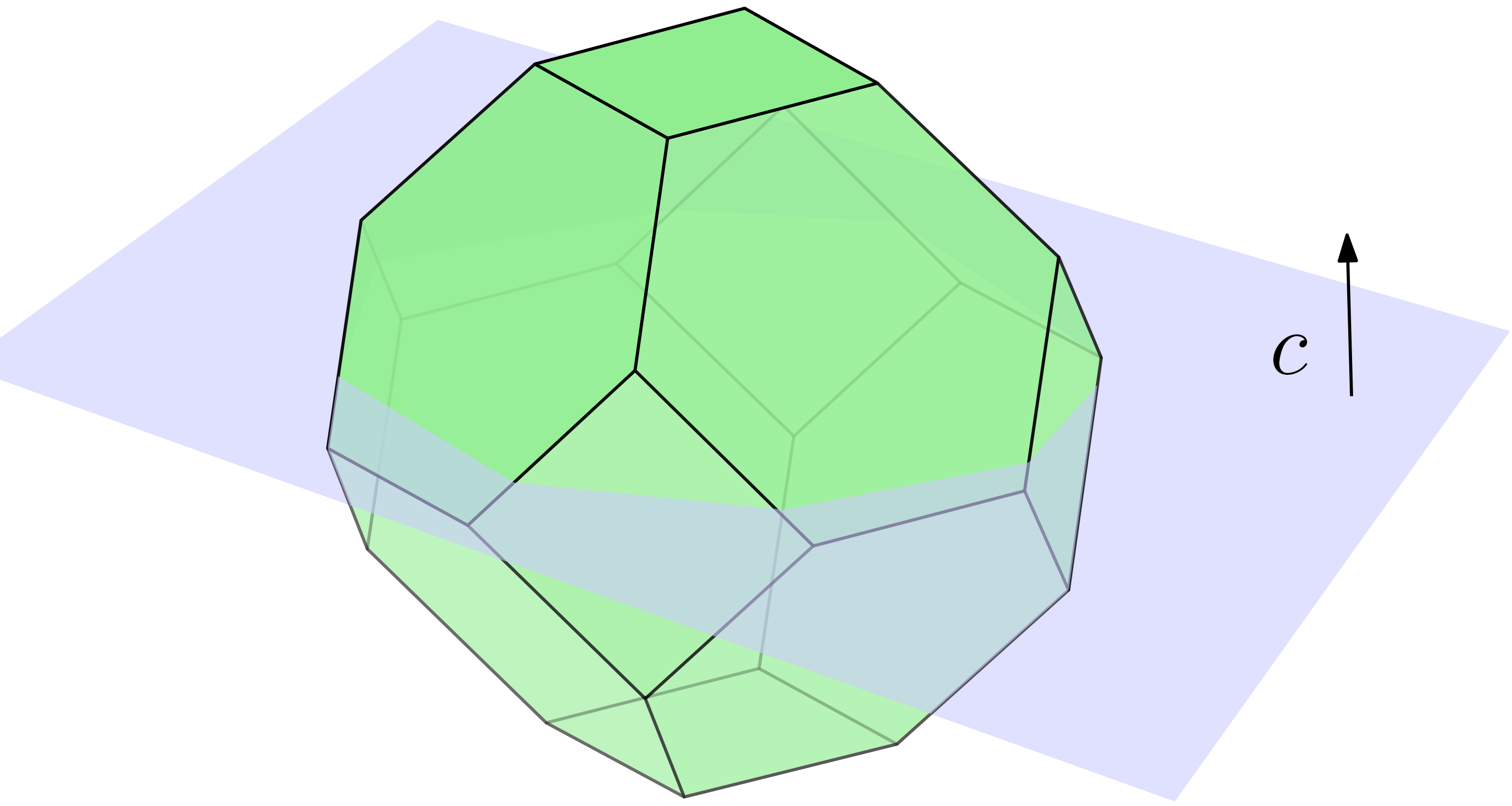
t.q. $Ax \leq b$

$Ax \leq b =$ intersection de demi-espaces de $\mathbb{R}^d$

$=$ polyèdre convexe (évent. vide)

$x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Les lignes de niveau de $c^T x$ sont des hyperplans



(P) $\quad \max c^T x$

$\quad\quad$ t.q. $Ax \le b$

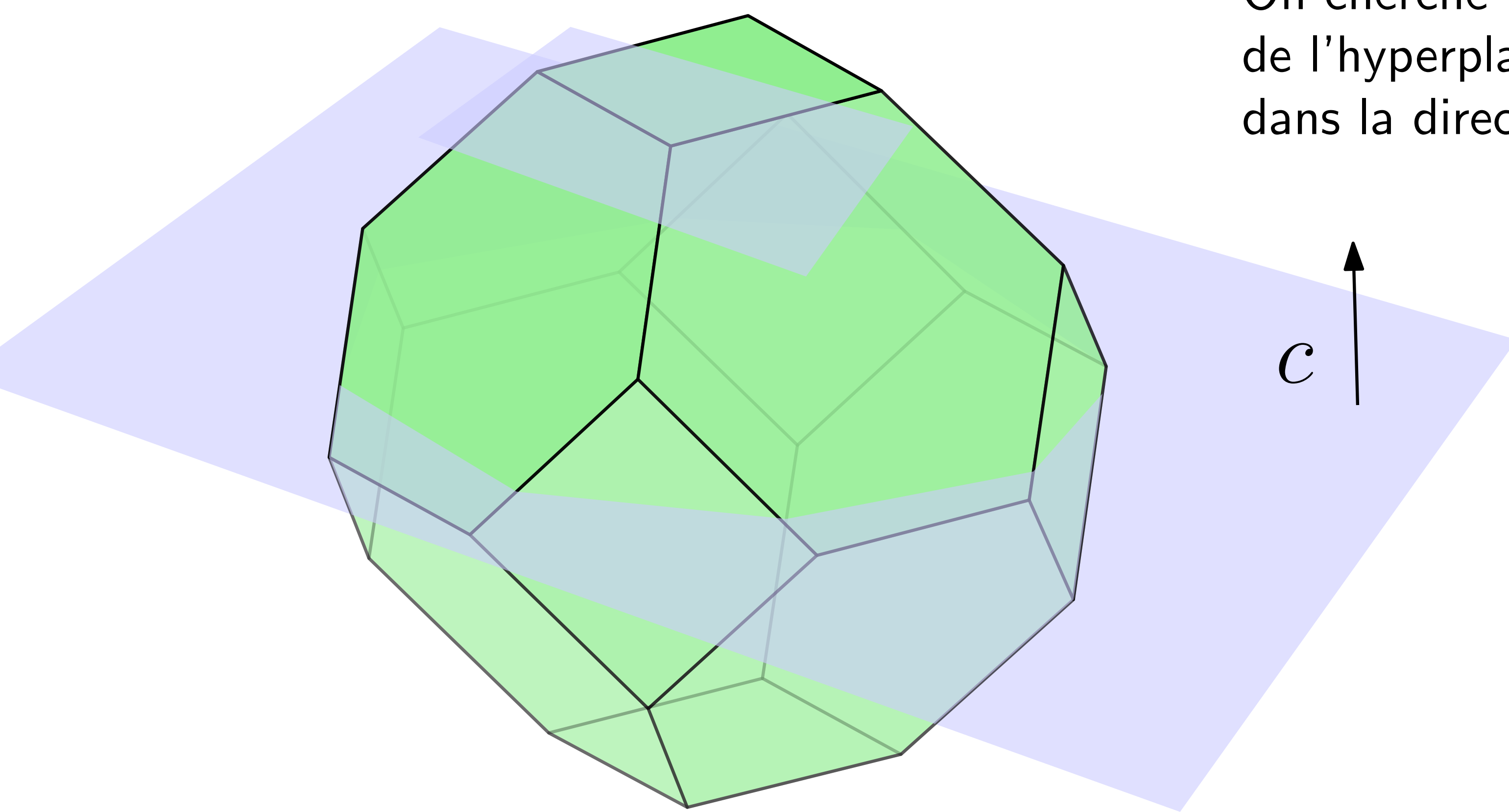
$x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$

$Ax \le b =$ intersection de demi-espaces de $\mathbb{R}^d$

$=$ polyèdre convexe (évent. vide)

Les lignes de niveau de $c^T x$ sont des hyperplans

On cherche un point d'appui
de l'hyperplan support à $Ax \le b$
dans la direction c.

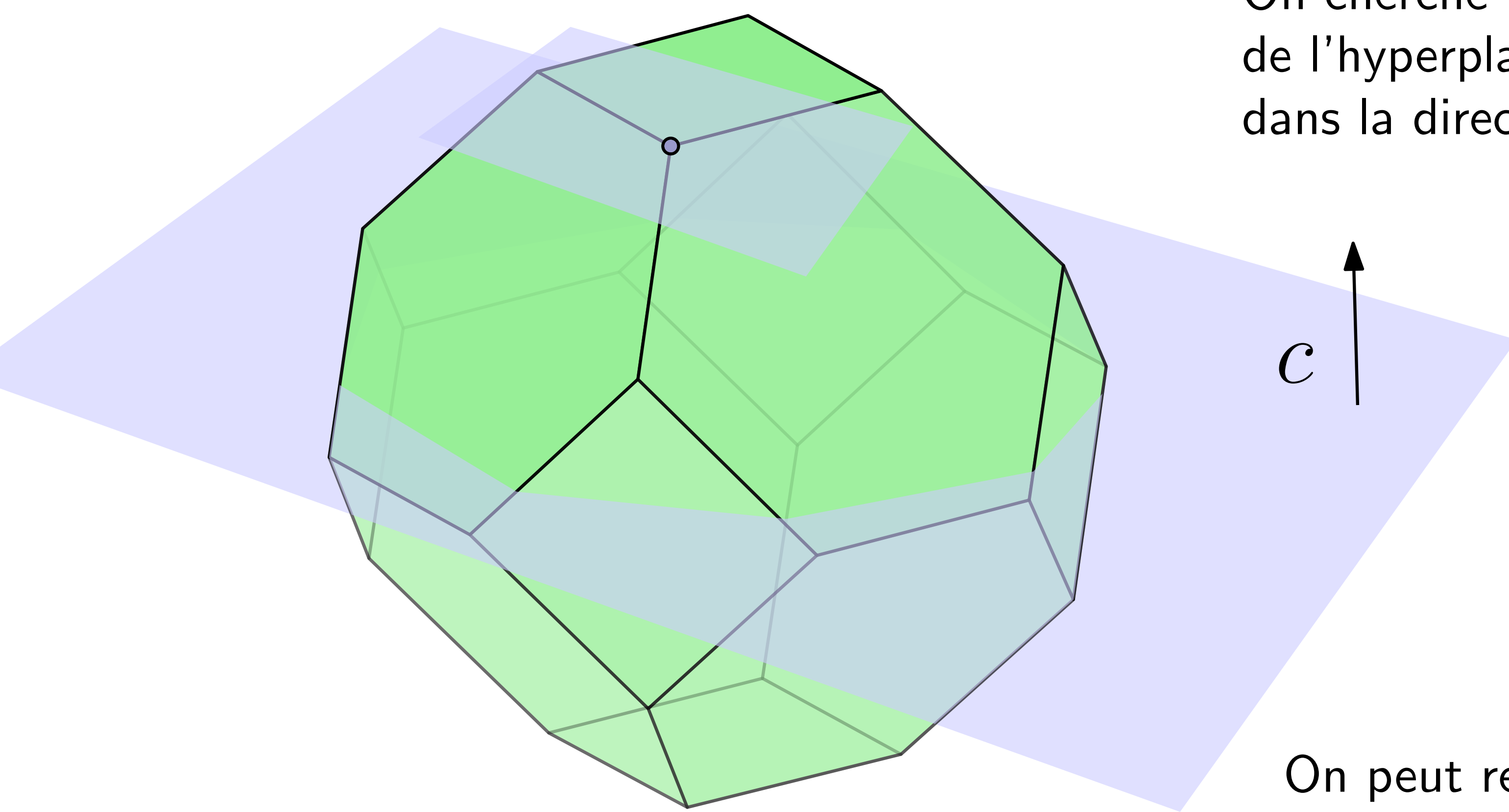


(P) $\max c^T x$
t.q. $Ax \le b$

$Ax \le b =$ intersection de demi-espaces de $\mathbb{R}^d$
$=$ polyèdre convexe (évent. vide)

$x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Les lignes de niveau de $c^T x$ sont des hyperplans



On cherche un point d'appui de l'hyperplan support à $Ax \le b$ dans la direction c.

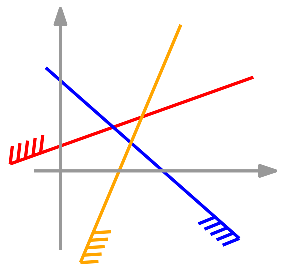
On peut restreindre la recherche aux sommets de $Ax \le b$.

$\max c^T x$
t.q. $Ax \leq b$ n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \leq b$ est vide ou $c^T x$ est non bornée sur $Ax \leq b$

$\max c^T x$
t.q. $Ax \leq b$ n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \leq b$ est vide



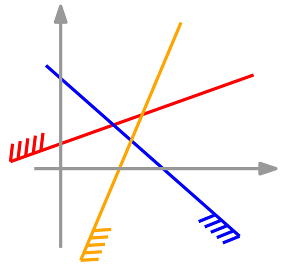
ou

$c^T x$ est non bornée sur $Ax \leq b$

$$\max c^T x \quad \text{t.q. } Ax \le b$$

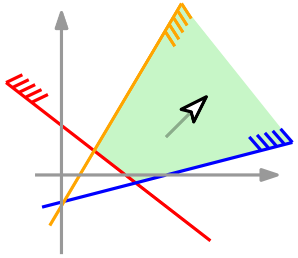
n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \le b$ est vide



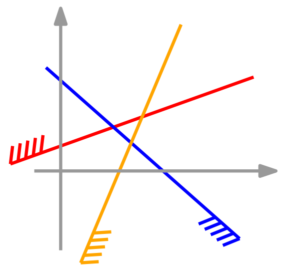
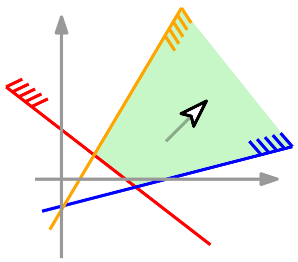
ou

$c^T x$ est non bornée sur $Ax \le b$



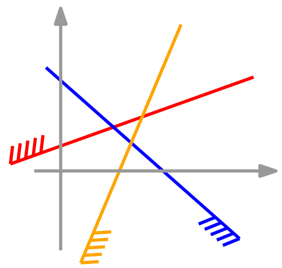
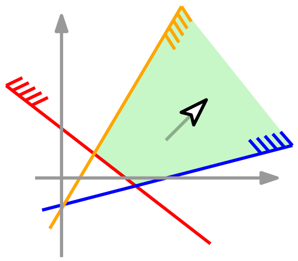
$\max c^T x$

t.q. $Ax \leq b$ n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \leq b$ est vide  ou $c^T x$ est non bornée sur $Ax \leq b$ 

Dans les autres cas, le problème est fini : énumérer les sommets du polyhèdre

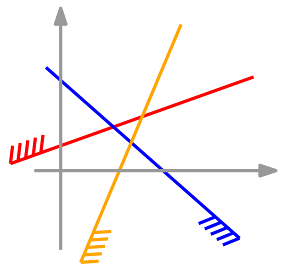
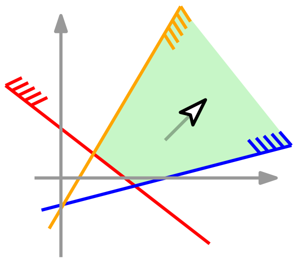
$\max c^T x$
t.q. $Ax \leq b$ n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \leq b$ est vide  ou $c^T x$ est non bornée sur $Ax \leq b$ 

Dans les autres cas, le problème est fini : énumérer les sommets du polyhèdre

Intersections bornées
d'un nombre fini de
demi-espaces
(H-représentation)
$=$
Enveloppes convexes
d'ensembles finis de
points
(V-representation)
$=$
polytopes convexes

$\max c^T x$
t.q. $Ax \leq b$ n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \leq b$ est vide  ou $c^T x$ est non bornée sur $Ax \leq b$ 

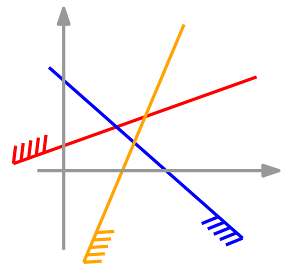
Dans les autres cas, le problème est fini : énumérer les sommets du polyhèdre

Intersections bornées
d'un nombre fini de
demi-espaces
(H-représentation)
$=$
Enveloppes convexes
d'ensembles finis de
points
(V-representation)
$=$
polytopes convexes

Upper bound theorem : un polytope à n sommets dans $\mathbb{R}^d$ a au plus $\binom{n-\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor} + \binom{n-\lfloor\frac{d+2}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor}$ facettes.

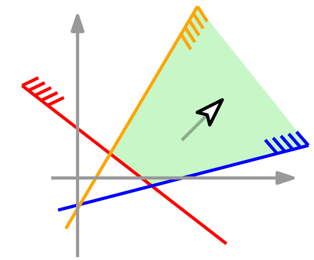
$\max c^T x$
t.q. $Ax \leq b$ n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \leq b$ est vide



ou

$c^T x$ est non bornée sur $Ax \leq b$

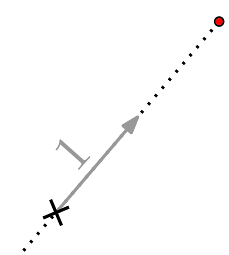


Dans les autres cas, le problème est fini : énumérer les sommets du polyhèdre

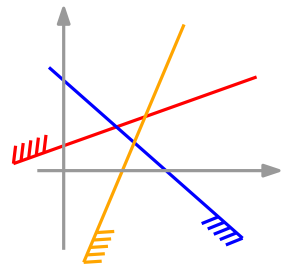
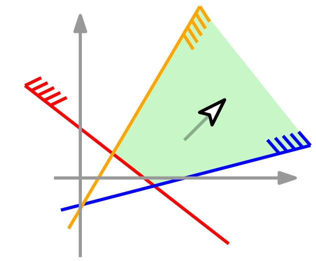
Intersections bornées d'un nombre fini de demi-espaces (H-représentation)
$=$
Enveloppes convexes d'ensembles finis de points (V-representation)
$=$
polytopes convexes

Upper bound theorem : un polytope à n sommets dans $\mathbb{R}^d$ a au plus $\binom{n-\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor} + \binom{n-\lfloor\frac{d+2}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor}$ facettes.

Si P est un polytope contenant l'origine,
$P^\star = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \forall x \in P \; y \cdot x \leq 1\}$ est son polaire.



$$\begin{aligned}&\max c^T x\\ &\text{t.q. } Ax \le b\end{aligned}$$ n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \le b$ est vide  ou $c^T x$ est non bornée sur $Ax \le b$ 

Dans les autres cas, le problème est fini : énumérer les sommets du polyhèdre

Intersections bornées d'un nombre fini de demi-espaces (H-représentation)

$=$

Enveloppes convexes d'ensembles finis de points (V-representation)

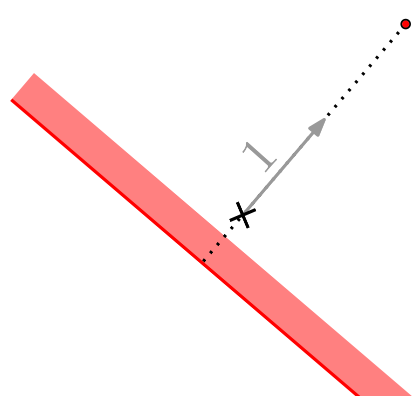
$=$

polytopes convexes

Upper bound theorem : un polytope à n sommets dans $\mathbb{R}^d$ a au plus $\binom{n-\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}+\binom{n-\lfloor\frac{d+2}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor}$ facettes.

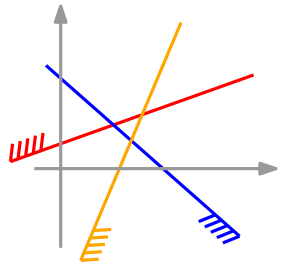
Si P est un polytope contenant l'origine,

$P^\star = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \forall x \in P \; y \cdot x \le 1\}$ est son polaire.



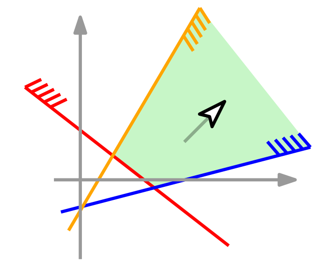
$\max c^T x$
t.q. $Ax \leq b$ n'a pas de solution si et seulement si

$Ax \leq b$ est vide



ou

$c^T x$ est non bornée sur $Ax \leq b$



Dans les autres cas, le problème est fini : énumérer les sommets du polyhèdre

Intersections bornées d'un nombre fini de demi-espaces (H-représentation)

$=$

Enveloppes convexes d'ensembles finis de points (V-representation)

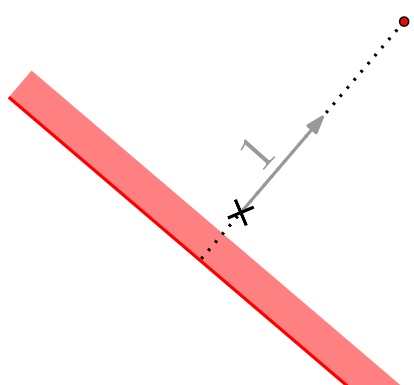
$=$

polytopes convexes

Upper bound theorem : un polytope à n sommets dans $\mathbb{R}^d$ a au plus $\binom{n-\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor} + \binom{n-\lfloor\frac{d+2}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor}$ facettes.

Si P est un polytope contenant l'origine,

$P^\star = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \forall x \in P \; y \cdot x \leq 1\}$ est son polaire.

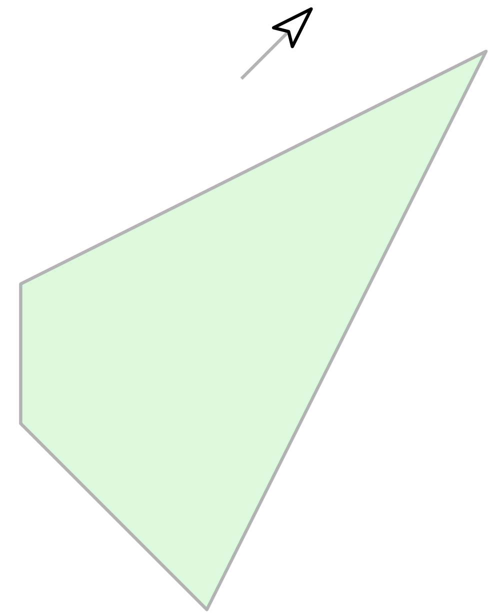


Bijection entre

les faces de P de dimension k, et

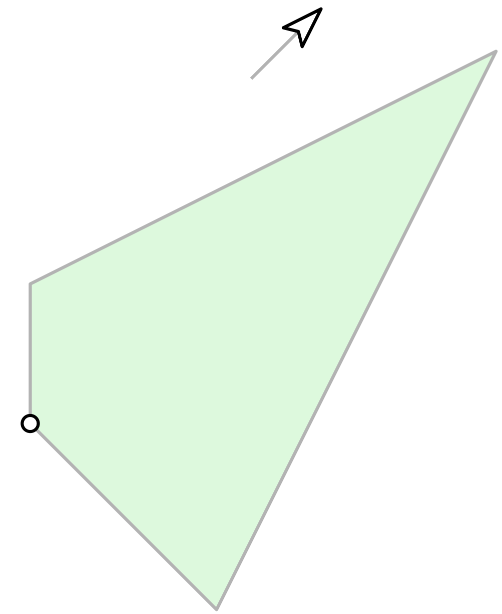
les faces de $P^\star$ de dimension $d-1-k$

Si on sait...



Si on sait...

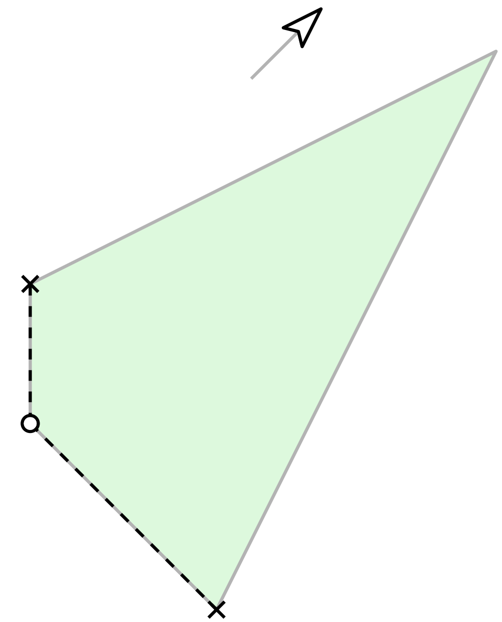
trouver un premier sommet,



Si on sait...

trouver un premier sommet,

étant donné un sommet, construire ses voisins,

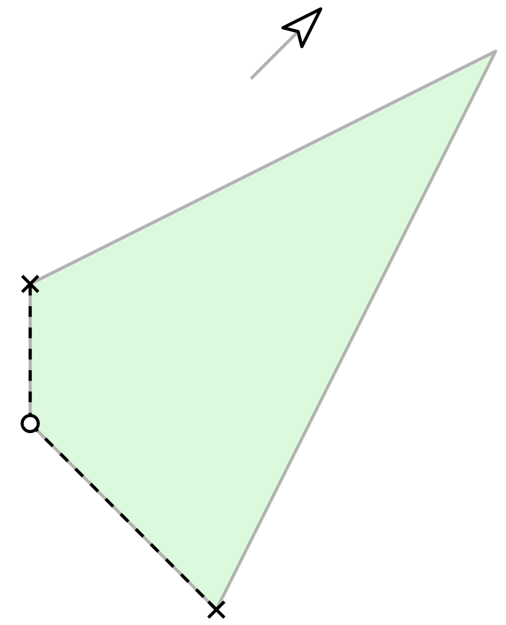


Si on sait...

trouver un premier sommet,

étant donné un sommet, construire ses voisins,

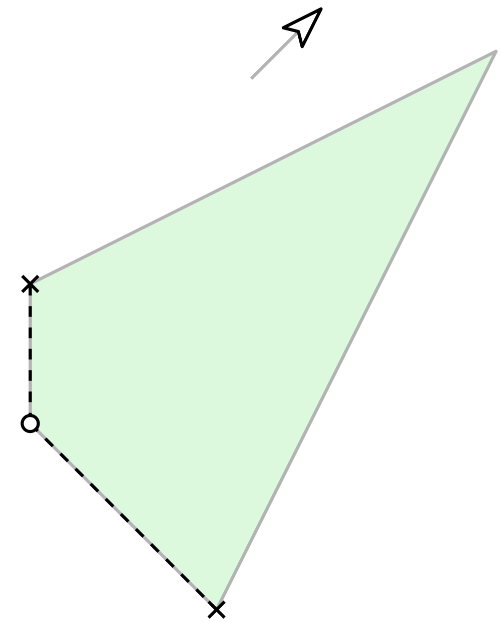
marcher en optimisant localement conduit à l'optimum global.



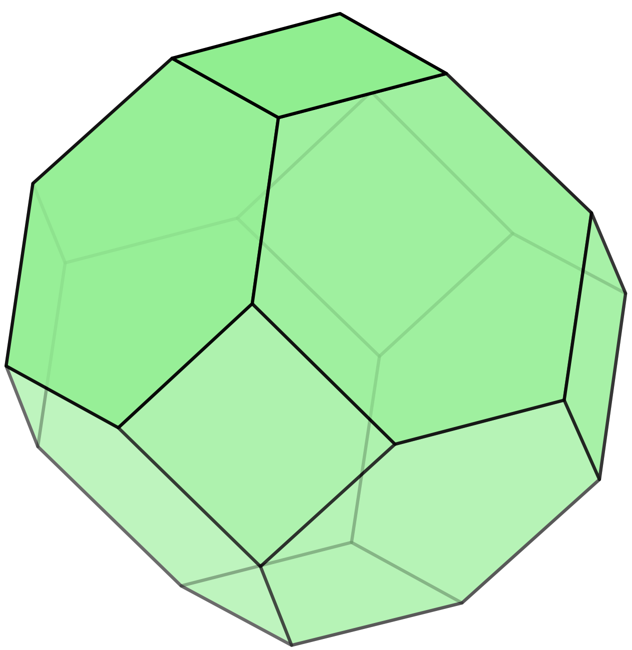
Si on sait...

- trouver un premier sommet,
- étant donné un sommet, construire ses voisins,

marcher en optimisant localement conduit à l'optimum global.



La méthode du simplexe marche ainsi, mais manipule les sommets symboliquement.

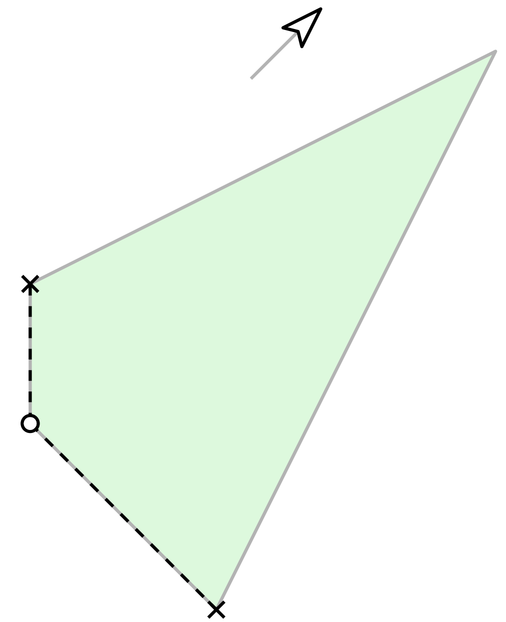


Si on sait...

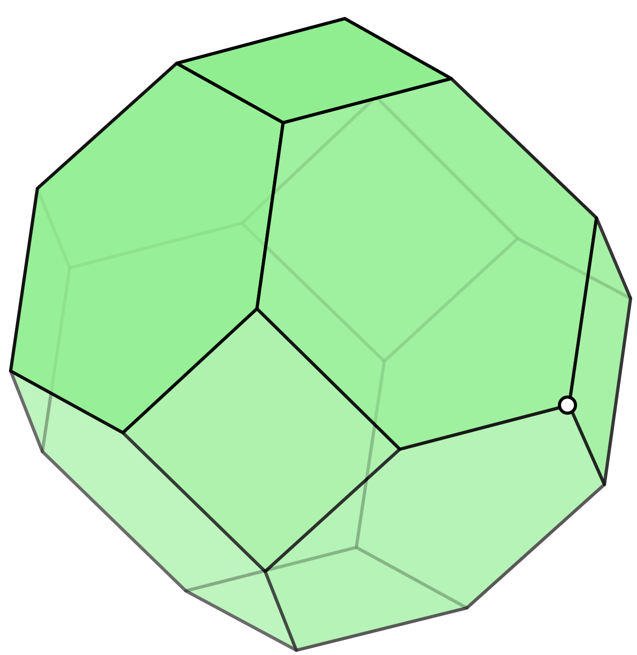
trouver un premier sommet,

étant donné un sommet, construire ses voisins,

marcher en optimisant localement conduit à l'optimum global.



La méthode du simplexe marche ainsi, mais manipule les sommets symboliquement.

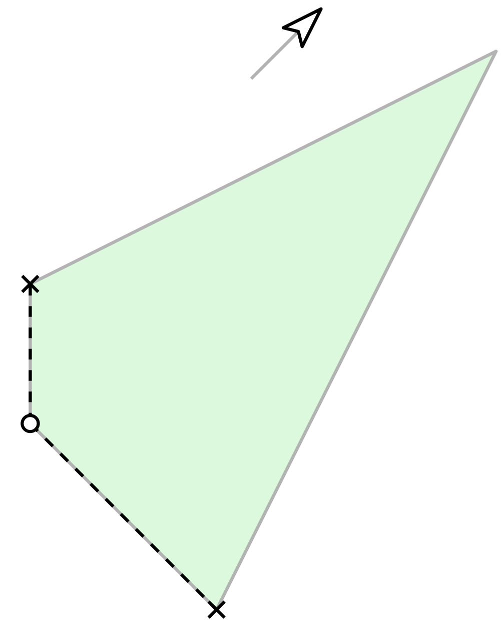


Si on sait...

trouver un premier sommet,

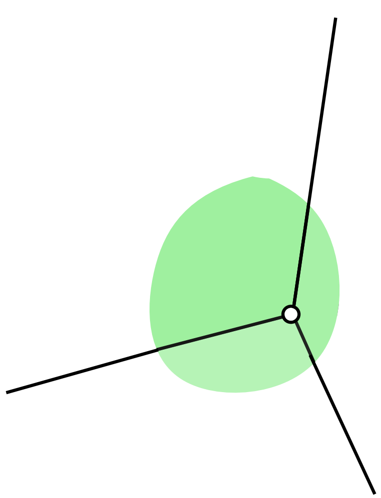
étant donné un sommet, construire ses voisins,

marcher en optimisant localement conduit à l'optimum global.



La méthode du simplexe marche ainsi, mais manipule les sommets symboliquement.

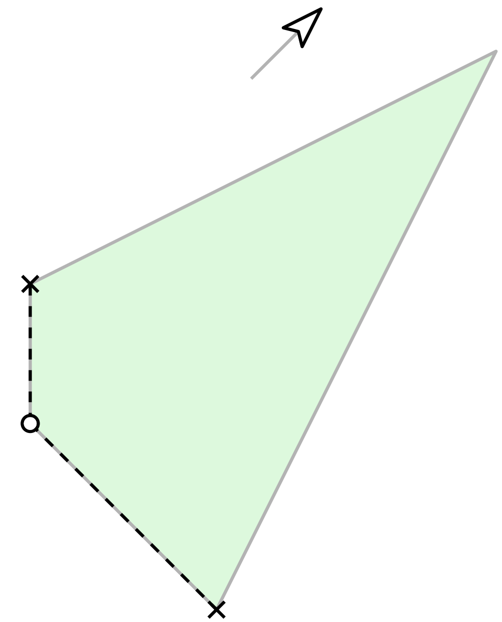
sommet $\simeq d$ contraintes saturées



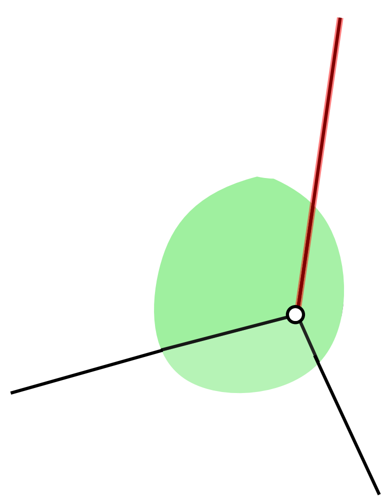
Si on sait...

trouver un premier sommet,
étant donné un sommet, construire ses voisins,

marcher en optimisant localement conduit à l'optimum global.



La méthode du simplexe marche ainsi, mais manipule les sommets symboliquement.



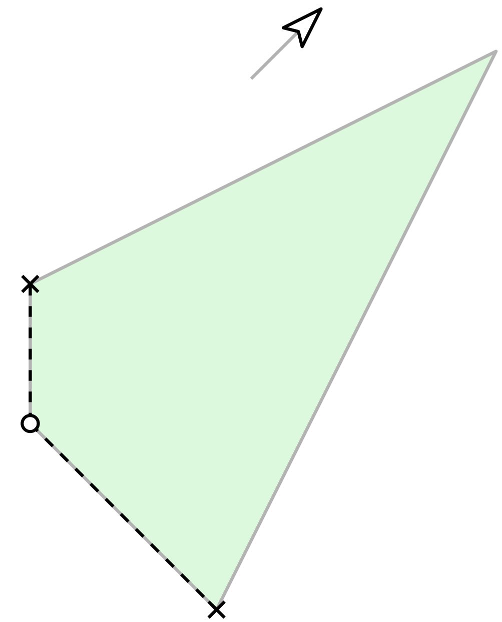
sommet $\simeq d$ contraintes saturées

relaxer une contrainte
donne un degré de liberté
$\simeq$ une arête incidente au sommet.

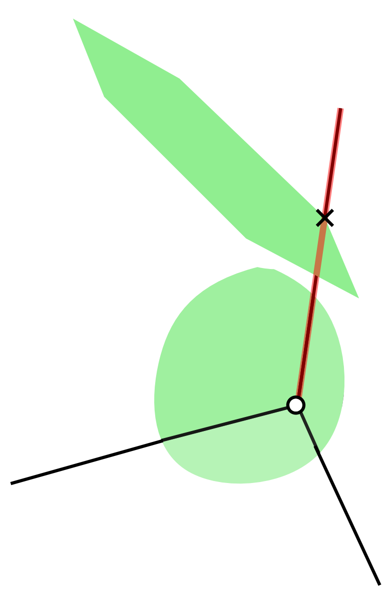
Si on sait...

trouver un premier sommet,
étant donné un sommet, construire ses voisins,

marcher en optimisant localement conduit à l'optimum global.



La méthode du simplexe marche ainsi, mais manipule les sommets symboliquement.



sommet $\simeq d$ contraintes saturées

relaxer une contrainte
donne un degré de liberté
$\simeq$ une arête incidente au sommet.

Quand on s'éloigne sur cette arête,
on trouve le voisin quand
une première nouvelle contrainte sature.

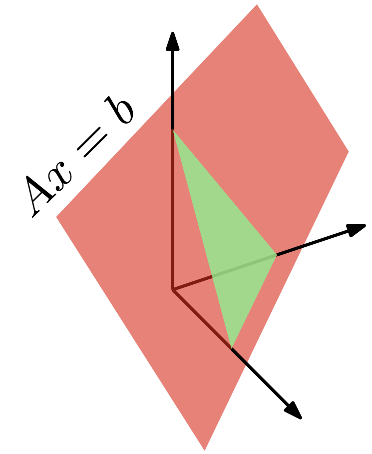
Méthode du simplexe

Présentation algébrique

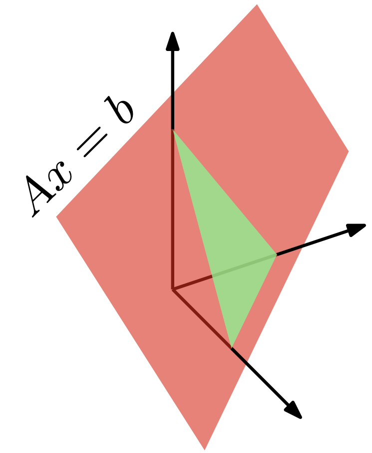
Tout PL peut s'écrire sous forme équationnelle :

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\max c^T x \\ \text{t.q. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(A : n lignes et d colonnes)



Tout PL peut s'écrire sous forme équationnelle :



$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned} &\max c^T x \\ \text{t.q. } &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

(A : n lignes et d colonnes)

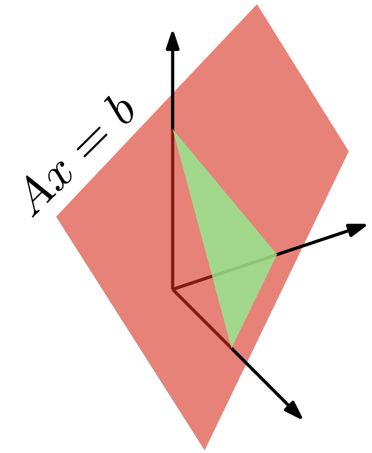
Idée : introduire des variables d'écart.

$$3x_1 - x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + e & = & 2 \\ e & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Tout PL peut s'écrire sous forme équationnelle :

(P) $$\begin{aligned} &\max c^T x \\ \text{t.q. } &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

(A : n lignes et d colonnes)



$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

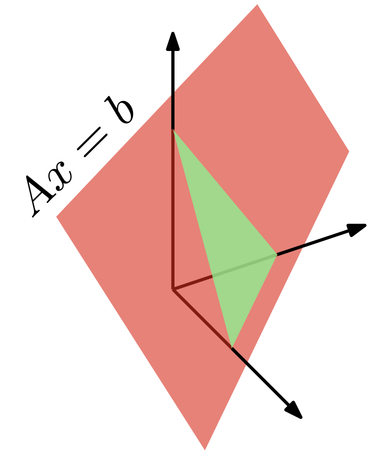
Idée : introduire des variables d'écart.

$$3x_1 - x_2 \leq 2 \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + e & = & 2 \\ e & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Tout PL peut s'écrire sous forme équationnelle :

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\max c^T x \\ \text{t.q. } &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

(A : n lignes et d colonnes)



$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 - e_1 = 2 \end{aligned}$$

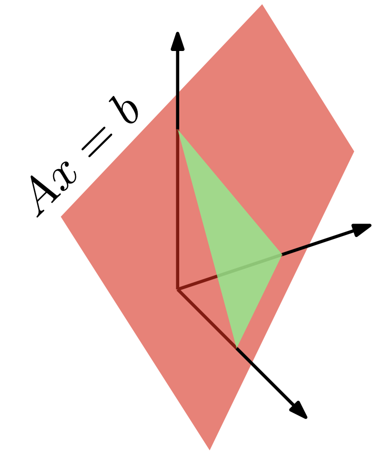
Idée : introduire des variables d'écart.

$$3x_1 - x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + e & = & 2 \\ e & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Tout PL peut s'écrire sous forme équationnelle :

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\max c^T x \\ \text{t.q. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(A : n lignes et d colonnes)



$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 - e_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + e_2 = 0 \end{aligned}$$

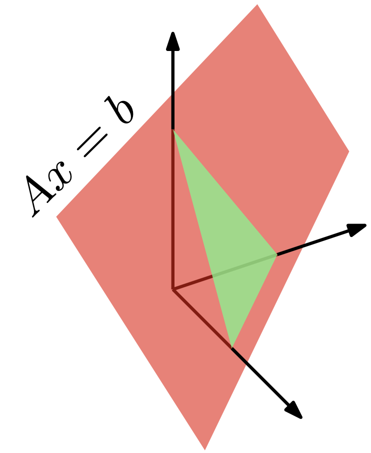
Idée : introduire des variables d'écart.

$$3x_1 - x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + e & = & 2 \\ e & \geq & 0 \end{cases}$$

Tout PL peut s'écrire sous forme équationnelle :

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\max c^T x \\ \text{t.q. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(A : n lignes et d colonnes)



$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 - e_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + e_2 = 0 \\ & x_2 - 2x_1 + e_3 = -4 \end{aligned}$$

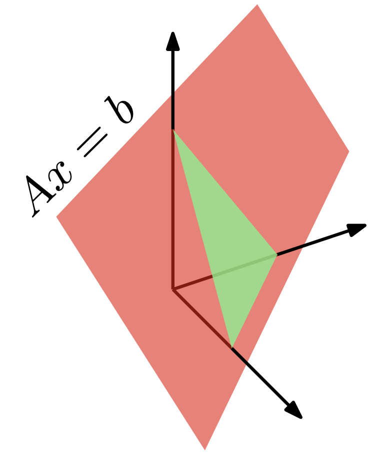
Idée : introduire des variables d'écart.

$$3x_1 - x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + e & = & 2 \\ e & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Tout PL peut s'écrire sous forme équationnelle :

$$
\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \max c^T x & \\ \text{t.q. } Ax = b & \\ \quad\;\; x \geq 0 & \end{array}
$$

(A : n lignes et d colonnes)



$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\
& 2x_2 - x_1 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \geq 0 \\
& x_2 - 2x_1 \geq -4
\end{array}
$$

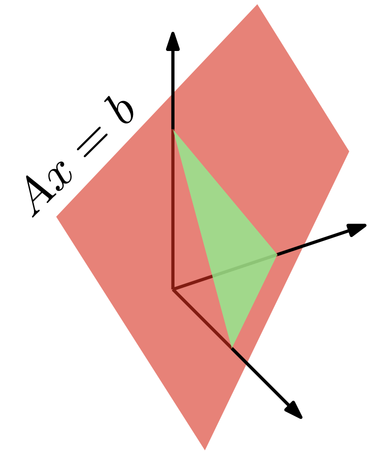
$$\downarrow$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\
& 2x_2 - x_1 - e_1 = 2 \\
& x_1 + x_2 + e_2 = 0 \\
& x_2 - 2x_1 + e_3 = -4 \\
& e_1, e_2, e_3 \geq 0
\end{array}
$$

Idée : introduire des variables d'écart.

$$
3x_1 - x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + e & = & 2 \\ e & \geq & 0 \end{array} \right.
$$

Tout PL peut s'écrire sous forme équationnelle :



$$(\text{P}) \qquad \begin{array}{l} \max c^T x \\ \text{t.q. } \; Ax = b \\ \qquad\quad x \geq 0 \end{array}$$

(A : n lignes et d colonnes)

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_2 - 2x_1 \geq -4 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & x_1 \geq 0 \\ & 2x_2 - x_1 - e_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + e_2 = 0 \\ & x_2 - 2x_1 + e_3 = -4 \\ & e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array}$$

Idée : introduire des variables d'écart.

$$3x_1 - x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + e & = & 2 \\ e & \geq & 0 \end{array} \right.$$

On suppose les lignes de A linéairement indépendantes.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.

Preuve. *Soit* $b = Ax$ *avec* $x \geq 0$ *une combinaison positive.*

Restreignons A *au support de* x *et supposons ce support de taille* $> \operatorname{rk}(A)$*.*

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.

Preuve. *Soit $b = Ax$ avec $x \geq 0$ une combinaison positive.*

Restreignons A au support de x et supposons ce support de taille $> \operatorname{rk}(A)$.

Alors il existe $z \in \ker A$ non trivial et $b = A(x + tz)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Le support de $x + tz$ est contenu dans le support de x.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.

Preuve. *Soit $b = Ax$ avec $x \geq 0$ une combinaison positive.*

Restreignons A au support de x et supposons ce support de taille $> \operatorname{rk}(A)$.

Alors il existe $z \in \ker A$ non trivial et $b = A(x + tz)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

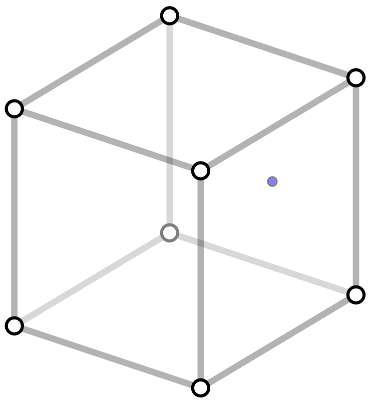
Le support de $x + tz$ est contenu dans le support de x.

Faire varier t permet de réduire le support. $\square$

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.



Preuve. *Soit $b = Ax$ avec $x \geq 0$ une combinaison positive.*

Restreignons A au support de x et supposons ce support de taille $> \operatorname{rk}(A)$.

Alors il existe $z \in \ker A$ non trivial et $b = A(x + tz)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

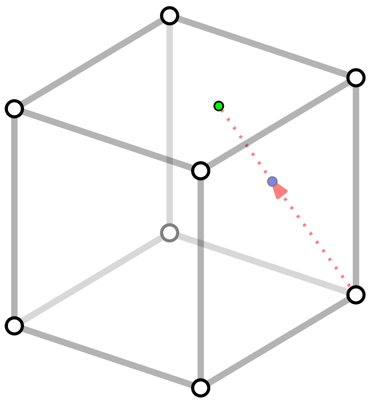
Le support de $x + tz$ est contenu dans le support de x.

Faire varier t permet de réduire le support. $\square$

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.



Preuve. *Soit $b = Ax$ avec $x \geq 0$ une combinaison positive.*

Restreignons A au support de x et supposons ce support de taille $> \operatorname{rk}(A)$.

Alors il existe $z \in \ker A$ non trivial et $b = A(x + tz)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

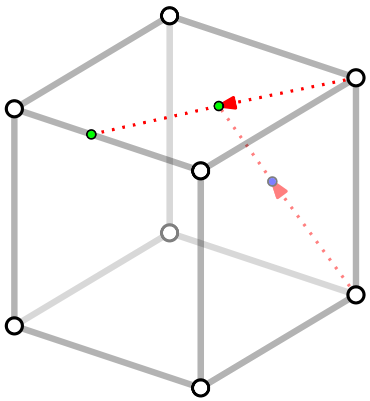
Le support de $x + tz$ est contenu dans le support de x.

Faire varier t permet de réduire le support. $\square$

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.



Preuve. *Soit $b = Ax$ avec $x \geq 0$ une combinaison positive.*

Restreignons A au support de x et supposons ce support de taille $> \operatorname{rk}(A)$.

Alors il existe $z \in \ker A$ non trivial et $b = A(x + tz)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

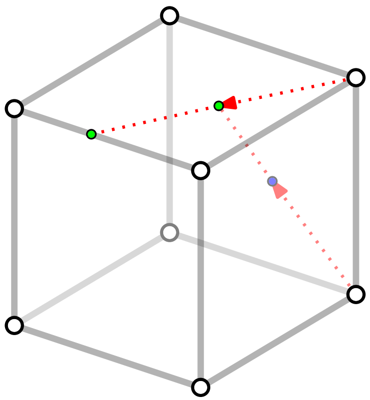
Le support de $x + tz$ est contenu dans le support de x.

Faire varier t permet de réduire le support. $\square$

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.



Preuve. *Soit $b = Ax$ avec $x \geq 0$ une combinaison positive.*

Restreignons A au support de x et supposons ce support de taille $> \operatorname{rk}(A)$.

Alors il existe $z \in \ker A$ non trivial et $b = A(x + tz)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Le support de $x + tz$ est contenu dans le support de x.

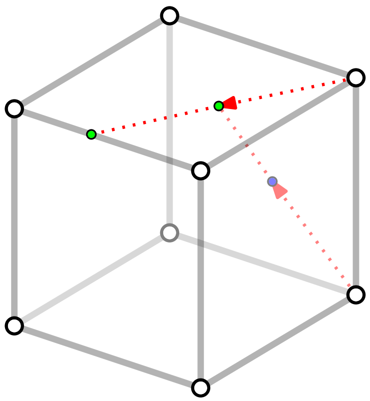
Faire varier t permet de réduire le support. $\square$

La méthode du simplexe utilise les supports pour représenter les sommets et marcher.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.



Preuve. *Soit $b = Ax$ avec $x \geq 0$ une combinaison positive.*

Restreignons A au support de x et supposons ce support de taille $> \operatorname{rk}(A)$.

Alors il existe $z \in \ker A$ non trivial et $b = A(x + tz)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Le support de $x + tz$ est contenu dans le support de x.

Faire varier t permet de réduire le support. $\square$

La méthode du simplexe utilise les supports pour représenter les sommets et marcher.

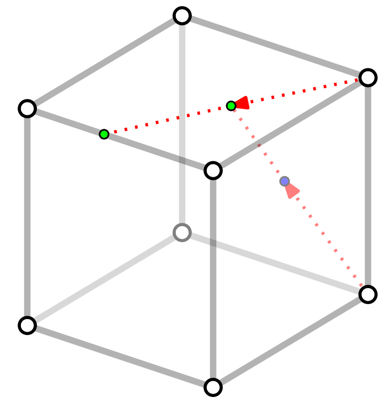
Regardons cela sur un exemple...

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Les sommets de $Ax = b, x \geq 0$ sont les solutions faisables de support minimal.

Théorème (Carathéodory). Toute combinaison positive d'un ensemble A de vecteurs est combinaison positive d'au plus $\operatorname{rk} A$ de ces vecteurs.



Preuve. *Soit $b = Ax$ avec $x \geq 0$ une combinaison positive.*

Restreignons A au support de x et supposons ce support de taille $> \operatorname{rk}(A)$.

Alors il existe $z \in \ker A$ non trivial et $b = A(x + tz)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Le support de $x + tz$ est contenu dans le support de x.

Faire varier t permet de réduire le support. $\square$

La méthode du simplexe utilise les supports pour représenter les sommets et marcher.

Regardons cela sur un exemple...

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

On part d'une solution faisable de support minimal, e.g. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

On part d'une solution faisable de support minimal, e.g. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

On exprime objectif et variables du support
en les variables hors-support.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{|lcl|} x_3 & = & 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 2 - x_2 \\ \hline obj & = & x_1 + x_2 \end{array}$$

On part d'une solution faisable de support minimal, e.g. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

On exprime objectif et variables du support
en les variables hors-support.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} x_3 & = & 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 2 - x_2 \\ \hline obj & = & x_1 + x_2 \end{array}}$$

Augmenter x_1 ou x_2 améliore l'objectif et reste faisable !

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

On part d'une solution faisable de support minimal, e.g. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\\2\end{pmatrix}$

On exprime objectif et variables du support
en les variables hors-support.

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\\2\end{pmatrix}$ $$\boxed{\begin{array}{rcl} x_3 &=& 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 &=& 3 - x_1 \\ x_5 &=& 2 - x_2 \\ \hline obj &=& x_1 + x_2 \end{array}}$$

Augmenter x_1 ou x_2 améliore l'objectif et reste faisable !

On augmente (au choix) x_2 jusqu'à une
solution faisable de support minimal.

x_3 s'annule. pour $x_2 = 1$.

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$ $$\boxed{\begin{array}{rcl} x_2 &=& 1 + x_1 - x_3 \\ x_4 &=& 3 - x_1 \\ x_5 &=& 1 - x_1 + x_3 \\ \hline obj &=& 1 + 2x_1 - x_3 \end{array}}$$

On part d'une solution faisable de support minimal, e.g. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

On exprime objectif et variables du support en les variables hors-support.

Augmenter x_1 ou x_2 améliore l'objectif et reste faisable !

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{|rcl|} x_3 & = & 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 2 - x_2 \\ \hline obj & = & x_1 + x_2 \end{array}$$

On augmente (au choix) x_2 jusqu'à une solution faisable de support minimal.

x_3 s'annule. pour $x_2 = 1$.

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{|rcl|} x_2 & = & 1 + x_1 - x_3 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 1 - x_1 + x_3 \\ \hline obj & = & 1 + 2x_1 - x_3 \end{array}$$

On peut encore augmenter x_1...

$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{|rcl|} x_2 & = & 2 - x_5 \\ x_4 & = & 2 + x_5 - x_3 \\ x_1 & = & 1 - x_5 + x_3 \\ \hline obj & = & 3 - 2x_5 + x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

On part d'une solution faisable de support minimal, e.g. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

On exprime objectif et variables du support en les variables hors-support.

$$\begin{array}{lcl} x_3 & = & 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 2 - x_2 \\ \hline obj & = & x_1 + x_2 \end{array}$$

Augmenter x_1 ou x_2 améliore l'objectif et reste faisable !

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

On augmente (au choix) x_2 jusqu'à une solution faisable de support minimal.

x_3 s'annule. pour $x_2 = 1$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcl} x_2 & = & 1 + x_1 - x_3 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 1 - x_1 + x_3 \\ \hline obj & = & 1 + 2x_1 - x_3 \end{array}$$

On peut encore augmenter x_1...

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcl} x_2 & = & 2 - x_5 \\ x_4 & = & 2 + x_5 - x_3 \\ x_1 & = & 1 - x_5 + x_3 \\ \hline obj & = & 3 - 2x_5 + x_3 \end{array}$$

puis x_3...

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcl} x_2 & = & 2 - x_5 \\ x_3 & = & 2 + x_5 - x_4 \\ x_1 & = & 3 - x_4 \\ \hline obj & = & 5 - x_5 - x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{t.q.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + x_4 = 3 \\ & x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

On part d'une solution faisable de support minimal, e.g. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

On exprime objectif et variables du support
en les variables hors-support.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} x_3 & = & 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 2 - x_2 \\ \hline obj & = & x_1 + x_2 \end{array}$$

Augmenter x_1 ou x_2 améliore l'objectif et reste faisable !

On augmente (au choix) x_2 jusqu'à une
solution faisable de support minimal.

x_3 s'annule. pour $x_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} x_2 & = & 1 + x_1 - x_3 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 1 - x_1 + x_3 \\ \hline obj & = & 1 + 2x_1 - x_3 \end{array}$$

On peut encore augmenter x_1...

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} x_2 & = & 2 - x_5 \\ x_4 & = & 2 + x_5 - x_3 \\ x_1 & = & 1 - x_5 + x_3 \\ \hline obj & = & 3 - 2x_5 + x_3 \end{array}$$

puis x_3...

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} x_2 & = & 2 - x_5 \\ x_3 & = & 2 + x_5 - x_4 \\ x_1 & = & 3 - x_4 \\ \hline obj & = & 5 - x_5 - x_4 \end{array}$$

pour arriver à l'optimum $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En général :

Même principe, solutions représentées par leur support.

base = support d'une solution de support minimal

Il faut se donner une règle de pivot en cas de choix multiples.

En général :

Même principe, solutions représentées par leur support.

base = support d'une solution de support minimal

Il faut se donner une règle de pivot en cas de choix multiples.

En détail...

Construire une solution faisable initiale.

Résoudre un LP... de solution initiale triviale.

En général :

Même principe, solutions représentées par leur support.

base = support d'une solution de support minimal

Il faut se donner une règle de pivot en cas de choix multiples.

En détail...

Construire une solution faisable initiale.

Résoudre un LP... de solution initiale triviale.

Détecter que $c^T x$ n'est pas borné sur $Ax = b, x \geq 0$.

Lors d'un pivot, aucune variable ne s'annule.

En général :

Même principe, solutions représentées par leur support.

base = support d'une solution de support minimal

Il faut se donner une règle de pivot en cas de choix multiples.

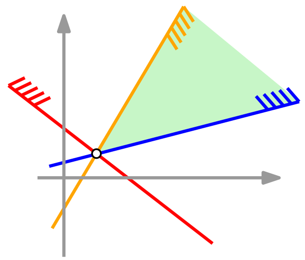
En détail...

Construire une solution faisable initiale.

Résoudre un LP... de solution initiale triviale.

Détecter que $c^T x$ n'est pas borné sur $Ax = b, x \geq 0$.

Lors d'un pivot, aucune variable ne s'annule.



Gérer les dégénerescences sans cycler.

Des pivots n'augmentant pas l'objectif peuvent être nécessaires.

La règle de pivot détermine, la variable choisie pour augmenter l'objectif.

- Largest coefficient
- Largest increase
- Steepest edge : suivre l'arête la mieux alignée avec c.
- Devex : heuristique approximant Steepest edge.
- Bland's rule : privilégie la variable d'indice minimum.
- Shadow vertex
- ...

La règle de pivot détermine, la variable choisie pour augmenter l'objectif.

Largest coefficient

Largest increase

Steepest edge : suivre l'arête la mieux alignée avec c. ⟵ très efficace en pratique

Devex : heuristique approximant Steepest edge.

Bland's rule : privilégie la variable d'indice minimum. ⟵ Ne cycle pas naturellement

Shadow vertex

...

La règle de pivot détermine, la variable choisie pour augmenter l'objectif.

- Largest coefficient
- Largest increase
- Steepest edge : suivre l'arête la mieux alignée avec c. ← très efficace en pratique
- Devex : heuristique approximant Steepest edge.
- Bland's rule : privilégie la variable d'indice minimum. ← Ne cycle pas naturellement
- Shadow vertex
- ...

Exemples exponentiels, diamètre d'un polytope, complexité lissée, . . .

La règle de pivot détermine, la variable choisie pour augmenter l'objectif.

- LARGEST COEFFICIENT
- LARGEST INCREASE
- STEEPEST EDGE : suivre l'arête la mieux alignée avec c. ← très efficace en pratique
- DEVEX : heuristique approximant STEEPEST EDGE.
- BLAND'S RULE : privilégie la variable d'indice minimum. ← Ne cycle pas naturellement
- SHADOW VERTEX
- ...

Exemples exponentiels, diamètre d'un polytope, complexité lissée, ...

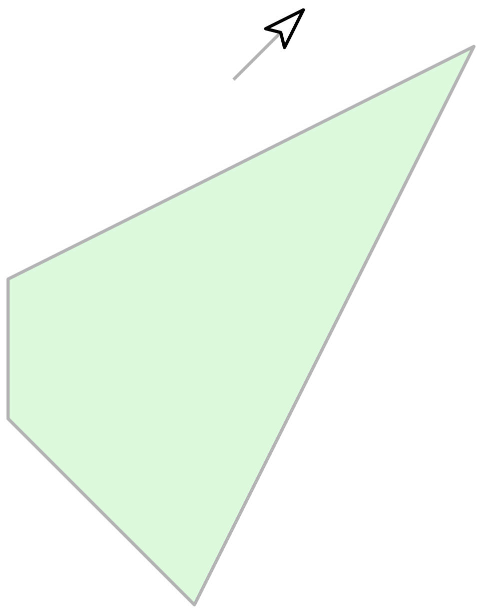
- RANDOM EDGE : choisir aléatoirement uniformément... ou pas.

Programmation mixte et entière

Un programme mixte est un PL dans lequel certaines variables sont contraintes à prendre des valeurs entières.

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\text{t.q. } Ax \leq b \\ &\qquad x \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \end{aligned}$$

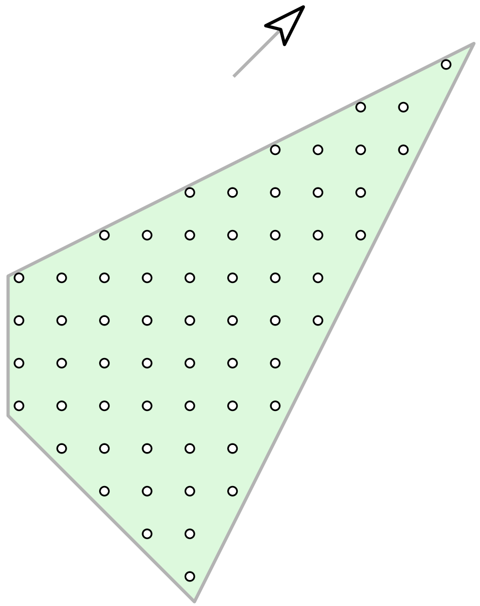
Modélise des ressources non fractionnables.



Un programme mixte est un PL dans lequel certaines variables sont contraintes à prendre des valeurs entières.

$$\max c^T x$$
t.q. $Ax \leq b$
$$x \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$$

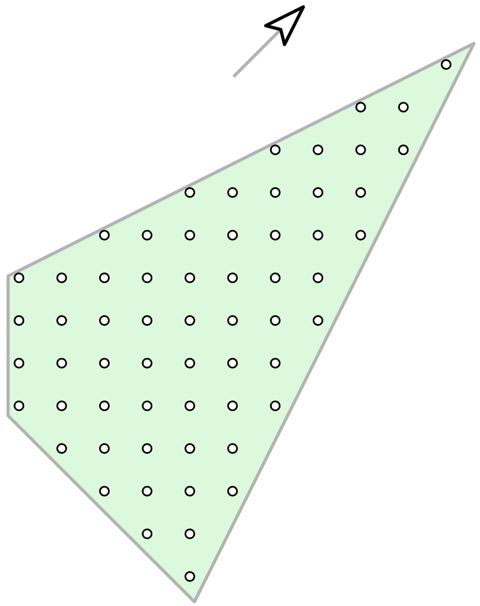
Modélise des ressources non fractionnables.



Un programme mixte est un PL dans lequel certaines variables sont contraintes à prendre des valeurs entières.

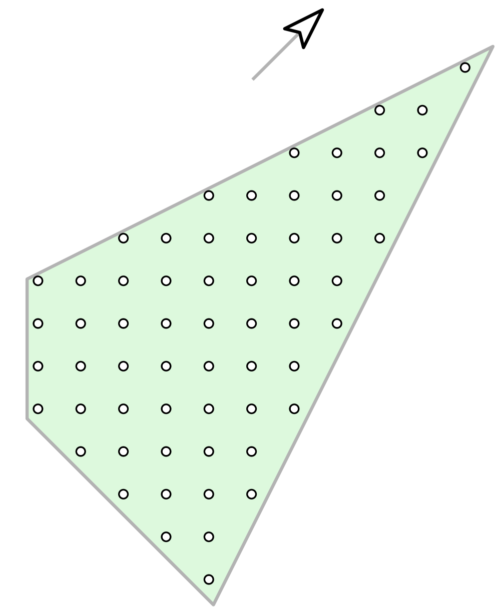
$$
\begin{aligned}
&\max c^T x \\
&\text{t.q. } Ax \le b \\
&\qquad x \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{d-k}
\end{aligned}
$$

Modélise des ressources non fractionnables.



Toutes les variables dans $\mathbb{Z}$ $(k = d)$: programmation entière.

Un programme mixte est un PL dans lequel certaines variables sont contraintes à prendre des valeurs entières.



$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\text{t.q. } Ax \le b \\ &\qquad x \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \end{aligned}$$

Modélise des ressources non fractionnables.

Toutes les variables dans $\mathbb{Z}$ $(k = d)$: programmation entière.

Résoudre un programme mixte général est théoriquement difficile.

Décider la faisabilité est NP-difficile déjà avec toutes les variables dans $\{0, 1\}$.

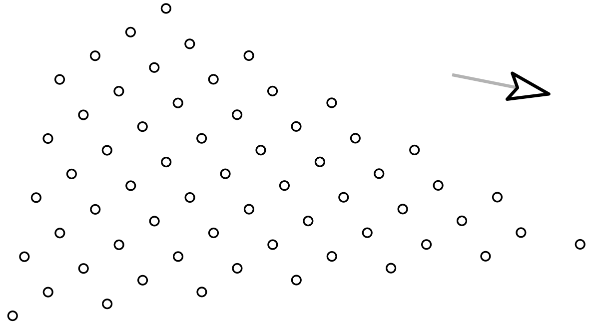
Des méthodes pratiques peuvent marcher, même si des instances inabordables existent (http://miplib.zib.de/miplib2010.php)

Cutting planes, branch-and-bound, . . .

Relaxation...

Si on ignore les contraintes d'intégralité,

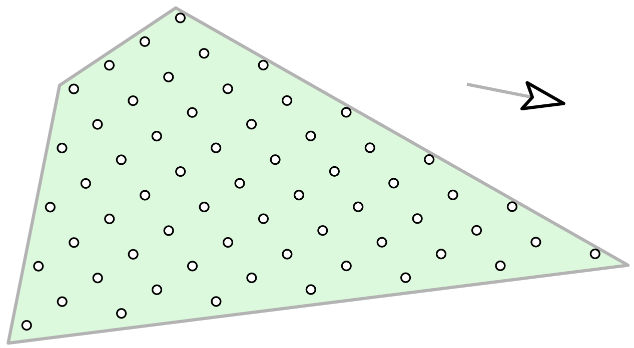
- le problème devient facile à résoudre (c'est un PL),
- la solution au PL borne inférieurement la solution du programme mixte/entier,



Relaxation...

Si on ignore les contraintes d'intégralité,

- le problème devient facile à résoudre (c'est un PL),
- la solution au PL borne inférieurement la solution du programme mixte/entier,

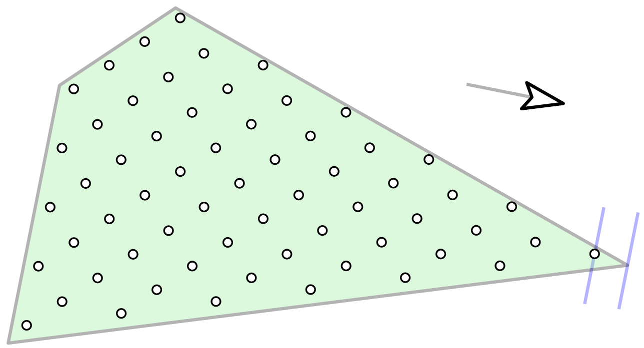


Relaxation...

Si on ignore les contraintes d'intégralité,

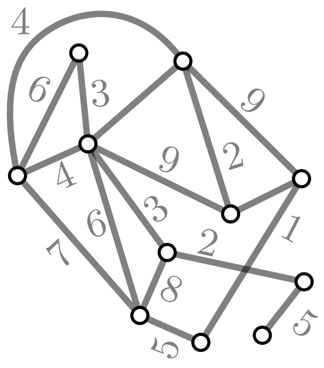
- le problème devient facile à résoudre (c'est un PL),
- la solution au PL borne inférieurement la solution du programme mixte/entier,

et on peut parfois borner supérieurement l'écart entre les deux solutions !

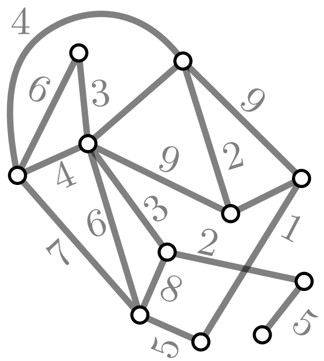


On va regarder 3 exemples issus de problèmes d'optimisation sur des graphes.

Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



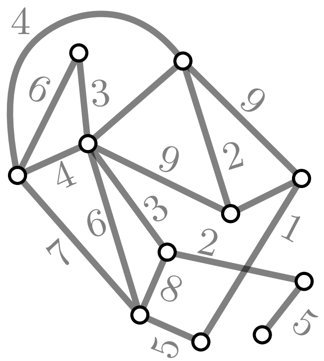
arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

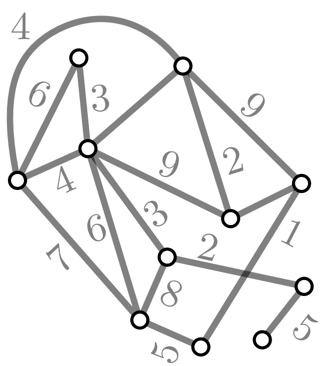
$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\ \text{t.q.} & x_{i,j} \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\ & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1 \end{array}$$

Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

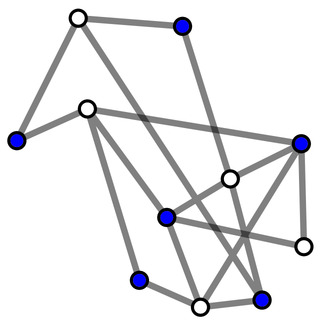
variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

(R)

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\ \text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\ & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\ & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1 \end{array}$$

Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

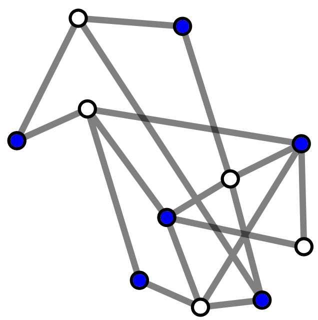
variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

$$
\text{(R)} \quad
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\
\text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\
& 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\
& \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1
\end{array}
$$

Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

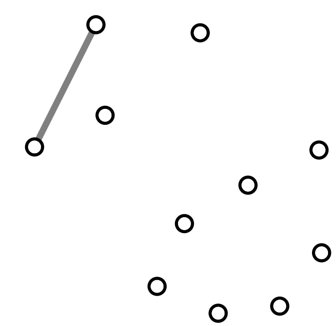
$(x_{i,j} = x_{j,i})$

$$(\mathrm{R}) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\ \text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\ & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\ & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1 \end{array}$$

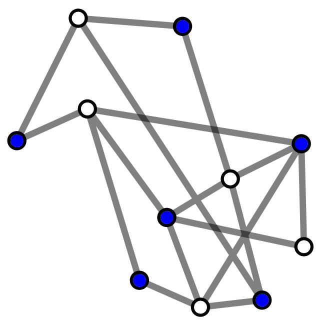
Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.



Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

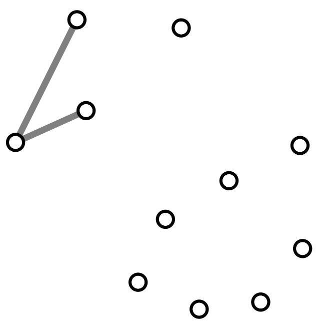
$$(\mathrm{R}) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\ \text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\ & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\ & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1 \end{array}$$

Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

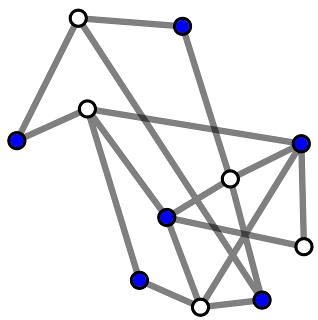
Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.

Il existe $x^*_{j,k}$ qui est aussi non-entier. *(Car $\sum_i x^*_{i,j} = 1$.)*



Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

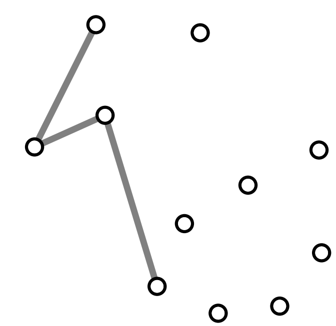
$$
\text{(R)} \quad
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\
\text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\
 & 0 \le x_{i,j} \le 1 \\
 & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1
\end{array}
$$

Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

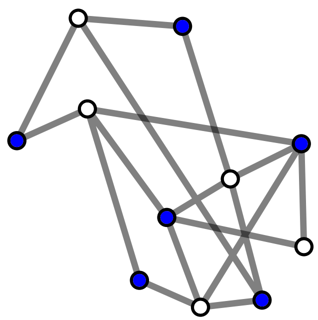
Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.

Il existe $x^*_{j,k}$ qui est aussi non-entier. *(Car $\sum_i x^*_{i,j} = 1$.)*



Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

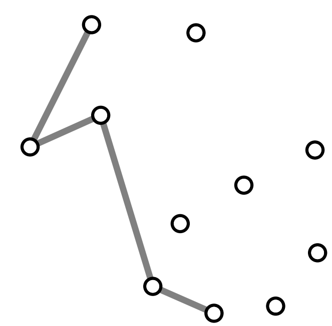
$$(\mathrm{R}) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\ \text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\ & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\ & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1 \end{array}$$

Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

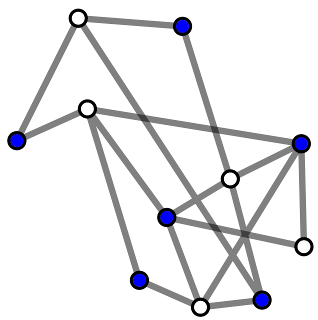
Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.

Il existe $x^*_{j,k}$ qui est aussi non-entier. *(Car $\sum_i x^*_{i,j} = 1$.)*



Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

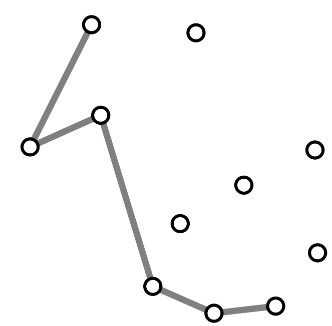
$$(R) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\ \text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\ & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\ & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1 \end{array}$$

Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

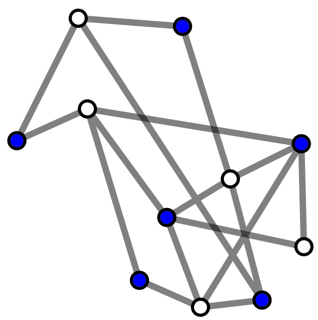
Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.

Il existe $x^*_{j,k}$ qui est aussi non-entier. *(Car $\sum_i x^*_{i,j} = 1$.)*



Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

$$
(\mathrm{R}) \quad
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\
\text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\
 & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\
 & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1
\end{array}
$$

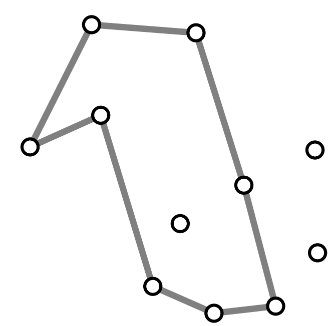
Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

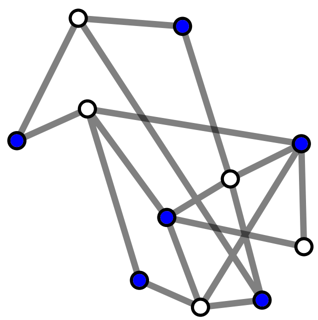
Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.

Il existe $x^*_{j,k}$ qui est aussi non-entier. *(Car $\sum_i x^*_{i,j} = 1$.)*

et on peut former ainsi... un cycle... de longueur paire.



Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

$$
(\mathrm{R}) \quad
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\
\text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\
& 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\
& \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1
\end{array}
$$

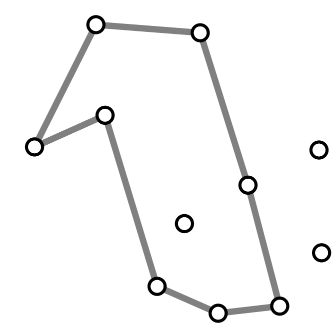
Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

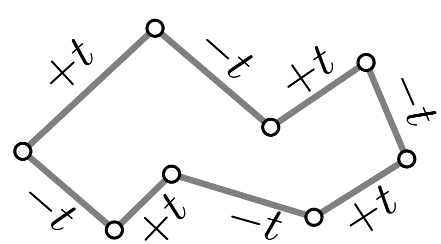
Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.

Il existe $x^*_{j,k}$ qui est aussi non-entier. *(Car $\sum_i x^*_{i,j} = 1$.)*

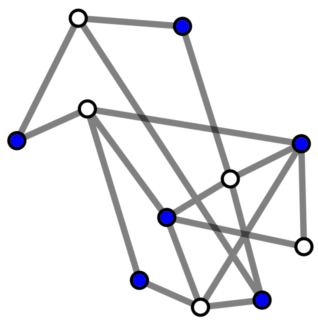
et on peut former ainsi... un cycle... de longueur paire.



On décale de $\pm t$ les $x^*_{i,j}$ du cycle



Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

$$
\text{(R)} \quad
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\
\text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\
 & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\
 & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1
\end{array}
$$

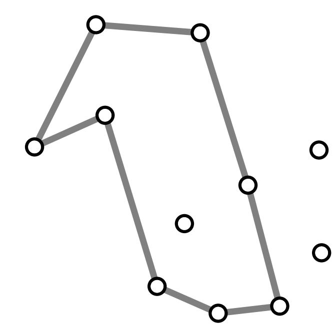
Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

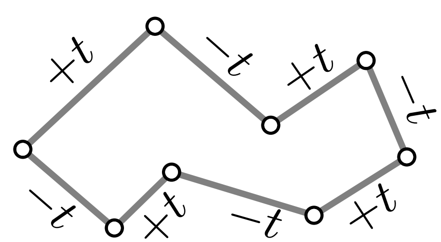
Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.

Il existe $x^*_{j,k}$ qui est aussi non-entier. *(Car $\sum_i x^*_{i,j} = 1$.)*

et on peut former ainsi... un cycle... de longueur paire.



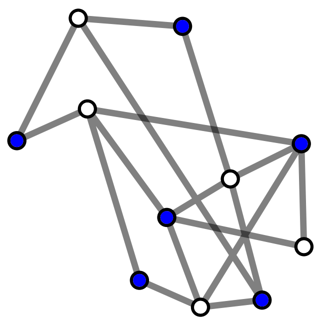


On décale de $\pm t$ les $x^*_{i,j}$ du cycle

on fait varier t partant de 0 ($\nearrow$ ou $\searrow$ selon $p_{i,j}$)

jusqu'à rendre une variable entière.

Couplage parfait de poids maximum (*maximum weight matching*).



arête entre i et j

$\updownarrow$

variable $x_{i,j}$, poids $p_{i,j}$

$(x_{i,j} = x_{j,i})$

$$
\text{(R)} \quad \begin{array}{ll}
\max & \sum_{i,j} p_{i,j} x_{i,j} \\
\text{t.q.} & \cancel{x_{i,j} \in \mathbb{Z}} \\
 & 0 \leq x_{i,j} \leq 1 \\
 & \forall i, \quad \sum_j x_{i,j} = 1
\end{array}
$$

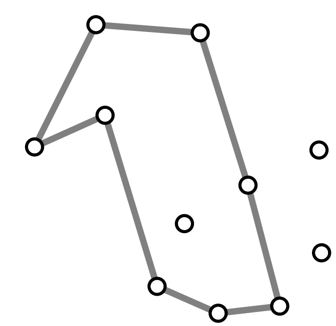
Théorème. Si le graphe est biparti et le PL (R) est faisable, il a au moins une solution optimale où tous les $x_{i,j}$ sont entiers.

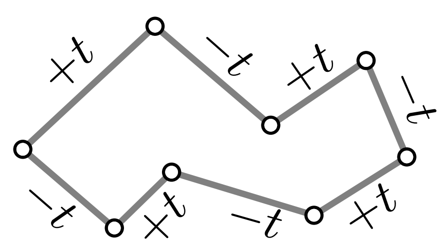
Preuve : On part d'une solution x^* au PL.

Supposons que $x^*_{i,j}$ n'est pas entier.

Il existe $x^*_{j,k}$ qui est aussi non-entier. *(Car $\sum_i x^*_{i,j} = 1$.)*

et on peut former ainsi... un cycle... de longueur paire.



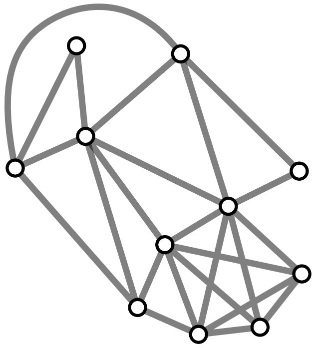


On décale de $\pm t$ les $x^*_{i,j}$ du cycle

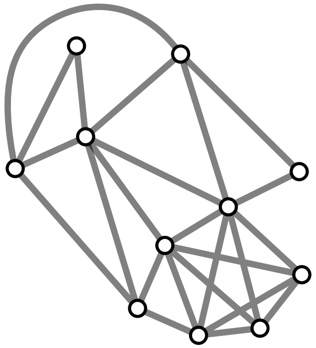
on fait varier t partant de 0 ($\nearrow$ ou $\searrow$ selon $p_{i,j}$)

jusqu'à rendre une variable entière.

et on recommence. $\square$



Couverture par sommets minimale (*minimum vertex cover*).



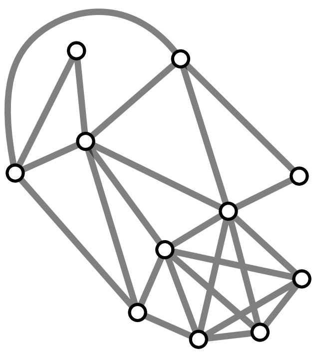
Couverture par sommets minimale (*minimum vertex cover*).

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_i x_i \\ \text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \\ & \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \geq 1 \end{array}$$

sommet i

$\updownarrow$

variable x_i



Couverture par sommets minimale (*minimum vertex cover*).

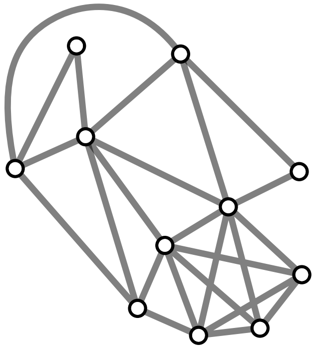
$$\begin{array}{ll} \min & \sum_i x_i \\ \text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \le x_i \le 1 \\ & \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \ge 1 \end{array}$$

sommet i

$\updownarrow$

variable x_i

Décider si le MVC comporte au moins k sommets est NP-difficile.



Couverture par sommets minimale (*minimum vertex cover*).

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_i x_i \\ \text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \\ & \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \geq 1 \end{array}$$

sommet i

$\updownarrow$

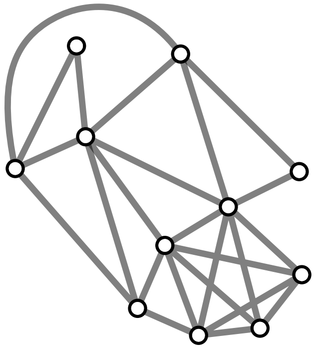
variable x_i

Décider si le MVC comporte au moins k sommets est NP-difficile.

Mais on peut calculer une solution faisable pas trop mauvaise en

calculant une solution x^* au PL obtenu par relaxation,

arrondissant x^* en $\hat{x}$ par $\hat{x}_i = 1$ si $x_i^* \geq \frac{1}{2}$ et $\hat{x}_i = 0$ sinon.



Couverture par sommets minimale (*minimum vertex cover*).

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_i x_i \\ \text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \\ & \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \geq 1 \end{array}$$

sommet i

$\updownarrow$

variable x_i

Décider si le MVC comporte au moins k sommets est NP-difficile.

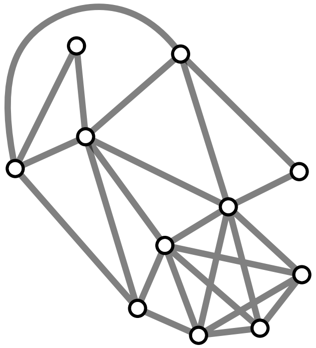
Mais on peut calculer une solution faisable pas trop mauvaise en

calculant une solution x^* au PL obtenu par relaxation,

arrondissant x^* en $\hat{x}$ par $\hat{x}_i = 1$ si $x_i^* \geq \frac{1}{2}$ et $\hat{x}_i = 0$ sinon.

Pour tout graphe, si x^{opt} est l'optimal du programme entier, on a

$$\sum_i x_i^* \quad \leq \quad \sum_i x_i^{opt} \quad \leq \quad \sum_i \hat{x}_i \quad \leq \quad 2 \sum_i x_i^*$$



Couverture par sommets minimale (*minimum vertex cover*).

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_i x_i \\ \text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \\ & \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \geq 1 \end{array}$$

sommet i

$\updownarrow$

variable x_i

Décider si le MVC comporte au moins k sommets est NP-difficile.

Mais on peut calculer une solution faisable pas trop mauvaise en

calculant une solution x^* au PL obtenu par relaxation,

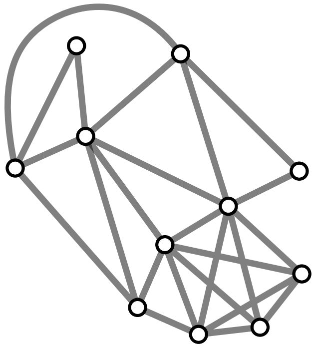
arrondissant x^* en $\hat{x}$ par $\hat{x}_i = 1$ si $x_i^* \geq \frac{1}{2}$ et $\hat{x}_i = 0$ sinon.

Pour tout graphe, si x^{opt} est l'optimal du programme entier, on a

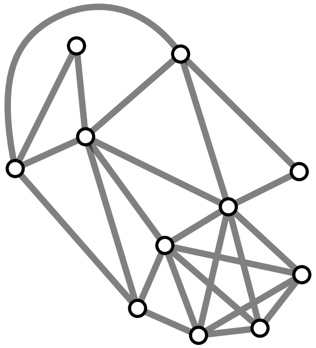
$$\sum_i x_i^* \quad \leq \quad \sum_i x_i^{opt} \quad \leq \quad \sum_i \hat{x}_i \quad \leq \quad 2\sum_i x_i^*$$

en particulier $\sum_i \hat{x}_i \quad \leq \quad 2\sum_i x_i^{opt}$

On peut donc calculer une 2-approximation efficacement.



Ensemble indépendant maximum (*maximum independent set*).



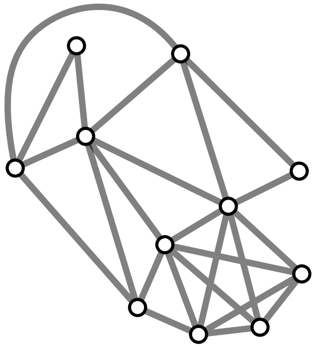
Ensemble indépendant maximum (*maximum independent set*).

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_i x_i \\ \text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \\ & \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \leq 1 \end{array}$$

sommet i

$\updownarrow$

variable x_i



Ensemble indépendant maximum (*maximum independent set*).

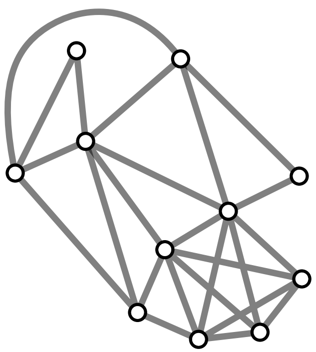
$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_i x_i \\
\text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\
& 0 \leq x_i \leq 1 \\
& \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \leq 1
\end{array}
$$

sommet i

$\updownarrow$

variable x_i

Décider si le MIS comporte au moins k sommets est NP-difficile.



Ensemble indépendant maximum (*maximum independent set*).

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_i x_i \\ \text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \\ & \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \leq 1 \end{array}$$

sommet i

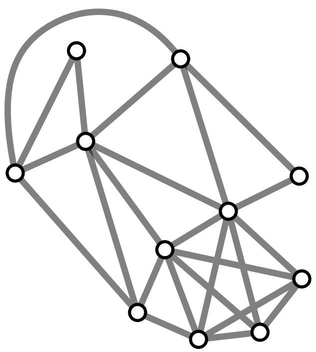
$\updownarrow$

variable x_i

Décider si le MIS comporte au moins k sommets est NP-difficile.

La relaxation a une solution où chaque $x_i = \frac{1}{2}$.

L'écart entre la solution de la relaxation est l'optimal est non-borné (K_n).



Ensemble indépendant maximum (*maximum independent set*).

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_i x_i \\ \text{t.q.} & x_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \\ & \forall \text{ arête } ij, \quad x_i + x_j \leq 1 \end{array}$$

sommet i

$\updownarrow$

variable x_i

Décider si le MIS comporte au moins k sommets est NP-difficile.

La relaxation a une solution où chaque $x_i = \frac{1}{2}$.

L'écart entre la solution de la relaxation est l'optimal est non-borné (K_n).

En fait, approximation efficace impossible si $P \neq NP$.

Dualité

Essayons de commenter la valeur de...

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{t.q.} \quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Essayons de commenter la valeur de...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

Essayons de commenter la valeur de...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

mieux... $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$

Essayons de commenter la valeur de...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

mieux... $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$

encore mieux... $2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{3}((4x_1 + 8x_2) + (2x_1 + x_2)) \leq 5$

Essayons de commenter la valeur de...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

mieux... $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$

encore mieux... $2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{3}((4x_1 + 8x_2) + (2x_1 + x_2)) \leq 5$

En multipliant la $i$ème contrainte par y_i on obtient...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \leq \quad \begin{array}{ll} \min & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{t.q.} & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ & 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Essayons de commenter la valeur de...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

mieux... $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$

encore mieux... $2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{3}((4x_1 + 8x_2) + (2x_1 + x_2)) \leq 5$

En multipliant la $i$ème contrainte par y_i on obtient...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \leq \quad \begin{array}{ll} \min & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{t.q.} & \boxed{4y_1 + 2y_2 + 3y_3} \geq 2 \\ & 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Essayons de commenter la valeur de...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

mieux... $\quad 2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$

encore mieux... $\quad 2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{3}((4x_1 + 8x_2) + (2x_1 + x_2)) \leq 5$

En multipliant la $i$ème contrainte par y_i on obtient...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \leq \quad \begin{array}{ll} \min & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{t.q.} & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ & 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Essayons de commenter la valeur de...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

mieux... $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$

encore mieux... $2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{3}((4x_1 + 8x_2) + (2x_1 + x_2)) \leq 5$

En multipliant la $i$ème contrainte par y_i on obtient...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \leq \quad \begin{array}{ll} \min & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{t.q.} & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ & 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Essayons de commenter la valeur de...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

mieux... $\quad 2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$

encore mieux... $\quad 2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{3}((4x_1 + 8x_2) + (2x_1 + x_2)) \leq 5$

En multipliant la $i$ème contrainte par y_i on obtient...

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{t.q.} & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \leq \quad \begin{array}{ll} \min & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{t.q.} & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ & 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Plus généralement,

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \leq \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{t.q.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \\
\text{t.q.} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{associer } y_i \text{ à la } i\text{ème} \\ \text{ligne de } A \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{t.q.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$\longrightarrow$ associer y_i à la $i$ème ligne de A $\longrightarrow$

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{t.q.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$\|$$

$$\begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{t.q.} & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{array} \longrightarrow \text{associer } y_i \text{ à la } i\text{ème ligne de } A \longrightarrow \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{t.q.} & A^T y \geq c \\ & \quad y \geq 0 \end{array}$$

$$\|$$

$$\begin{array}{ll} \min & -c^T x \\ \text{t.q.} & -(A^T)^T x \geq -b \\ & \qquad x \geq 0 \end{array} \longleftarrow \text{associer } x_i \text{ à la } i\text{ème ligne de } -A^T \longleftarrow \begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{t.q.} & -A^T y \leq -c \\ & \quad y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{associer } y_i \text{ à la } i\text{ème} \\ \text{ligne de } A \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{t.q.} & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\begin{array}{ll} \min & -c^T x \\ \text{t.q.} & -(A^T)^T x \ge -b \\ & x \ge 0 \end{array} \longleftarrow \begin{array}{c} \text{associer } x_i \text{ à la } i\text{ème} \\ \text{ligne de } -A^T \end{array} \longleftarrow \begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{t.q.} & -A^T y \le -c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

primal

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

$\longrightarrow$ associer y_i à la $i$ème ligne de A $\longrightarrow$

dual

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{t.q.} & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

$||$

$||$

$$\begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{t.q.} & -A^T y \le -c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

$\longleftarrow$ associer x_i à la $i$ème ligne de $-A^T$ $\longleftarrow$

$$\begin{array}{ll} \min & -c^T x \\ \text{t.q.} & -(A^T)^T x \ge -b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

primal **dual**

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{t.q.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{associer } y_i \text{ à la } i\text{ème} \\ \text{ligne de } A \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{t.q.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\begin{array}{ll} \min & -c^T x \\ \text{t.q.} & -(A^T)^T x \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array} \longleftarrow \begin{array}{c} \text{associer } x_i \text{ à la } i\text{ème} \\ \text{ligne de } -A^T \end{array} \longleftarrow \begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{t.q.} & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

On peut dualiser un PL sous forme quelconque.

	PL primal	PL dual
variables	$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$y_1, y_2, \ldots, y_m$
matrice	A	A^T
terme de droite	b	c
fonction	$\max \quad c^T x$	$\min \quad b^T y$
contraintes	$i$ème inégalité est $\leq$	$y_i \geq 0$
	$i$ème inégalité est $\geq$	$y_i \leq 0$
	$i$ème inégalité est $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_i \geq 0$	$i$ème inégalité est $\leq$
	$\ldots$	$\ldots$

La valeur d'un PL "maximisant" est toujours majorée par la valeur de son dual.

Théorème de dualité faible.

La valeur d'un PL "maximisant" est toujours majorée par la valeur de son dual.

Théorème de dualité faible.

dual \ primal	infaisable	faisable non-borné	faisable borné
infaisable			
faisable non-borné			
faisable borné			

La valeur d'un PL "maximisant" est toujours majorée par la valeur de son dual.

Théorème de dualité faible.

dual \ primal	infaisable	faisable non-borné	faisable borné
infaisable			
faisable non-borné		✖	✖
faisable borné		✖	

✖ Dualité faible

primal non-borné ⇒ dual infaisable

La valeur d'un PL "maximisant" est toujours majorée par la valeur de son dual.

Théorème de dualité faible.

dual \ primal	infaisable	faisable non-borné	faisable borné
infaisable			✗
faisable non-borné		✗	✗
faisable borné	✗	✗	=

✗ Dualité faible

primal non-borné $\Rightarrow$ dual infaisable

✗ = A prouver

primal faisable borné
$\Rightarrow$ dual faisable et de même valeur

Théorème (dualité forte). Un PL et son dual sont
soit tous deux infaisables,
soit l'un infaisable et l'autre faisable non borné,
soit tous deux faisables bornés et de même valeur.

La valeur d'un PL "maximisant" est toujours majorée par la valeur de son dual.

Théorème de dualité faible.

primal / dual	infaisable	faisable non-borné	faisable borné
infaisable			✖
faisable non-borné		✖	✖
faisable borné	✖	✖	=

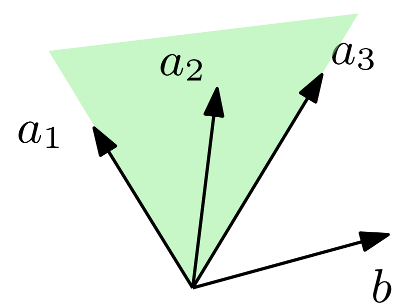
✖ Dualité faible

primal non-borné $\Rightarrow$ dual infaisable

✖ = A prouver

primal faisable borné
$\Rightarrow$ dual faisable et de même valeur

> **Théorème (dualité forte).** Un PL et son dual sont
> soit tous deux infaisables,
> soit l'un infaisable et l'autre faisable non borné,
> soit tous deux faisables bornés et de même valeur.



Preuve classique via lemme de Farkas.

$Ax = b$ a une solution ≥ 0

La valeur d'un PL "maximisant" est toujours majorée par la valeur de son dual.

Théorème de dualité faible.

dual \ primal	infaisable	faisable non-borné	faisable borné
infaisable			✗
faisable non-borné		✗	✗
faisable borné	✗	✗	=

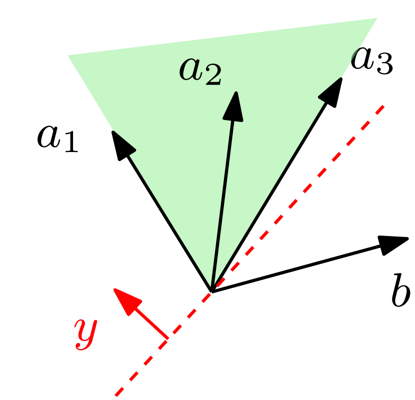
✗ Dualité faible

primal non-borné $\Rightarrow$ dual infaisable

✗ = A prouver

primal faisable borné
$\Rightarrow$ dual faisable et de même valeur

Théorème (dualité forte). Un PL et son dual sont
- soit tous deux infaisables,
- soit l'un infaisable et l'autre faisable non borné,
- soit tous deux faisables bornés et de même valeur.



Preuve classique via lemme de Farkas.

$Ax = b$ a une solution ≥ 0
xor
$\exists y$ tq $y^T A \geq 0$ et $y^T b < 0$

Prop. *Si un PL est faisable et borné, alors son dual est faisable et de même valeur.*

Preuve. on part de $\max \quad c^T x \quad$ t.q. $\quad Ax \leq b, x \geq 0.$

forme équationnelle : $\max \quad \overline{c}^T \overline{x} \quad$ t.q. $\quad \overline{A}\overline{x} \leq b, \overline{x} \geq 0.$

Prop. *Si un PL est faisable et borné, alors son dual est faisable et de même valeur.*

Preuve. on part de $\max \quad c^T x \quad$ t.q. $\quad Ax \leq b, x \geq 0.$

forme équationnelle : $\max \quad \overline{c}^T \overline{x} \quad$ t.q. $\quad \overline{A}\overline{x} \leq b, \overline{x} \geq 0.$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$ et $\overline{x}^T = (x \quad \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{variables d'écart}})$

Prop. *Si un PL est faisable et borné, alors son dual est faisable et de même valeur.*

Preuve. on part de $\max \quad c^T x \quad$ t.q. $\quad Ax \leq b, x \geq 0.$

forme équationnelle : $\max \quad \overline{c}^T \overline{x} \quad$ t.q. $\quad \overline{A}\overline{x} \leq b, \overline{x} \geq 0.$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$ et $\overline{x}^T = (x \quad \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{variables d'écart}})$

on applique l'algorithme du simplexe jusqu'à trouver une solution $\overline{x}^*$ de support B

on pose $y^* = (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T$ et on montre que c'est une solution faisable du dual,

Prop. *Si un PL est faisable et borné, alors son dual est faisable et de même valeur.*

Preuve. on part de $\max \quad c^T x \quad$ t.q. $\quad Ax \leq b, x \geq 0.$

forme équationnelle : $\max \quad \overline{c}^T \overline{x} \quad$ t.q. $\quad \overline{A}\overline{x} \leq b, \overline{x} \geq 0.$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \text{ et } \overline{x}^T = (x \quad \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{variables d'écart}})$$

on applique l'algorithme du simplexe jusqu'à trouver une solution $\overline{x}^*$ de support B

on pose $y^* = (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T$ et on montre que c'est une solution faisable du dual,

revient à $\overline{A}^T y^* \geq \overline{c}$ ou encore $\overline{A}^T (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T = \overline{A}^T (A_B^{-1})^T \overline{c}_B \geq \overline{c}$

Prop. *Si un PL est faisable et borné, alors son dual est faisable et de même valeur.*

Preuve. on part de $\max \quad c^T x \quad$ t.q. $\quad Ax \leq b, x \geq 0.$

forme équationnelle : $\max \quad \overline{c}^T \overline{x} \quad$ t.q. $\quad \overline{A}\overline{x} \leq b, \overline{x} \geq 0.$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$ et $\overline{x}^T = (x \quad \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{variables d'écart}})$

on applique l'algorithme du simplexe jusqu'à trouver une solution $\overline{x}^*$ de support B

on pose $y^* = (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T$ et on montre que c'est une solution faisable du dual,

revient à $\overline{A}^T y^* \geq \overline{c}$ ou encore $\overline{A}^T (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T = \overline{A}^T (A_B^{-1})^T \overline{c}_B \geq \overline{c}$

Dans le support, $\left(\overline{A}^T\right)_B (A_B^{-1})^T \overline{c}_B = \overline{c}_B \geq \overline{c}_B$

Prop. *Si un PL est faisable et borné, alors son dual est faisable et de même valeur.*

Preuve. on part de $\max \quad c^T x \quad$ t.q. $\quad Ax \leq b, x \geq 0.$

forme équationnelle : $\max \quad \overline{c}^T \overline{x} \quad$ t.q. $\quad \overline{A}\overline{x} \leq b, \overline{x} \geq 0.$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$ et $\overline{x}^T = (x \quad \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{variables d'écart}})$

on applique l'algorithme du simplexe jusqu'à trouver une solution $\overline{x}^*$ de support B

on pose $y^* = (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T$ et on montre que c'est une solution faisable du dual,

revient à $\overline{A}^T y^* \geq \overline{c}$ ou encore $\overline{A}^T (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T = \overline{A}^T (A_B^{-1})^T \overline{c}_B \geq \overline{c}$

Dans le support, $\left(\overline{A}^T\right)_B (A_B^{-1})^T \overline{c}_B = \overline{c}_B \geq \overline{c}_B$

Hors-support, $\left(\overline{A}^T (A_B^{-1})^T \overline{c}_B\right)_H = \overline{c}_H - r$ où r est le vecteur des gains, donc ≤ 0.

Prop. *Si un PL est faisable et borné, alors son dual est faisable et de même valeur.*

Preuve. on part de $\max \quad c^T x \quad$ t.q. $\quad Ax \leq b, x \geq 0.$

forme équationnelle : $\max \quad \overline{c}^T \overline{x} \quad$ t.q. $\quad \overline{A}\overline{x} \leq b, \overline{x} \geq 0.$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$ et $\overline{x}^T = (x \quad \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{variables d'écart}})$

on applique l'algorithme du simplexe jusqu'à trouver une solution $\overline{x}^*$ de support B

on pose $y^* = (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T$ et on montre que c'est une solution faisable du dual,

revient à $\overline{A}^T y^* \geq \overline{c}$ ou encore $\overline{A}^T (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T = \overline{A}^T (A_B^{-1})^T \overline{c}_B \geq \overline{c}$

Dans le support, $\left(\overline{A}^T\right)_B (A_B^{-1})^T \overline{c}_B = \overline{c}_B \geq \overline{c}_B$

Hors-support, $\left(\overline{A}^T (A_B^{-1})^T \overline{c}_B\right)_H = \overline{c}_H - r$ où r est le vecteur des gains, donc $\leq 0.$

$$c^T x^* = \overline{c}^T \overline{x}^* = \overline{c}_B^T \overline{x}_B^* = \overline{c}_B^T \left(\overline{A}_B^{-1} b\right) = \left(\overline{c}_B^T \overline{A}_B^{-1}\right) b = (y^*)^T b = b^T y^* \qquad \square$$

Prop. *Si un PL est faisable et borné, alors son dual est faisable et de même valeur.*

Preuve. on part de $\max \quad c^T x \quad$ t.q. $\quad Ax \leq b, x \geq 0.$

forme équationnelle : $\max \quad \overline{c}^T \overline{x} \quad$ t.q. $\quad \overline{A}\overline{x} \leq b, \overline{x} \geq 0.$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \text{ et } \overline{x}^T = (x \quad \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{variables d'écart}})$$

on applique l'algorithme du simplexe jusqu'à trouver une solution $\overline{x}^*$ de support B

on pose $y^* = (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T$ et on montre que c'est une solution faisable du dual,

revient à $\overline{A}^T y^* \geq \overline{c}$ ou encore $\overline{A}^T (\overline{c}_B^T A_B^{-1})^T = \overline{A}^T (A_B^{-1})^T \overline{c}_B \geq \overline{c}$

Dans le support, $\left(\overline{A}^T\right)_B (A_B^{-1})^T \overline{c}_B \boxed{= \overline{c}_B \geq \overline{c}_B}$

Hors-support, $\left(\overline{A}^T (A_B^{-1})^T \overline{c}_B\right)_H = \overline{c}_H - r$ où r est le vecteur des gains, donc ≤ 0.

$$c^T x^* = \overline{c}^T \overline{x}^* = \overline{c}_B^T \overline{x}_B^* = \overline{c}_B^T \left(\overline{A}_B^{-1} b\right) = \left(\overline{c}_B^T \overline{A}_B^{-1}\right) b = (y^*)^T b = b^T y^* \qquad \square$$

Soient (P) un PL, (D) son dual,
x^* une solution faisable de (P) et y^* une solution faisable de (D).

x^* et y^* sont complémentaires ssi $\forall i$, $\begin{cases} x_i^* = 0 \text{ ou } y^* \text{ sature la } i\text{ème contrainte de } (D), \\ y_i^* = 0 \text{ ou } x^* \text{ sature la } i\text{ème contrainte de } (P). \end{cases}$

Soient (P) un PL, (D) son dual,
x^* une solution faisable de (P) et y^* une solution faisable de (D).

x^* et y^* sont complémentaires ssi $\forall i$, $\begin{array}{l} x_i^* = 0 \text{ ou } y^* \text{ sature la } i\text{ème contrainte de } (D), \\ y_i^* = 0 \text{ ou } x^* \text{ sature la } i\text{ème contrainte de } (P). \end{array}$

Théorème (complémentarité). x^* et y^* sont optimaux ssi ils sont complémentaires.

Soient (P) un PL, (D) son dual,
x^* une solution faisable de (P) et y^* une solution faisable de (D).

x^* et y^* sont complémentaires ssi $\forall i$, $\begin{array}{l} x_i^* = 0 \text{ ou } y^* \text{ sature la } i\text{ème contrainte de } (D), \\ y_i^* = 0 \text{ ou } x^* \text{ sature la } i\text{ème contrainte de } (P). \end{array}$

Théorème (complémentarité). x^* et y^* sont optimaux ssi ils sont complémentaires.

Vérifier une solution x^* à un PL est facile quand son support est minimal.

On vérifie que x^* est faisable et on construit une solution y^* du dual.
y^* sature les contraintes associées au support de x^* $\Rightarrow$ résolution d'un système.
x^* est optimal ssi x^* et y^* ont même valeurs.

C'est tout pour aujourd'hui...