

Structures de visibilité globales : taille, calcul et dégénérescences.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 10 Mai 2004

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Nancy 2
(spécialité informatique)

par

Xavier Goaoc

Composition du jury

Président : Jean-François Mari

Rapporteurs : Jean-Daniel Boissonnat
Jeff Erickson

Examineurs : Hazel Everett (directrice)
Sylvain Lazard (co-directeur)
Claude Puech

Mis en page avec la classe thloria.

Résumé

Les questions de visibilité interviennent dans divers domaines applicatifs en informatique, notamment en sythèse d'image où il est fréquent d'avoir à déterminer si deux points ou deux surfaces sont mutuellement visibles. Les phénomènes d'occultation visuelle au sein d'une famille d'objets opaques en 3 dimensions peuvent être complexes. Aussi les méthodes de résolution des problèmes de visibilité 3D sont souvent approchées et constituent, du point de vue de l'efficacité, le facteur limitant de certaines applications. Le calcul d'illumination par méthode de radiosité en est un exemple bien connu.

Une nouvelle approche, dite "globale", de ces problèmes a émergé ces dix dernières années. Elle consiste en un précalcul de la plupart des informations de visibilité et en leur organisation en une structure de données permettant de traiter efficacement différents problèmes. Cette démarche soulève de multiples questions. Il convient d'estimer de manière pertinente la quantité d'information de visibilité présente dans une scène, de mettre au point des algorithmes calculant efficacement ces informations et de s'assurer que ces algorithmes traitent correctement des données géométriques arbitrairement dégénérées – tâche toujours délicate en calcul géométrique.

Dans cette thèse nous obtenons de nouveaux résultats sur chacune de ces questions à travers l'étude de la géométrie et de la combinatoire de certains ensembles de droites de l'espace.

Mots-clés: visibilité 3D, géométrie algorithmique, calcul géométrique sur objets courbes, géométrie algorithmique des droites.

Abstract

Visibility problems arise in various application fields in computer science, in particular in image synthesis where computing whether two points or two surfaces are mutually visible is a common task. Occlusions amongst opaque 3D objects are usually very complex. Thus, the existing methods to solve 3D visibility problems are commonly approximate and constitute, efficiency-wise, the bottleneck of many applications, for example in global illumination algorithms such as radiosity.

A so-called "global approach" to these problems emerged in the last decade. It amounts to pre-computing most of the visibility information and to organizing it in a data structure that can then be efficiently queried to solve different problems. This approach raises several issues. We need a meaningful estimation of the amount of visibility information contained in a scene, to design efficient algorithms to compute this information and to make sure that these algorithms handle geometric input in arbitrary degenerate position in a correct way – a task which is always difficult in geometric computing.

In this thesis we obtain new results on each of these questions through the investigation of the geometry and combinatorics of some particular sets of lines in space.

Keywords: 3D visibility, computational geometry, geometric computing on curved objects, algorithmic line geometry.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à manifester ma profonde gratitude envers Jean-Daniel Boissonnat et Jeff Erickson. Merci d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Vos commentaires m'ont été très précieux et vous vous êtes, en outre, acquittés de cette tâche dans des délais relativement brefs, ayant parfois à rafraîchir des souvenirs d'une langue étudiée il y a déjà quelque temps. Recevez ici mes plus vifs remerciements.

Je remercie très chaleureusement Claude Puech pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury et Jean-François Mari pour avoir accepté la tâche ô combien ingrate de référent interne, le sujet de cette thèse étant relativement éloigné de son domaine de recherche.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Hazel Everett, Sylvain Lazard et Sylvain Petitjean. Merci pour votre formidable encadrement durant ces trois ans. Votre disponibilité n'a eu d'égal que votre bonne humeur et je n'aurais assurément pas persévéré sur ce chemin sans votre soutien. Soyez assurés de toute mon amitié.

Je tiens aussi à manifester ma très grande reconnaissance à tous ceux qui m'ont communiqué leur goût pour la recherche. Merci donc à Ciprian, Fabrice, Ferran, Hervé, Hyeon-Suk, Michel, Olivier, Sue, Vida... et à tous ceux dont j'ai croisé la route au détour d'une visite, d'un workshop ou d'une conférence. Je tiens à remercier tout particulièrement Otfried Cheong avec qui j'ai eu – et j'espère avoir encore longtemps – énormément de plaisir à travailler. Kahmsa hahmnida Otfried-nim!

Si j'ai pu préparer cette thèse dans de bonnes conditions c'est notamment grâce à l'excellente ambiance dans laquelle j'ai baigné au cours de ces trois ans. Merci donc aux équipes ISA et QGAR et tout spécialement à Laurent, Marc et Antoine qui auront sans aucun doute eu à me supporter un peu plus que les autres. Un grand merci aussi à Isabelle pour sa très grande disponibilité.

Enfin, cela va de soi, je tiens à remercier ma famille et mes amis pour leur soutien constant et ce bien au-delà de la période de cette thèse. Nul besoin d'énumération ici, ils se reconnaîtront sans aucun doute...

Table des matières

I Introduction

1	Introduction	3
2	Problématique	7
2.1	Trois problèmes classiques de visibilité	7
2.2	Approche globale de ces trois problèmes	11
2.3	Deux approches fondamentalement différentes	15
3	Contributions	17
3.1	Questions étudiées	17
3.2	Contributions	17
3.3	Organisation	19
4	Le complexe de visibilité	21
4.1	Le complexe de Pocchiola et Vegter	21
4.2	Le complexe de Durand, Drettakis et Puech	22
4.3	Comparaison de ces deux définitions	25
4.4	Le squelette de visibilité	27
4.5	Cadre de cette thèse	27

5	État de l'art	33
5.1	Algorithmique du complexe et squelette de visibilité	33
5.2	Taille du complexe de visibilité	36
5.2.1	Bornes théoriques	36
5.2.2	Observations pratiques	39
5.2.3	Conclusion	40
5.3	Dégénérescences	40
5.4	Propriétés structurelles	42
5.5	Autres structures pour la visibilité globale	42
5.5.1	La structure de Pellegrini	42
5.5.2	Le graphe d'aspect	43
5.5.3	Structures de lancer de rayon	43

II Taille moyenne du complexe de visibilité

6	The expected number of visibility events is linear	47
6.1	Introduction	48
6.2	Our model and results	50
6.3	The expected number of $T4$ -segments is at most linear	51
6.3.1	Definitions	51
6.3.2	The Proof	52
6.4	The expected number of $T4$ -segments is at least linear	63
6.5	The expected size of the visibility complex is linear	64
6.6	Worst-case lower bound	65
6.7	Generalizations	66
6.7.1	Poisson distribution	66
6.7.2	Smooth convex universe	67
6.7.3	Other objects	67
6.8	Conclusion	71
6.9	Volume of the intersection of a 3D hippodrome with a ball	71
6.10	Volume of K	74
6.11	Volume of the intersection of two spherical shells	79

III Visibilité et polytopes

7	Droites tangentes à des polytopes en position arbitraire	85
7.1	Introduction	85
7.2	Main lemma	89
7.2.1	Proof overview	89
7.2.2	Preliminaries and definitions	90
7.2.3	Generic tangent lines	92
7.2.4	Proof of Lemma 45	96
7.2.5	Nongeneric tangent lines	100
7.2.6	Proof of the Main Lemma	102
7.3	Upper bounds	102
7.4	Lower bounds	105
7.5	Conclusion	106
8	Calcul du squelette de visibilité	107
8.1	Principe de l'algorithme	107
8.2	Préliminaires	109
8.2.1	Terminologie	109
8.2.2	Position générique	109
8.2.3	Squelettes de visibilité	110
8.2.4	Reconnaissance des éléments déjà créés	110
8.3	Le plan initial	111
8.3.1	Calcul du squelette 2D	111
8.3.2	Les éléments du squelette 3D apparaissant dans le plan initial	112
8.4	Les événements	112
8.4.1	La file d'événements	113
8.4.2	Changement combinatoire dans le squelette	113
8.4.3	Évolution d'une bitangente	118
8.4.4	Événements associés à une bitangente	121
8.5	Vue d'un point	121
8.6	Gestion des dégénérescences	121
8.6.1	Événements simultanés	122
8.6.2	Autres positions non-génériques	124

8.7	Analyse de complexité	125
8.8	Extensions	127

IV Complexe de visibilité d'objets courbes

9	Représentation du complexe de visibilité dans l'espace des droites	131
9.1	Préliminaires	131
9.1.1	Arrangement dual	131
9.1.2	Occultations et permutations géométriques	133
9.1.3	Traduction algébrique grâce aux coordonnées de Plücker	136
9.2	Représentation des faces du complexe	137
9.2.1	Arrangement associé à une face	138
9.2.2	Les clusters	139
9.2.3	Clusters voisins	140
9.3	Extensions	141
9.3.1	Cellules de dimension 4	141
9.3.2	Objets semi-algébriques	142
9.3.3	Objets non convexes ou s'intersectant	143
10	Algorithme de calcul du complexe et du squelette de visibilité	145
10.1	Les algorithmes	145
10.1.1	Calcul des 2-clusters	145
10.1.2	Calcul des autres clusters	146
10.1.3	Des clusters aux cellules	147
10.1.4	Configurations dégénérées	147
10.2	Les opérations algébriques	148
10.2.1	Calcul d'un plan séparateur	149
10.2.2	Trouver un point par composante connexe	149
10.2.3	Séparer les composantes connexes	149
10.3	Complexité des algorithmes	149
10.3.1	Cas le pire	149
10.3.2	Considérations pratiques	151
10.4	Comparaison avec l'algorithme de Durand et al.	151

11 Positions dégénérées pour un ensemble de sphères	153
11.1 Introduction	154
11.2 Preliminaries	156
11.3 Affinely independent centers	157
11.4 Coplanar centers	158
11.5 Collinear centers	163
11.6 Conclusion	165

V Conclusions

Bibliographie	171
Table des figures	177
Annexes	181
A Coordonnées de Plücker	181
A.1 Définitions	181
A.2 Sous-ensembles remarquables	183
A.2.1 Side-operator	184
A.2.2 Intersection par des variétés de plus haut degré	184
A.2.3 Sous-variétés projectives	185
B Surfaces d'événement visuel d'objets convexes	187
B.1 Convexes algébriques lisses	187
B.2 Polytopes	188
C Squelette de visibilité de polytopes	191
C.1 Terminologie	191
C.2 Contexte	192
C.3 Le squelette	193
D Calcul du squelette : un balayage dans l'espace des droites	195

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Introduction

Commençons par situer les problèmes de visibilité dans le cadre de l’infographie afin d’introduire l’idée d’une approche globale de ces problèmes, thème central de cette thèse.

L’infographie est une discipline de l’informatique qui s’intéresse au calcul d’images ou de séquences d’images sur ordinateur. Ses applications sont nombreuses, en sciences comme dans l’industrie. Elle permet en effet de visualiser des phénomènes qui ne sont pas directement observables en raison de leur taille (des molécules en chimie), de leur lenteur (la croissance des plantes en agronomie), de leur nature (l’évolution d’un plasma en physique nucléaire). Elle permet aussi de représenter des lieux ou des objets virtuels, pour réaliser des maquettes à moindre frais (industrie automobile, architecture), reconstituer des objets disparus (en archéologie), ou animer des mondes imaginaires (cinéma, jeu vidéo).

En pratique, certaines applications (cinéma, jeu vidéo, archéologie...) demandent seulement que les images calculées soient convaincantes, c’est-à-dire “réalistes”. D’autres applications, scientifiques ou industrielles, exigent que les images reproduisent le plus fidèlement possible les objets ou phénomènes représentés. Le calcul d’images ou d’animations doit de plus être efficace : la complexité des scènes manipulées est en constante inflation (précédant, bien évidemment, l’augmentation de la puissance des machines) et l’on souhaite souvent qu’une interaction soit possible. L’infographie étudie donc, entre autres, des méthodes rapides pour le calcul d’images réalistes ou du moins vraisemblables.

La description d’une scène commence par sa géométrie qui, le plus souvent, consiste en une simple liste de polygones. Cependant, l’utilisation de primitives géométriques ayant une structure plus riche se développe : polyèdres, surfaces courbes, surfaces implicites... À cette géométrie s’ajoute une description des matériaux utilisés, par exemple leurs propriétés physiques : indices de réflexion et réfraction ou encore quantité de lumière émise. Avant de pouvoir visualiser une scène, il faut entre autres en calculer l’éclairage : déterminer les zones d’ombre et de pénombre ou, plus généralement, les interactions entre matière et lumière, comme par exemple la réfraction par un liquide. La simulation de l’éclairage, aussi appelée illumination, est une opération cruciale pour la vraisemblance des images calculées. En effet, pour inférer les formes 3D à partir d’une image 2D, l’œil se base en grande partie sur l’éclairage et notamment les ombres [25]. Toute imprécision dans le calcul des ombres d’une image peut produire un résultat visuellement choquant.

L’éclairage par méthode de radiosité s’est popularisé au début des années 90. Cela est dû d’une part à la grande qualité des illuminations que ce modèle permet de calculer et, d’autre part, au fait que la puissance de calcul nécessaire à sa mise en œuvre est devenue disponible. Son principe est d’estimer la quantité de lumière reçue par chaque surface en simulant, via les lois de la physique, les flux d’énergie lumineuse dans la scène. Cela est en général réalisé par

une méthode de type *éléments finis* : on subdivise les surfaces afin d'approximer correctement l'éclairement de chaque élément, puis on simule la propagation de l'énergie dans la scène.

Une des manières de réaliser cette simulation est de décrire l'énergie reçue et l'énergie émise par chaque élément de surface ; initialement, ces quantités sont nulles sauf pour les surfaces servant de sources de lumière. L'énergie de chacune des surfaces émettrices est ensuite projetée dans la scène. Il s'agit alors de calculer la manière dont cette énergie se distribue : quel est le pourcentage reçu par chaque surface. Ce calcul requiert entre autres d'estimer le *facteur de forme* d'une paire d'éléments de surface, qui, intuitivement, quantifie leur visibilité mutuelle. L'énergie émise est, en effet, reçue par les surfaces qui voient l'émetteur, et l'interaction de deux éléments dépend donc de leur visibilité mutuelle.

Les calculs de visibilité apparaissent sous de nombreuses formes dans la méthode de radiosité. Tout d'abord, pour représenter correctement l'éclairement d'un élément de surface, on peut être amené à le subdiviser. En particulier, il est difficile de représenter fidèlement un éclairage irrégulier. Aussi, pour obtenir un résultat de bonne qualité, il est souhaitable que la subdivision des surfaces de la scène tienne compte des contours d'ombre qui sont justement les discontinuités de l'éclairage (ou de sa dérivée). Comme le contour d'une ombre est la limite entre les points d'où une source de lumière est visible, partiellement visible et invisible, le calcul des contours d'ombre apparaît comme un problème de visibilité. Ensuite, l'énergie émise par un élément de surface n'est reçue que par la partie de la scène qu'il peut voir. Le calcul des objets visibles depuis une surface donnée est donc une première étape de la simulation. Enfin, une fois le calcul de radiosité mené à bien, il faut déterminer, pour afficher une image, les surfaces (partiellement) visibles depuis le point d'observation : ce sont en effet les seules qu'il est nécessaire d'afficher.

Les problèmes de visibilité sont actuellement loin d'être complètement résolus. Tout d'abord, peu de méthodes parviennent à accélérer un calcul en s'aidant de calculs précédents. Par exemple, connaître l'ensemble des objets visibles depuis un point de vue devrait donner des indications sur les objets visibles depuis un autre point de vue proche. Or, peu de méthodes parviennent à exploiter cette propriété, connue sous le nom de *cohérence spatiale*. Cette difficulté à saisir la cohérence spatiale s'explique, de manière générale, par le fait que les techniques utilisées sont surtout basées sur du calcul en ligne et sans mémoire ; il est alors difficile de tirer parti des calculs précédents. Ensuite, pour certains de ces problèmes, on doit actuellement se contenter de calculer une réponse approchée, soit parce que l'on ne sait pas calculer la réponse exacte (par exemple le facteur de forme de 2 surfaces), soit parce que ce calcul est trop coûteux (par exemple l'ensemble des surfaces visibles depuis une zone donnée). Pallier ces défauts s'avère étonnamment ardu, ce qui suggère des difficultés théoriques sous-jacentes encore mal identifiées. Enfin, les scènes à traiter en pratique présentent souvent des dégénérescences, par exemple des objets qui partagent des sommets, des arêtes ou des faces, qui se touchent, ou qui ont des arêtes alignées ou des faces coplanaires. Or, les méthodes développées en calcul géométrique requièrent fréquemment un traitement spécial pour certains de ces cas particuliers. Par exemple, si l'on utilise la droite définie par deux sommets, il faut traiter à part le cas où ces sommets sont confondus. Dans le cas d'algorithmes élaborés, ces dégénérescences peuvent soulever des problèmes théoriques dépassant la simple énumération de cas particuliers.

L'idée d'une approche globale consiste à calculer et structurer les informations de visibilité d'une scène, pour ensuite résoudre différentes questions de visibilité par de simples requêtes dans cette structure.

D'un point de vue théorique, cette approche soulève plusieurs questions. Tout d'abord, qui dit pré-calcul dit stockage, et pour que cette approche soit viable il est nécessaire que la quantité d'information à stocker reste raisonnable. Cette première question est liée à la complexité (à la fois théorique et pratique) de certaines constructions géométriques dans des espaces de dimension 3

ou plus. Ensuite, pour calculer ces informations, il faut mettre au point des algorithmes efficaces. Les travaux menés en ce sens relient les problèmes de visibilité à des questions sur la géométrie de certains ensembles de droites. Ici encore, on aboutit à l'étude d'objets géométriques de dimension 4 ou plus. Ainsi, les questions qui se posent concernent la structure d'objets *a priori* peu intuitifs.

Cette thèse étudie diverses questions soulevées par l'approche globale des problèmes de visibilité. D'une part, nous établissons des bornes de complexité asymptotiques sur certaines structures de visibilité globale qui suggèrent que cette approche est envisageable dans la pratique. D'autre part, nous développons des algorithmes de calcul efficaces et robustes de certaines de ces structures. L'obtention de méthodes robustes passe par la compréhension des dégénérescences pour les problèmes de visibilité ; nous avons ainsi été amenés à résoudre des questions portant sur la géométrie d'ensembles de droites particuliers.

Dans la suite de cette partie, nous introduisons plus en détail la problématique (chapitre 2) en illustrant notre propos par trois problèmes classiques : le lancer de rayon, le calcul de facteur de forme et les maillages de discontinuité. Nous présentons ensuite, au chapitre 3, nos contributions. Le chapitre 4 passe ensuite en revue les différentes définitions du complexe de visibilité, une structure centrale dans cette thèse, et décrit le cadre de cette thèse. L'état de l'art des problèmes que nous abordons, au chapitre 5, conclue cette première partie. Les parties II, III et IV présentent ensuite nos contributions.

Chapitre 2

Problématique

Nous expliquons maintenant le concept d'*approche globale* des problèmes de visibilité. Pour cela, nous commençons par passer en revue trois problèmes classiques de visibilité en soulignant leurs aspects aujourd'hui encore mal résolus. Nous expliquons ensuite comment une approche globale peut pallier ces lacunes. Pour finir, nous esquissons une comparaison entre les solutions actuelles et les perspectives offertes par une approche globale.

2.1 Trois problèmes classiques de visibilité

Pour commencer, voyons en détail trois problèmes de visibilité particuliers : le lancer de rayon, le calcul de facteurs de forme et le calcul de maillages de discontinuités.

Lancer de rayon

Le problème du lancer de rayon peut s'exprimer ainsi : étant donné un ensemble d'objets et un rayon, quel est le premier objet qu'il rencontre ? Autrement dit, il s'agit de déterminer pour un point et une direction dans une scène l'objet vu depuis ce point selon cette direction (*cf.* figure 2.1).

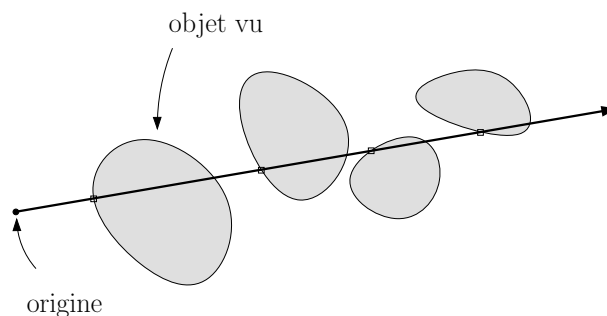


FIG. 2.1. Lancer de rayon.

Ce problème apparaît, entre autres, lorsque l'on calcule l'image d'une scène depuis un point de vue donné et qu'il faut déterminer les objets visibles. Une manière de procéder est de lancer, pour chaque pixel de l'image, un rayon ; il s'agit de la méthode du *ray-tracing*.

Une première approche pour résoudre le problème du lancer d'un rayon consiste à déterminer son intersection avec chacun des objets de la scène. L'objet vu est celui dont l'intersection est la

plus proche de l'origine du rayon. On peut donc, par une méthode naïve, résoudre ce problème en temps linéaire en la taille de la scène considérée. En pratique, cette méthode est combinée à diverses techniques d'accélération permettant de filtrer efficacement les objets qui se trouvent loin du rayon lancé. Par exemple, on cloisonne l'espace 3D en cellules contenant chacune un petit nombre d'objets, et on marche de cellule en cellule en suivant le rayon. Dans chaque cellule on teste si le rayon intersecte un des objets présents, et le cas échéant on calcule l'objet ayant l'intersection la plus proche de la source du rayon. La figure 2.2 illustre ce genre d'approche. Si la complexité asymptotique dans le cas le pire n'en demeure pas moins linéaire en la taille de la scène, en pratique l'objet vu par un rayon dans un ensemble de n objets est plutôt trouvé après de l'ordre de $\log n$ tests [91]. Pour un survol de ces méthodes nous renvoyons à l'article de synthèse de Chang [21].

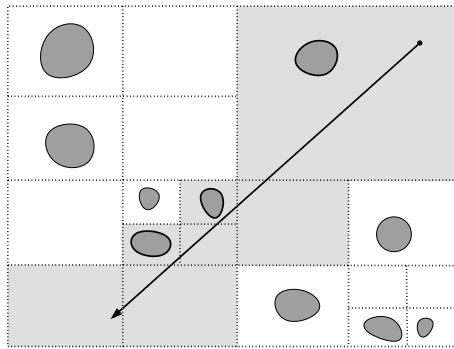


FIG. 2.2. Exemple de subdivision de l'espace (ici, un *quadtree* dans le plan) accélérant le lancer de rayon : on ne teste l'intersection du rayon qu'avec les objets des cellules traversées.

De nombreuses alternatives plus élaborées ont été proposées pour résoudre le problème du lancer de rayon en temps sous-linéaire dans le cas le pire. Par exemple, la structure de décomposition de l'espace des droites de Pellegrini [69] permet de lancer un rayon dans un ensemble de n triangle en temps $O(\log n)$ et la technique de Mohaban et Sharir [64] atteint un résultat similaire pour des sphères. Ces résultats sont cependant plus des études de la complexité théorique du lancer de rayon que des solutions pratiques à ce problème. En effet, ces algorithmes sont en général difficiles à mettre en œuvre en raison de structures de données compliquées ou de complexités en espace prohibitives. Pour un tour d'horizon de ces travaux, nous renvoyons à l'article de synthèse de Pellegrini [71].

Une question encore mal résolue en pratique est le lancer d'un ensemble de rayons voisins. Par exemple, le rendu d'une image par *ray-tracing* demande de lancer, entre autres, plusieurs centaines de milliers de rayons passant par le point de vue. Les méthodes pratiques actuelles effectuent du calcul sans mémoire : chaque rayon est lancé indépendamment. Pourtant, on peut s'attendre à ce que les calculs menés pour déterminer la vue d'un rayon aident à déterminer celle des rayons voisins. Pour les techniques d'accélération à base de subdivisions de l'espace, exploiter cette *cohérence* géométrique est étonnamment difficile.

Calcul de facteur de forme

La méthode de radiosité calculer l'éclaircissement d'une scène en simulant les flux d'énergie lumineuse. Calculer les transferts d'énergie demande de déterminer, pour chaque surface, quels objets reçoivent l'énergie qu'elle émet et dans quelles proportions. Le degré d'interaction de deux

éléments de surface, *i.e.* la manière dont l'éclairement du premier influence celui du second, est appelé leur *facteur de forme*.

Pour chaque élément de surface, l'éclairement est représenté au moyen d'une base de fonctions. Les bases généralement adoptées sont des bases de fonctions constantes (tous les points de l'élément de surface ont le même éclairement) ou polynomiales de faible degré (1 ou 2). Intuitivement, plus la base de fonction considérée est élaborée, plus elle permet de représenter fidèlement l'éclairement d'un élément et plus l'expression des facteurs de forme est complexe.

Dans le cas où l'éclairement est représenté par des fonctions constantes, le facteur de forme de deux éléments a une interprétation géométrique simple : il s'agit du pourcentage de droites coupant l'émetteur qui intersectent aussi le récepteur sans rencontrer d'autre objet entre eux (voir figure 2.3). Le facteur de forme d'un élément T_1 vers un élément T_2 s'exprime donc comme un rapport de mesures d'ensembles de droites :

$$\text{facteur de } T_1 \text{ vers } T_2 = \frac{|\text{droites intersectant } T_1 \text{ et } T_2 \text{ selon lesquelles } T_1 \text{ voit } T_2|}{|\text{droites intersectant } T_1|}.$$

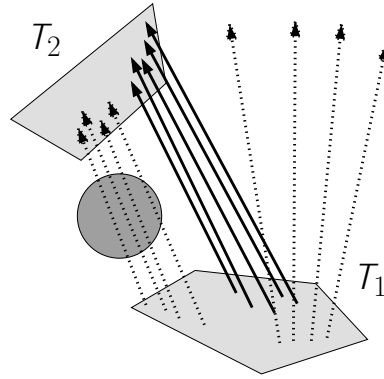


FIG. 2.3. Facteur de forme entre deux surfaces en 3D : certaines droites intersectant T_1 et T_2 sont interceptées par des bloqueurs.

Il existe une seule mesure sur les droites de \mathbb{R}^3 , à multiplication par une constante près, qui soit invariante par translations et rotations. Comme il est raisonnable d'exiger que la mesure d'un paquet de droites ne dépende pas de l'angle sous lequel on "l'observe", c'est la mesure généralement adoptée. Par ailleurs, comme l'on s'intéresse à des rapports de mesures de paquets de droites, le fait que cette mesure soit définie à une constante multiplicative près n'est pas gênant. Pour un exposé plus complet sur ce sujet, voir, par exemple, l'excellent livre de Santalò [84].

Si l'éclairement est représenté au moyen d'une base de fonctions plus élaborée, il faut alors calculer un coefficient d'interaction entre chaque fonction de base de l'émetteur et chaque fonction de base du récepteur. Il n'est alors pas simple de trouver une interprétation géométrique aux facteurs de forme. Intuitivement, il s'agit toujours de rapporter l'ensemble des droites intersectant les deux objets à l'ensemble de celles qui coupent l'émetteur. Cependant, il faut pondérer chaque droite par les valeurs prises par les fonctions de base aux points où elle rencontre les éléments de surface. Il s'agit donc d'intégrer les fonctions de base sur des ensembles de droites.

Mentionnons au passage qu'il existe, en dimension 2, une formule simple donnant le facteur de forme (pour une base constante) entre deux objets convexes. Il s'agit tout simplement de la différence des longueurs entre les courbes élastiques croisées et non croisées enserrant ces objets

(cf. figure 2.4). On peut trouver une démonstration de cette propriété, bien connue en *transfert radiatif* depuis les années 1900, dans le livre de Santalò [84]. À notre connaissance, il n'existe aucune formule close de ce type en dimension 3.

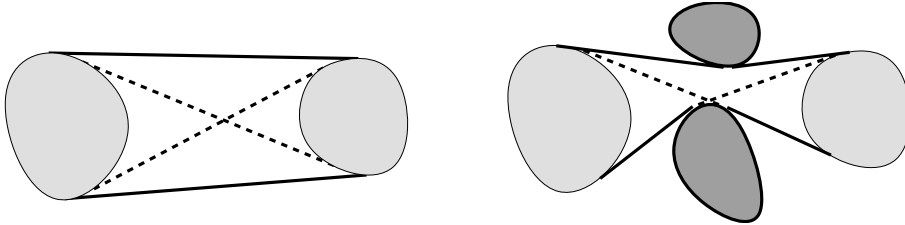


FIG. 2.4. Facteur de forme entre deux convexes en 2D vu comme différence de longueurs de courbes élastiques croisée et non croisée, avec ou sans obstacles.

Dans le cas général, on doit donc se contenter d'exprimer le facteur de forme sous forme intégrale. Les seuls cas dans lesquels cette intégrale a pu être calculée de manière exacte sont élémentaires (essentiellement, des polygones sans tenir compte des occultations). Le calcul se fait donc en pratique par des techniques d'approximation. Le calcul approché de l'intégrale demande en particulier de déterminer le domaine sur lequel intégrer, à savoir l'ensemble des droites suivant lesquelles l'émetteur voit le récepteur. En pratique, on ajoute dans l'intégrale une fonction indicatrice de la visibilité (c'est-à-dire valant 1 pour les droites permettant cette visibilité et 0 pour les autres). Comme les techniques classiques de quadrature (méthode de Gauss ou de Monte-Carlo) requièrent uniquement des évaluations ponctuelles de la fonction à intégrer, cette fonction indicatrice de visibilité est évaluée en plusieurs valeurs, *i.e.* droites, en lançant autant de rayons (voir figure 2.5).

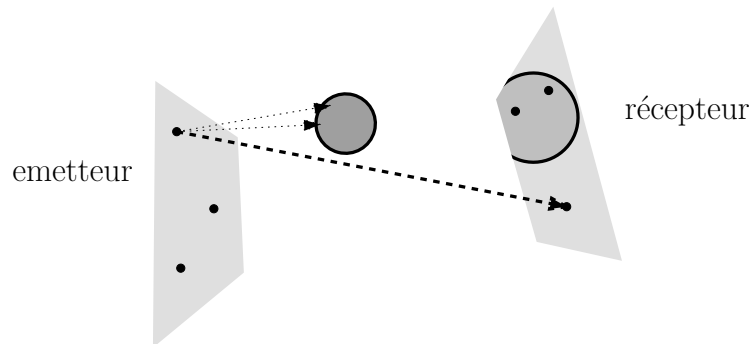


FIG. 2.5. Calcul de facteur de forme 3D par échantillonnage et lancer de rayon.

Les facteurs de forme posent encore aujourd'hui plusieurs problèmes. Tout d'abord, les méthodes pour les calculer restent insatisfaisantes. Même dans le cas élémentaire de polygones avec des fonctions de base constantes, il faut recourir à des techniques d'approximation si l'on souhaite prendre en compte les occultations. Ensuite, leur mise à jour lors d'un calcul de radiosité dans une scène cinématique ou dynamique laisse à désirer. Le déplacement ou l'apparition d'un objet ne modifie qu'une partie des facteurs de forme, à savoir ceux qui impliquent cet objet comme émetteur, récepteur ou bloqueur. Déterminer efficacement les facteurs de forme à mettre à jour est aujourd'hui un problème ouvert, et en pratique ils sont tous recalculés.

Maillage de discontinuité

Un des problèmes de la méthode de radiosité est la représentation fidèle de l'éclairage d'un élément. Comme on l'a dit, cette représentation se fait usuellement à l'aide de bases de fonctions qui sont polynomiales de faible degré (0, 1 ou 2). Par conséquent, il est nécessaire de subdiviser les surfaces de la scène jusqu'à obtenir des éléments sur lesquels l'éclairage est à peu près correctement approximé.

En règle générale, le maillage est raffiné progressivement en subdivisant uniquement les éléments pour lesquels l'erreur commise, estimée par diverses heuristiques, est trop grande. Les principales erreurs sont induites par les contours d'ombre qui correspondent à des discontinuités de l'éclairage ou de sa dérivée (voir figure 2.6). De telles discontinuités s'approximent difficilement et, pire encore, toute imprécision dans leur description est généralement choquante visuellement. En effet, les zones d'ombre et de lumière sont une des seules informations dont dispose l'oeil pour apprécier les volumes représentés par une image 2D. Aussi, si ces ombres ne sont pas correctement rendues, il peut s'ensuivre une impression d'incohérence ou une mauvaise compréhension de la scène visualisée [25, chapitre 6.2.5].

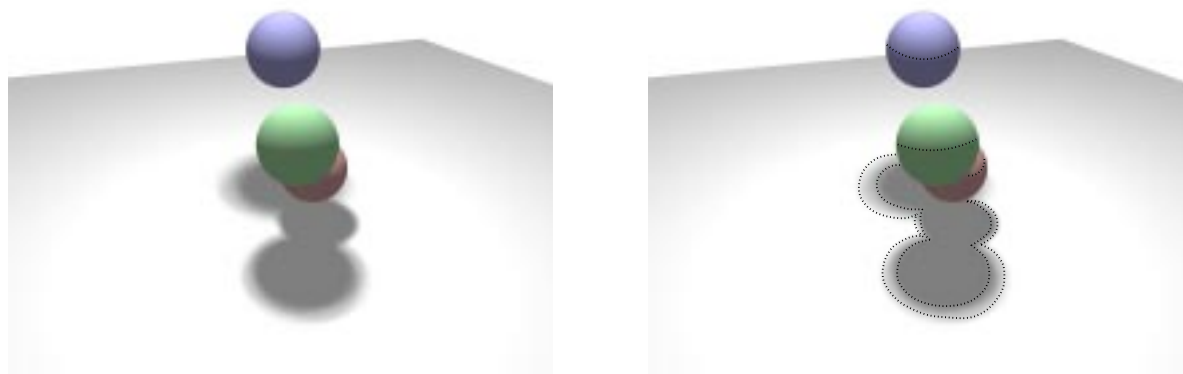


FIG. 2.6. Lumière, pénombre et ombre (à gauche) et les limites d'ombre associées (à droite).

Des travaux récents (*cf.* Cuny et al. [27]) ont montré que le recours à des bases de fonctions de degré plus élevé réduit nettement ces imprécisions. Néanmoins, aussi élevé que soit cet ordre, il est impossible de restituer fidèlement les ombres et pénombres. Idéalement, la solution à ce problème serait de subdiviser les surfaces le long de ces contours d'ombre, obtenant ainsi ce que l'on nomme un *maillage de discontinuité* (voir figure 2.6).

En pratique, aucune méthode ne permet actuellement le calcul d'un maillage de discontinuité pour des scènes de taille conséquente, principalement faute de pouvoir calculer efficacement des contours d'ombre et de pénombre sur un élément de surface donné. Or ce problème porte fondamentalement sur la visibilité : les frontières entre lumière et pénombre puis entre pénombre et ombre correspondent aux points de la surface où la visibilité d'une source de lumière change (passant d'invisible à partiellement visible, ou de partiellement visible à totalement visible).

2.2 Approche globale de ces trois problèmes

Les trois exemples que nous venons de voir ont en commun de s'exprimer en terme de propriétés de certains ensembles de rayons. Notre objectif dans cette section est de montrer que

la plupart de ces propriétés peuvent être encodées dans une même structure. Pour cela, nous considérons une partition de l'espace des rayons en paquets "voyant la même chose". La structure décrite ici n'est en rien standard, et nous nous en servons uniquement à des fins d'illustration. La structure que nous étudions effectivement dans cette thèse sera introduite au chapitre 4.

Afin de conserver dans cette introduction un propos simple, on suppose que les objets de la scène sont aussi réguliers que possible et l'on ne décrit la structure qu'en termes généraux laissant parfois un certain flou. Nous souhaitons esquisser l'idée générale de l'approche sans nous appesantir sur des définitions précises et rigoureuses.

Nous décrivons tout d'abord cette structure brièvement, puis nous nous en servons pour exprimer nos trois exemples de problèmes. Nous espérons ainsi souligner les similarités entre ces problèmes et indiquer que la structure considérée encode bien l'essentiel des informations de visibilité d'une scène.

Une partition de l'espace des rayons

Tout rayon est décrit de manière unique par son origine (un point de \mathbb{R}^3) et sa direction (un point de \mathbb{S}^2). L'espace des rayons est donc $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, un espace de dimension 5.

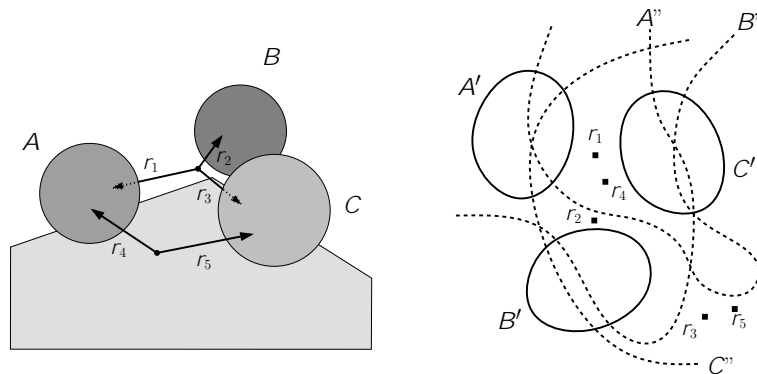


FIG. 2.7. Partition de l'espace des rayons suivant la visibilité.

Considérons un ensemble d'objets en 3D. À chaque rayon r on associe l'objet $v(r)$ qu'il voit, c'est-à-dire le premier qu'il intersecte, avec par convention $v(r) = \infty$ pour les rayons n'intersectant aucun objet. L'espace des rayons est alors partitionné en paquets rayons voyant la même chose, c'est-à-dire ayant la même image par la fonction v . C'est cette partition, illustrée par la figure 2.7, que l'on va étudier.

La vue d'un rayon en déplacement change à deux occasions (voir figure 2.8) : quand son origine traverse le bord d'un objet ou quand il devient tangent à un objet qui soit était visible, soit le devient. Notre partition peut donc être vue comme l'arrangement, dans l'espace des rayons, de deux hypersurfaces par objet 3D : la première représente l'ensemble des rayons dont l'origine se trouve sur le bord de l'objet et la seconde l'ensemble des rayons tangents à cet objet (et n'étant pas bloqués par un troisième objet entre leur origine et le point de tangence). C'est en quelque sorte un *arrangement dual* de l'ensemble des objets 3D.

Une *cellule* de notre partition est une composante connexe de rayons voyant la même chose. Intuitivement, une cellule n'est pas nécessairement une boule topologique, mais peut au contraire avoir des trous comme l'illustre la figure 2.9. Bien entendu, plusieurs cellules peuvent correspondre à des rayons voyant le même objet. Les cellules sont des ensembles de dimension maximale, à savoir 5.

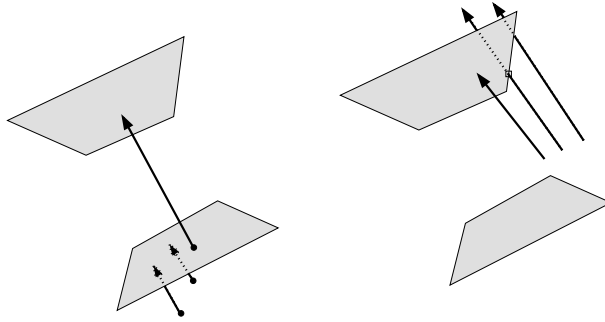


FIG. 2.8. Rayons issus d'un objet et rayons tangents.

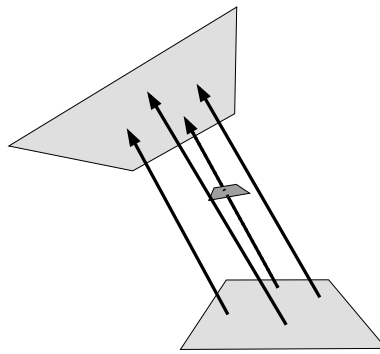


FIG. 2.9. Cellule trouée.

Une *face* de notre partition est une frontière entre deux cellules ou plus. Une face est un ensemble de rayons satisfaisant une famille de conditions, c'est-à-dire l'intersection d'un certain nombre d'hypersurfaces. La dimension d'une face est, génériquement, $5 - k$ où k est le nombre de conditions satisfaites par les rayons de la face.

On désigne par *face propre* une face définie par une condition sur l'*origine* et une ou plusieurs conditions de *tangence*. La dimension d'une face propre ayant k conditions de tangence est donc $4 - k$. Par convention, avoir son origine à l'infini est une condition de type origine.

Retour sur les problèmes initiaux

Reformulons maintenant les trois problèmes précédents sous l'angle de notre partition de l'ensemble des rayons.

Tout d'abord, lancer un rayon revient à déterminer la cellule à laquelle il appartient (*cf.* figure 2.10). Ce type de problème, classique en géométrie algorithmique, est connu sous le nom de *localisation* d'un point. Dans de nombreux cas, il existe des structures de données permettant de localiser efficacement un point, même si elles sont difficiles à mettre en œuvre en pratique pour des surfaces courbes en dimension 5 ; pour un tour d'horizon de ces travaux, nous invitons le lecteur à consulter la synthèse d'Agarwal et Erickson [3]. Il est intéressant d'observer que cette approche simplifie la question du lancer d'un grand nombre de rayons proches. Prenons par exemple le cas du *ray-tracing*. Les rayons lancés correspondent à une discrétisation d'un ensemble 2D de rayons, ceux qui passent à la fois par le point de vue et l'écran virtuel (*cf.* figure 2.11). Cet ensemble 2D de rayons correspond à une surface de dimension 2 dans l'espace des rayons qu'il s'agit d'intersecter

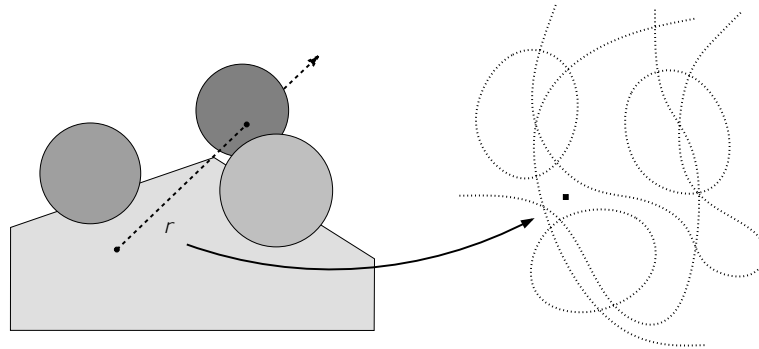


FIG. 2.10. Lancer d'un rayon ramené à un problème de localisation.

avec notre partition. Cette approche a l'avantage d'être sensible à la complexité de la vue (*i.e.* le nombre de cellules rencontrées par la surface 2D) et à peu près indépendante du nombre de rayons à lancer (qui n'intervient que lorsque l'on discrétise l'intersection au final).

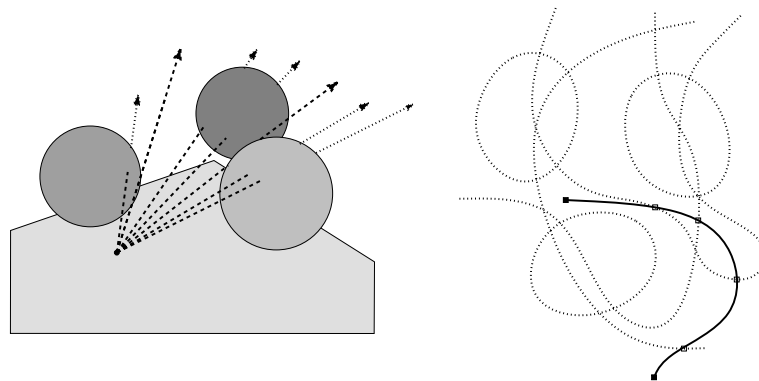


FIG. 2.11. Lancer un ensemble de rayons revient à intersecter un ensemble (ici une courbe) avec la subdivision.

Ensuite, les facteurs de forme pour des fonctions de base constantes apparaissent dans notre partition comme rapport de mesure de faces propres. En effet, considérons deux objets, un émetteur et un récepteur. Les rayons qui quittent l'émetteur forment plusieurs faces (propres) de notre partition : une par composante connexe de rayons voyant le même objet. Le volume total de ces faces mesure (deux fois) celui des droites intersectant l'émetteur. Parmi ces faces, une ou plusieurs correspondent à des rayons voyant le récepteur ; leur mesure représente (deux fois) le volume des droites intersectant l'émetteur et le récepteur. Les rayons des faces que l'on considère doivent vérifier une unique condition : avoir leur origine sur la surface de l'émetteur. Les facteurs de forme, pour des fonctions de base constantes, apparaissent donc comme les volumes de cellules de dimension 4 de notre partition.

La notion de volume dans l'espace des rayons est ici la mesure induite par la mesure sur les droites. En pratique, mesurer ce volume reste problématique, et ce quelque soit la manière dont notre problème est formulé. Cependant, l'ensemble à mesurer est décrit exactement. De plus, les facteurs de forme à mettre à jour lors du déplacement d'un objet apparaissent clairement. En effet, le déplacement de l'objet induit un déplacement des 2 hypersurfaces associées. Localement, seules les cellules et les faces voisines de ces hypersurfaces sont modifiées. Plus généralement,

les changements de visibilité structurels dans la scène apparaîtront comme des changements combinatoires occasionnés, dans notre partition, par le déplacement de ces hypersurfaces. Un cadre théorique permettant de maintenir efficacement des structures basées sur des objets en mouvement a été développé : ce sont les *structures de données cinématiques* (voir par exemple la synthèse de Guibas [49]). Ce cadre, appliqué à la partition de l'espace des rayons, pourrait ainsi fournir un biais par lequel approcher le problème de la radiosité dynamique.

Enfin, les contours d'ombres sont induits par les rayons extrémaux, *i.e.* satisfaisant des contraintes de tangence. Pour chaque objet, ces courbes apparaissent comme les traces des rayons issus de cet objet et appartenant à des faces propres de dimension 1. Ainsi, les contours d'ombre sont induits par la subdivision de l'espace des rayons. Disposer, lors du calcul de radiosité, de notre partition de l'espace des rayons permettrait d'obtenir simplement le contour des ombres, ce qui est actuellement le verrou majeur pour le développement de maillages de discontinuité.

Événements visuels et ensembles de droites tangentes

Pour traiter ces trois exemples, les informations que nous avons utilisées sont en fait les faces propres de notre partition. Ces faces correspondent, dans d'autres formalismes, à ce que l'on désigne plus largement sous le nom d'*événements visuels*. Les événements visuels sont sous-jacents à diverses structures de données utilisées pour traiter les problèmes de visibilité, comme le complexe de visibilité, le graphe d'aspect et la structure de lancer de rayon de Pellegrini. La synthèse du chapitre 5 revient plus longuement sur cette ubiquité.

Les événements visuels peuvent être représentés par certains ensembles de droites : intuitivement, il s'agit des droites qui supportent les rayons des faces de notre décomposition. La géométrie des ensembles de droites de \mathbb{R}^3 est assez peu intuitive puisqu'il s'agit d'un espace de dimension 4. Cela explique sans doute pourquoi la structure globale des problèmes de visibilité est aujourd'hui encore mal comprise.

2.3 Deux approches fondamentalement différentes

Les exemples considérés dans cette introduction suscitent trois observations. Tout d'abord, certains problèmes de visibilité restent mal résolus malgré des recherches actives depuis de nombreuses années. Ensuite, une traduction de ces problèmes dans l'espace des rayons, par une sorte de dualité, leur ouvre de nouvelles perspectives. Enfin, ces problèmes de visibilité, au demeurant très distincts, exploitent essentiellement la même information : les événements visuels.

Le terme d'*approche globale* des questions de visibilité désigne l'idée de pré-calculer hors ligne les informations de visibilité d'une scène et de les organiser afin de ramener la plupart des problèmes de visibilité à de simples requêtes. Le terme *global* fait donc référence d'une part à un calcul *systématique* des informations de visibilité par opposition aux calculs ponctuels, à la demande, que l'on trouve dans l'approche classique et d'autre part à un traitement *unifié* des différents problèmes.

Dans le cadre de la visibilité, comparer calcul en ligne et pré-calcul revient à peu de chose près à comparer une algorithmique *simple* tirant parti de la capacité de *calcul* et une algorithmique *élaborée* exploitant une grande capacité de *stockage*.

D'un côté, les méthodes de calcul en ligne pour les problèmes de visibilité ont connu depuis les années 70 un développement spectaculaire principalement dû à leur simplicité. En effet, de nombreux algorithmes ont comme primitive le lancer de rayon, pour lequel il n'est besoin que de pouvoir intersecter un rayon avec un triangle. Cette simplicité a permis la mise au point de matériel dédié, par exemple des cartes graphiques. En retour, ce matériel a rendu quasiment

inutile une algorithmique élaborée : le plus souvent, des heuristiques simples permettent de réduire efficacement tout problème à quelque chose de gérable par une implantation matérielle.

D'un autre côté, les méthodes de calcul global recourent à une algorithmique plus sophistiquée et à un gros espace de stockage. En contrepartie, ces méthodes tirent parti de la cohérence spatiale, et peuvent fournir pour certains problèmes des solutions exactes là où le calcul en ligne ne sait qu'approximer.

Pendant longtemps, la simplicité et le stockage réduit des méthodes de calcul en ligne ont fait le choix logique pour traiter en pratique les problèmes de visibilité. La mise au point de structures améliorant les performances dans le cas le pire semblait alors plutôt une question théorique sans réelle perspective applicative. Deux changements ont récemment relancé l'intérêt des méthodes de visibilité globales. D'une part, le temps passé en calcul de visibilité devient considérable au point de constituer le goulot d'étranglement des systèmes de rendu actuels. Par exemple, les requêtes de visibilité point-à-point constituent plus de la moitié du temps de calcul d'un éclairage par radiosité. De plus, le développement de processeurs dédiés au graphisme plus polyvalents laisse entrevoir la possibilité de mettre en œuvre efficacement une algorithmique plus élaborée [58]. D'autre part, certains problèmes comme le lancer de paquets de rayons, le calcul d'un maillage de discontinuité ou de facteurs de forme de scènes dynamiques demeurent aujourd'hui sans solution en ligne satisfaisante.

Les deux approches des problèmes de visibilité, classique et globale, sont fondamentalement, voire philosophiquement, différentes. Elles ne sont cependant ni antagonistes, ni incompatibles, et les techniques globales peuvent compléter plutôt que remplacer les techniques en ligne. Un exemple particulièrement frappant de cette complémentarité est le calcul d'un maillage de discontinuité. D'un côté, il est possible, en théorie, de calculer globalement tous les ensembles de rayons susceptibles de délimiter des contours d'ombre. Cependant, il est considérablement plus difficile de ne retenir que les ensembles de rayons importants, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux ombres visuellement significatives, afin d'éviter une subdivision trop fine qui ferait exploser la taille des maillages. D'un autre côté, les techniques en ligne parviennent à déterminer facilement les régions où apparaissent les ombres significatives puisqu'elles y induisent d'importantes erreurs dans la représentation de l'éclairage. En revanche, il est difficile de déterminer efficacement en ligne les contours exacts de ces ombres. Pour ce problème, les deux approches, globale et en ligne, apparaissent donc étonnamment complémentaires.

Dans ce contexte, l'étude de l'approche globale des problèmes de visibilité dans une perspective pratique est donc naturelle. C'est l'objet de cette thèse.

Chapitre 3

Contributions

Nous précisons maintenant le contenu de cette thèse : les problèmes étudiés (section 3.1), les réponses apportées (section 3.2) et leur organisation au sein de ce document (section 3.3).

3.1 Questions étudiées

Tout d’abord, on souhaite estimer de manière réaliste l’espace requis pour le stockage. Ce problème est fondamental car une structure de trop grosse taille n’a qu’un intérêt limité en pratique : la taille des scènes considérées en infographie rend inexploitable une méthode basée sur un stockage d’ordre plus que quadratique. Or cette question n’a pour l’instant pas de réponse claire. Les bornes théoriques connues concernent pour la plupart le cas le pire : d’ordre quartique, elles sont réalisées par des exemples pathologiques. Les rares mesures effectuées sur des scènes concrètes tendent à modérer ce pessimisme, mais sont pour l’instant étayées par très peu de résultats théoriques.

Ensuite, il est crucial de mettre au point des algorithmes simples, efficaces et robustes de calcul de structures globales de visibilité. En effet, les algorithmes existants sont soit trop compliqués pour être implantés, soit trop inefficaces pour être appliqués à des scènes de taille réaliste et souffrent, en plus, de problèmes de robustesse.

La mise au point d’une algorithmique performante présuppose une meilleure compréhension des dégénérescences affectant les problèmes de visibilité. Les méthodes de calcul actuelles traitent mal ou pas les configurations d’objets dégénérées qui sont pourtant incontournables dans les applications. Les difficultés sont d’identifier de telles configurations et de comprendre leur impact sur les questions de visibilité.

Tous ces aspects sont étroitement liés. Le manque d’efficacité et de robustesse de l’algorithmique restreint l’étude pratique des structures de visibilité globale, et en particulier de leur taille. Le faible nombre d’observations pratiques laisse les bornes théoriques sur la taille de ces structures en décourager l’étude. Il s’agit donc d’un cercle vicieux.

3.2 Contributions

Dans cette thèse, nous présentons des contributions aux différentes questions soulevées. Nous montrons qu’en théorie, la taille du complexe de visibilité n’est pas nécessairement dissuasive et posons les bases d’une algorithmique efficace et robuste.

Taille. Nous avons d’une part établi que la taille du complexe de visibilité croît en moyenne linéairement avec le nombre d’objets s’ils sont distribués uniformément [30]. Ce résultat a été obtenu en premier lieu pour des distributions uniformes de sphères de même rayons, puis a été généralisé dans plusieurs directions : distribution de Poisson, polytopes “épais”, polygones “épais”. D’autre part, nous avons prouvé que dans le cas le pire, la taille du complexe de visibilité de k polytopes de complexité totale n est $\Theta(n^2k^2)$ [16, 15]. Ces résultats font l’objet des Chapitres 6 et 7.

Nos résultats améliorent substantiellement les bornes précédemment connues. Ils montrent en outre qu’une scène formée d’objets structurés est sensiblement moins complexe, du point de vue de la visibilité, qu’une soupe de polygones, modèle typique générant des situations pathologiques. Cela suggère que les exigences de stockage pour le complexe de visibilité ne sont pas nécessairement prohibitives et que les exemples réalisant ces bornes sont en fait peu représentatifs.

Dégénérescences. Nous avons amélioré la compréhension des dégénérescences liées aux problèmes de visibilité sur deux points.

Notre borne sur la taille du complexe dans le cas le pire [16] prend explicitement en compte des polytopes arbitraires. Ceux-ci peuvent par exemple s’intersecter ou avoir des arêtes alignées, coplanaires ou en commun.

Nous avons donné une caractérisation élémentaire des configurations de 4 sphères de \mathbb{R}^3 admettant une infinité de droites tangentes [14]. Ce résultat, présenté au Chapitre 11, conclue la description des dégénérescences pour les problèmes de visibilité dans une famille de sphères et de polytopes et répond à une question géométrique restée sans réponse depuis le début des années 90.

Structure. Nous avons mis en évidence des structures d’arrangements sous-jacentes au complexe de visibilité [46]. Plus précisément, nous avons montré que des groupes de cellules du complexe sont homéomorphes aux cellules d’un arrangement d’hypersurfaces dans l’espace des droites qui réalisent une condition de signe donnée. Nous avons ensuite utilisé ces structures pour établir une borne sur des degrés d’incidence. Enfin, nous avons explicité ces arrangements pour des objets semi-algébriques, généralisant l’approche développée par Pellegrini pour les problèmes de visibilité dans un ensemble de triangles [69]. Ces travaux sont exposés au Chapitre 9.

Algorithmique. Sur la question des méthodes de calcul, nous avons effectué deux avancées significatives.

Nous avons proposé un algorithme calculant le *squelette de visibilité* d’une famille de k polytopes de complexité totale n en temps $O(n^2k^2 \log n)$. Cet algorithme a un temps d’exécution quasi-optimal dans le cas le pire est suffisamment simple et pratique pour être implanté. De plus, il est robuste : il peut prendre en entrée des polytopes arbitraires. Cet algorithme est présenté au Chapitre 8.

Nous avons également mis au point un algorithme simple et robuste de calcul du complexe de visibilité d’une collection d’objets courbes [46]. Cet algorithme exploite les structures d’arrangements sous-jacentes au complexe et utilise un nombre restreint d’opérations classiques de géométrie algébrique réelle qui sont actuellement au centre de recherches actives. Cet algorithme fait l’objet du Chapitre 10.

En résumé. Après avoir remis en cause l’idée que la taille d’une structure globale de visibilité est nécessairement prohibitive, nous avons proposé des algorithmes simples, robustes et, pour au

moins l'un d'entre eux, efficaces pour calculer le complexe ou le squelette de visibilité en nous basant sur une meilleure compréhension de sa structure et de ses dégénérescences.

Autres directions. Ces études nous ont amené à travailler sur des problèmes qui n'ont qu'un lointain rapport avec la visibilité, le sujet principal de cette thèse. Nos travaux sur les permutations géométriques [22, 23], les configurations de quadriques complexes tangentes, le long d'une courbe, à une même quadrique [13] ou encore l'étude de la taille de la silhouette d'un polytope [6] ne sont donc pas inclus dans cette thèse. Cependant, nous y ferons référence aux endroits où apparaissent les liens entre les problèmes de visibilité et ces questions.

3.3 Organisation

L'exposé de nos contributions est organisé en trois parties, chacune centrée sur la mise en œuvre d'une technique d'étude particulière. Les résultats relatifs aux diverses questions évoquées (taille, dégénérescences et calcul) se trouvent donc dispersés dans ce document.

Tout d'abord, le chapitre 5 conclue cette introduction par un état de l'art des sujets abordés dans cette thèse : les structures de visibilité globales, leurs bornes de complexité et l'étude de leurs dégénérescences.

La partie II présente l'étude de la taille moyenne du complexe de visibilité. Nous y mettons en œuvre des techniques géométriques élémentaires pour estimer la probabilité que 4 objets dont les positions sont fixées aléatoirement admettent une droite tangente commune sans qu'aucun autre objet n'intersecte la droite entre les points de tangence. L'intérêt de cette partie réside essentiellement dans la teneur du résultat : en moyenne, pour une distribution uniforme, la visibilité est un problème local et un objet n'interagit visuellement qu'avec un nombre borné d'autres objets.

La partie III expose nos résultats sur la visibilité dans une famille de polytopes. Nous commençons par établir notre borne sur la taille, dans le cas le pire, du complexe de visibilité d'une famille de k polytopes totalisant n arêtes. Nous décrivons ensuite notre algorithme de calcul du squelette de visibilité. Les techniques utilisées sont classiques en géométrie algorithmique : balayage et amortisation.

Enfin, la partie IV rassemble nos résultats sur la visibilité au sein d'objets courbes et notamment algébriques. Nous y proposons un cadre d'étude de la visibilité au sein d'objets convexes algébriques ou semi-algébriques via des structures d'arrangements de surfaces courbes. Nous décrivons ensuite un algorithme de calcul du squelette et du complexe de visibilité qui découle naturellement de ce cadre. Enfin, nous proposons une description élémentaire des dégénérescences visuelles pour des scènes formées de sphères, caractérisant notamment les quadruplets de sphères qui admettent une infinité de droites tangentes communes.

Chapitre 4

Le complexe de visibilité

La décomposition de l'espace des rayons introduite au chapitre 2 est essentiellement une esquisse et de nombreux travaux ont repris et amélioré cette approche. Il s'agit du complexe et du squelette de visibilité, du graphe d'aspect et de la structure de lancer de rayon de Pellegrini. Notre étude est principalement axée sur le complexe de visibilité, mais ce cadre est suffisamment général pour que nos résultats s'appliquent à d'autres structures de visibilité globale, comme nous allons le voir.

Le *complexe de visibilité* a été introduit en 1996 par Pocchiola et Vegter pour étudier les problèmes de visibilité dans le plan [7, 24, 76, 77], puis repris dans l'espace par Durand et al. [36, 40]. Ces deux points de vue présentent en fait des structures légèrement distinctes. Nous présentons ces deux définitions en les reformulant afin de pouvoir les comparer (sections 4.1, 4.2 et 4.3).

Par ailleurs, pour traiter de manière plus efficace certains problèmes, Durand et al. [38, 39] ont étudié le 1-squelette du complexe de visibilité, c'est-à-dire le graphe formé par ses faces de dimension 0 et 1. Nous décrivons, en section 4.4, ce squelette ainsi que la version approchée proposée par Duguet et Drettakis [35].

Enfin, en section 4.5, nous précisons le cadre dans lequel se situe le travail de cette thèse, c'est-à-dire les définitions de complexe et de squelette de visibilité que nous adoptons.

4.1 Le complexe de Pocchiola et Vegter

Nous donnons ici la définition du complexe de visibilité introduite par Pocchiola et Vegter [77] pour les objets du plan. Nous présentons en fait une formulation équivalente [76] qui facilite la comparaison avec le complexe de Durand et al.

Des rayons alignés et d'origines mutuellement visibles voient le même objet (*cf.* figure 4.1), aussi est-il inutile de stocker séparément l'information de visibilité pour chacun d'entre eux. Prolongeant ce raisonnement, Pocchiola et Vegter ont défini une relation d'équivalence sur les rayons du plan :

$$(p, \vec{u}) \sim (q, \vec{v}) \iff \begin{cases} \text{les rayons } (p, \vec{u}) \text{ et } (q, \vec{v}) \text{ sont supportés par la même droite orientée} \\ \text{et} \\ \text{le segment } pq \text{ n'intersecte l'intérieur d'aucun objet} \end{cases}$$

Les rayons d'une même classe d'équivalence voient la même chose au sens où le premier objet dont ils intersectent l'intérieur est le même (éventuellement aucun). Le complexe de visibilité est défini sur le quotient de l'espace des rayons par \sim , espace que nous notons \mathcal{X} .

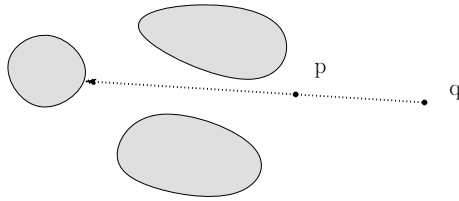


FIG. 4.1. Rayons ayant la même vue.

Le *complexe de visibilité* d'objets de \mathbb{R}^2 est la partition de l'espace \mathcal{X} par les courbes correspondant aux ensembles de classes de rayons tangents aux objets. Les *sommets* du complexe, les classes de rayons tangents à deux objets, découpent ces courbes en *arcs*. Lorsqu'un rayon franchit un de ses arcs sa vue *avant ou arrière* change (cf. figure 4.2).

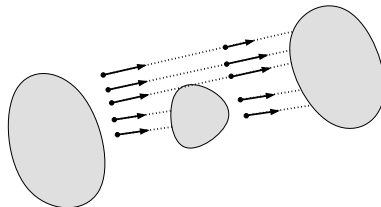


FIG. 4.2. Les cellules du complexe peuvent concerner la vue avant ou la vue arrière.

L'espace \mathcal{X} est identifiable à l'espace des droites au voisinage de toute classe qui n'est pas sur un arc. En fait, il s'agit d'un recollement de feuilletés, des variétés à bord de dimension 2 (la dimension de l'espace des droites de \mathbb{R}^2), le long de ses arcs (voir figure 4.3).

La généralisation en dimension 3 du complexe de Pocchiola et Vegter est immédiate : il s'agit du quotient de l'espace des rayons de \mathbb{R}^3 par \sim , partitionné par les hypersurfaces de classes de segments tangents à un objet. On obtient alors un recollement de variétés à bord de dimension 4 (la dimension de l'espace des droites de \mathbb{R}^3).

4.2 Le complexe de Durand, Drettakis et Puech

La définition du complexe de visibilité en dimension 3 donnée par Durand et al. [40] n'est pas, au premier abord, une simple traduction du complexe 2D de Pocchiola-Vegter.

D'une part, l'espace topologique sur lequel est construit le complexe est l'espace des *segments libres maximaux*. Un segment est dit *libre* s'il n'intersecte l'intérieur d'aucun objet de la scène et est de plus *maximal* s'il n'est inclus dans aucun segment libre autre que lui-même. Depuis tout point d'un segment libre maximal, la vue suivant sa droite support est la même, et ce dans les deux directions. Durand et al. [40] définissent le complexe comme la partition de cet espace en composantes connexes de segments touchant les mêmes objets.

Selon cette définition, une cellule de dimension 4 du complexe est donc une composante connexe de segments libres maximaux touchant les mêmes objets, éventuellement l'infini, en leurs extrémités. Une face de dimension $k = 0, \dots, 4$ est une composante connexe (de dimension k) de segments libres maximaux tangents à un même ensemble d'objets (au moins $4-k$, éventuellement plus si les objets sont en position dégénérée). Cependant, dans la suite de leur article [40], Durand et al. ajoutent implicitement d'autres subdivisions à cette définition du complexe : des faces

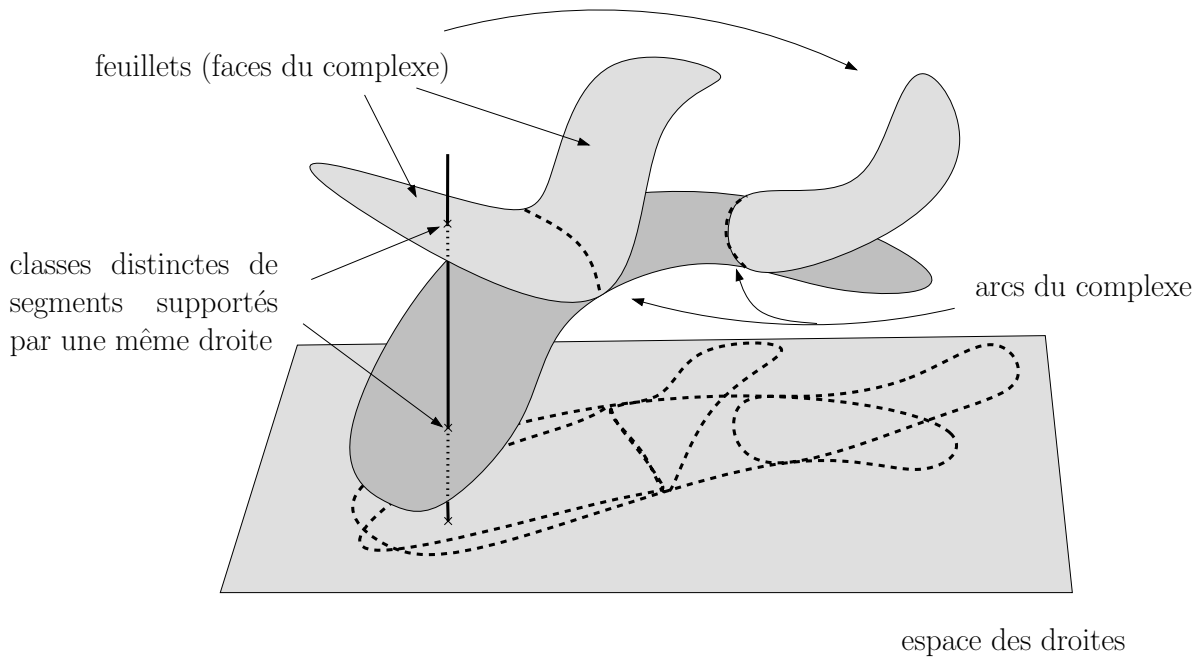


FIG. 4.3. Le complexe de visibilité 2D : un recollement de feuillets 2D.

associées aux événements visuels et un maillage des faces du complexe dans le cas où les objets sont des polyèdres.

Tout d'abord, Durand et al. souhaitent que le complexe de visibilité encode les *surfaces d'événement visuel*. Ces surfaces sont généralement définies dans le cas d'objets transparents quelconques (nous reproduisons cette définition en Annexe B). Pour garder un propos simple et proche du cas des objets convexes opaques qui nous intéresse en pratique, nous en donnons ici une définition plus intuitive. Considérons une sphère S centrée en un point c de \mathbb{R}^3 . Par un point p de S passe un unique rayon r_p issu de c . En associant à chaque point p l'objet vu par le rayon r_p , on partitionne la sphère S en régions correspondant à des composantes connexes de rayons issus de c et voyant le même objet : la *carte de visibilité* de c . Quand le point c se déplace, sa carte de visibilité évolue elle aussi mais sa combinatoire reste la plupart du temps inchangée. Les surfaces d'événement visuel sont les surfaces qui partitionnent¹ l'espace \mathbb{R}^3 en régions (connexes) dans lesquelles les cartes de visibilité ont la même structure combinatoire. L'énumération de ces surfaces est difficile dans le cas d'objets quelconques. Cependant, si les objets sont convexes et lisses par morceaux, alors il n'existe que deux types de surfaces d'événements visuel (cf. Petitjean et al. [74]) balayées respectivement par les segments libres maximaux tangents à trois objets (surfaces notées T+T+T) et les segments libres maximaux tangents à deux objets dans un plan bitangent à ces deux objets (surfaces notées T++T). Ces deux cas sont représentés par la figure 4.4.

L'ensemble de segments libres maximaux balayant un T+T+T est une face du complexe tel que Durand et al. l'ont défini. Par contre, rien ne distingue, dans leur complexe, les segments libres maximaux balayant une surface de type T++T dans l'ensemble des segments libres maximaux tangents à ces deux objets. Autrement dit, les ensembles de segments libres maximaux balayant les surfaces d'événements visuels sont des courbes dans l'espace sur lequel est construit

¹Cette partition est celle qu'encode le *graphe d'aspect*, cf. section 5.5.2.

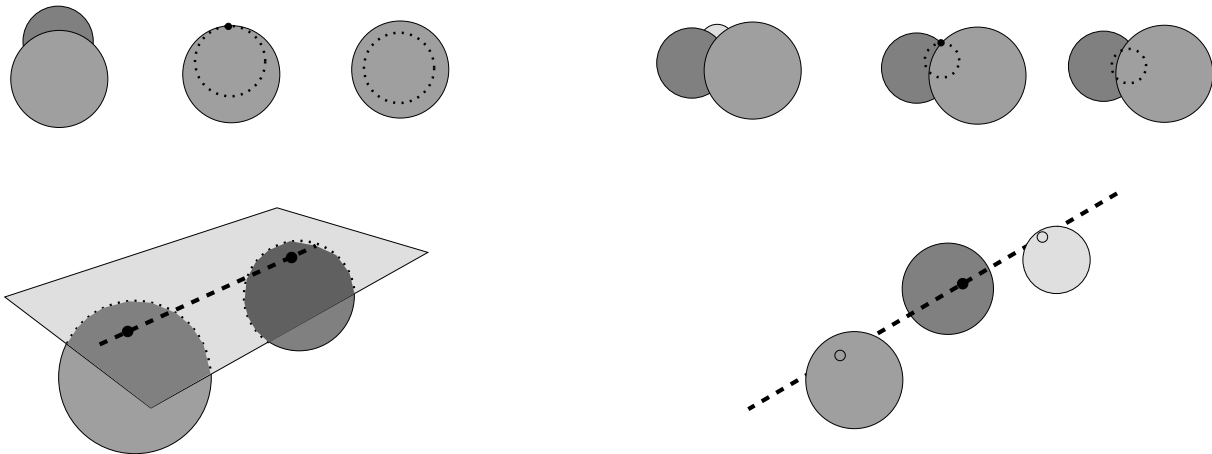


FIG. 4.4. Segments libres maximaux induisant des surfaces d'événement visuel pour les objets convexes et lisses par morceaux : $T++T$ (à gauche) et $T+T+T$ (à droite).

le complexe ; certaines de ces courbes, balayant les $T+T+T$, sont des arêtes du complexe tandis que d'autres, balayant les $T++T$, non.

Pour que le complexe de visibilité encode tous les événements visuels, Durand et al. ajoutent donc deux nouveaux types de faces, notées :

$T++T$, pour les ensembles 1D de segments tangents à deux objets dans un de leurs plans bitangents, et

$T++T+T$, pour un segment tangent à trois objets dans un plan bitangent à deux d'entre eux.

Notons qu'un $T++T+T$ est un sommet coupant un arc $T++T$ à son intersection avec une face de dimension 2. Ces nouveaux types de faces subdivisent donc les 2-faces du complexe défini initialement.

Ensuite, lorsque les objets sont des polyèdres, Durand et al. ont considéré d'autres subdivisions des faces. L'ensemble des supports des segments libres maximaux associés à une face n'est pas nécessairement invariant (cf. figure 4.5). Or, pour manipuler une face du complexe, il est souhaitable qu'elle soit simple à décrire, et notamment formée de segments s'appuyant sur exactement les mêmes supports géométriques. Pour se ramener à des faces ayant cette propriété, et observant qu'un segment ne change d'arête support qu'en passant par un sommet d'un polyèdre, Durand et al. ont introduit 4 types de faces supplémentaires notées :

V pour les ensembles de segments libres maximaux passant par un sommet, subdivisant une 3-face,

VE pour les ensembles de segments libres maximaux passant par un sommet et une arête, subdivisant une 2-face,

VV pour les ensembles de segments libres maximaux passant par deux sommets, subdivisant un arc de type VE,

VEE pour les ensembles de segments libres maximaux passant par un sommet et deux arêtes, subdivisant une 1-face.

Ces faces supplémentaires induisent donc, elles aussi, un *maillage* des faces du complexe défini initialement.

Prolongeant ce raisonnement, Durand et al. ont décrit les éléments du complexe de visibilité via leurs *générateurs*, i.e. leurs supports géométriques (sommets, arêtes voire faces). En pratique,

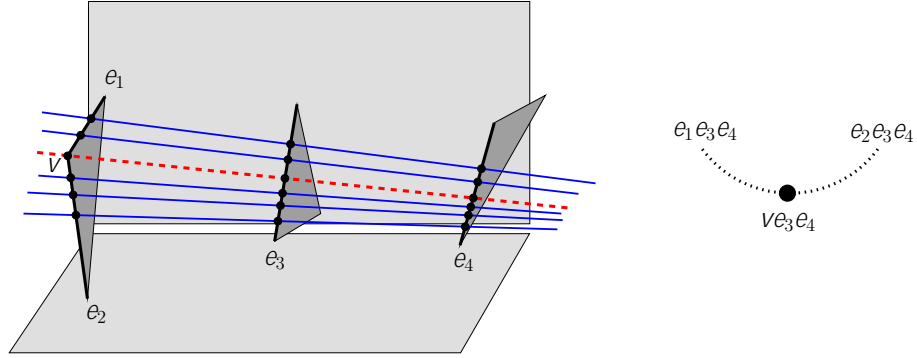


FIG. 4.5. Une famille de segments libres maximaux tangents à 3 objets avec changement d'arêtes support (à gauche) forme deux arcs du squelette et un sommet (à droite).

dans les études de complexité et la description de leurs algorithmes [36, 38, 39, 40] c'est ce point de vue que Durand et al. adoptent, et non pas leur définition initiale. C'est donc cette partition des segments libres maximaux en fonction des événements visuels et des sommets et arêtes touchés que nous désignons sous le nom de *complexe de Durand et al.*

4.3 Comparaison de ces deux définitions

Les deux définitions que nous venons de voir (en sections 4.1 et 4.2) présentent le complexe de visibilité comme une partition d'un espace par une collection de surfaces. Voyons en quoi elles diffèrent.

L'espace. Les espaces sous-jacents à ces deux constructions sont en fait très proches. Une manière classique de travailler dans un espace quotient est de définir un représentant naturel pour chaque classe d'équivalence. Dans l'espace introduit par Pocchiola et Vegter, chaque classe d'équivalence contient un unique rayon maximal pour l'inclusion, éventuellement une droite orientée². Si l'on interrompt ce rayon maximal à sa première intersection avec un objet de la scène, on obtient un segment libre maximal. Ainsi, l'espace des segments libres maximaux est, à peu de choses près, le choix d'un représentant, maximal pour l'inclusion, par classe de rayons équivalents. Ces espaces présentent cependant deux différences.

D'une part, la définition de Pocchiola et Vegter partitionne l'espace des rayons en fonction de leur vue *avant et arrière*. Il s'ensuit que chaque cellule du complexe vu dans l'espace des segments libres maximaux est représentée deux fois dans le complexe construit sur l'espace quotient : une fois pour chaque orientation consistante de ses segments. À l'inverse, l'espace des segments ne prend pas en compte l'orientation des rayons, c'est-à-dire que chaque segment libre maximal représente *deux* classes d'équivalence (*cf.* figure 4.6). La redondance apparaissant dans le complexe défini par Pocchiola et Vegter peut sembler redondante.

D'autre part, ces deux espaces ont des topologies légèrement différentes. La topologie de l'espace des segments libres maximaux est induite par celle de l'espace des segments, c'est-à-dire des bi-points. En particulier, un segment libre maximal se déplace continûment si et seulement

²Une classe dont les rayons sont contenus dans une droite n'intersectant aucun objet n'admet pas, à proprement parler, d'*élément maximal* pour l'inclusion. Dans ce cas le représentant que nous considérons est la droite qui contient ces rayons et de même orientation qu'eux.

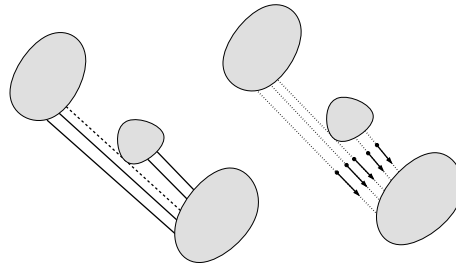


FIG. 4.6. L'espace des segments n'encode pas l'orientation des rayons qu'il "représente".

si ses extrémités se déplacent continûment. Ainsi, les composantes connexes de segments libres maximaux qui s'appuient sur des paires d'objets disjoints sont, dans l'espace des segments, déconnectées. En revanche, les mêmes ensembles vus dans l'espace quotient peuvent être connectés : il suffit qu'un rayon puisse passer continûment d'une cellule à l'autre. D'ailleurs, si les objets sont convexes, bornés et disjoints, l'espace quotient associé est connexe tandis que l'espace des segments libres maximaux a au moins autant de composantes connexes que de paires d'objets visibles. La figure 4.7 illustre cette nuance : le segment maximal en trait pointillé (à gauche) correspond à une discontinuité dans l'espace des segments maximaux.

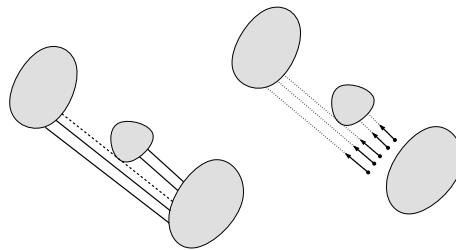


FIG. 4.7. Discontinuité apparaissant dans l'espace des segments mais pas dans l'espace des classes de rayons.

Cependant, ces discontinuités correspondent à des ensembles de segments libres maximaux tangents à des objets de la scène. Il s'agit donc de faces du complexe qui sont, de toute façon, décrites. D'un point de vue algorithmique, cette différence n'a donc aucun impact.

Les faces. La définition de Durand et al. ajoute aux faces proposées par Pocchiola et Vegter les ensembles de segments libres maximaux induisant certaines surfaces d'événement visuel (les $T++T$) ainsi qu'un maillage des faces obtenues en éléments de complexité constante.

En dimension 2, les événements visuels sont les segments libres maximaux supportant une bitangente et sont donc représentés dans le complexe de Pocchiola et Vegter. Leur ajout, lors du passage en dimension 3, est justifié : ils n'apparaissent pas dans la subdivision induite par les objets touchés, mais jouent un rôle crucial dans certaines applications comme le calcul d'un maillage de discontinuité (voir section 4.4).

En dimension 2, les segments libres maximaux associés à un arc du complexe sont tangents à un seul objet. Si les objets sont des polygones, la donnée des sommets successifs sur lesquels s'appuient les segments libres maximaux associés à un arc décrit celui-ci complètement et succinctement. En dimension 3 par contre, ces segments peuvent s'appuyer sur plusieurs objets. Considérons un arc du complexe dont les segments associés s'appuient sur 3 polytopes (*cf.* sec-

tion 4.5 pour une définition). Connaître, pour chacun d'entre eux, les éléments géométriques (sommets et arêtes) qui supportent les segments de l'arc est insuffisant : il faut encore savoir quels sont les triplets de sommets/arêtes qui supportent effectivement des segments tangents aux polyèdres. Par conséquent, pour manipuler les faces il est nécessaire de les mailler en ensembles de segments libres maximaux de mêmes supports géométriques.

Il nous semble donc que Durand et al. ont introduit de nouveaux types de faces pour prendre en compte deux phénomènes liés au passage de la dimension 2 à la dimension 3 : toutes les surfaces d'événements visuels n'apparaissent pas quand on partitionne l'espace des rayons en fonction de leur visibilité et les faces du complexe s'appuient sur plus d'un objet, ce qui demande d'indiquer les ensemble de générateurs supportant effectivement des segments libres maximaux.

4.4 Le squelette de visibilité

Pour certaines applications, les faces du complexe de toutes dimensions sont inutiles. C'est notamment le cas du calcul d'un maillage de discontinuité. Ce maillage représente les limites d'ombre qui correspondent aux points, sur chaque surface, où la visibilité des sources de lumière change. Autrement dit, le maillage de discontinuité d'un objet est l'arrangement des traces, sur cet objet, des surfaces d'événement visuel. Ces surfaces sont balayées par des segments libres maximaux qui forment³ des arcs du complexe de Durand et al. Il suffit donc de connaître ces arcs (et les sommets qui les subdivisent) pour avoir toute l'information de visibilité nécessaire à la construction du maillage de discontinuité. En particulier, les faces du complexe de dimension 2, 3 et 4 s'avèrent inutiles.

Cette observation a conduit Durand et al. [36, 38] à introduire le *squelette de visibilité* qui est le 1-squelette de leur complexe, à savoir le graphe de ses sommets (éléments de dimension 0) et ses arcs (éléments de dimension 1). Leur définition, à base d'un catalogue des familles de générateurs possibles, a été ajustée par Duguet et Drettakis [35] pour prendre en compte les positions dégénérées dans lesquelles ces familles peuvent être arbitrairement grandes, par exemple k sommets alignés et mutuellement visibles.

Notons que pour des polyèdres il existe deux notions distinctes de maillage de discontinuité. On peut considérer les surfaces d'événement visuel associées aux *objets* comme nous l'avons fait jusqu'à présent. Une alternative consiste à définir les surfaces d'événement visuel pour prendre en compte tout changement dans la vue d'un *polygone*. On aboutit alors à un maillage de discontinuité bien plus fin, qui partitionne chaque objet en éléments de surfaces d'où l'ensemble des polygones (et non plus des objets) visibles est le même.

Le maillage de discontinuité relatif aux polygones représente en fait les discontinuités de la dérivée seconde de la fonction d'éclairément. Dans les applications considérant les sources de lumière comme des objets, l'impact visuel des frontières ajoutées lorsque l'on considère le maillage de discontinuité relatif aux polygones nous semble discutable. Dans la mesure où conserver un maillage de taille raisonnable est crucial en pratique, la définition qui nous semble appropriée est celle du maillage de discontinuité relatif aux objets.

4.5 Cadre de cette thèse

Nous précisons ici les définitions de complexe et squelette de visibilité que nous adoptons dans cette thèse. Comme nous allons le voir, notre squelette de visibilité *n'est pas* le 1-squelette

³Si l'on suppose les objets convexes et opaques bien sûr.

de notre complexe de visibilité. Aussi, nous définissons ces deux structures indépendamment. Nous nous plaçons dans l'espace des segments libres maximaux qui nous semble plus intuitif que l'espace quotient et présente l'avantage de ne pas dupliquer les cellules.

Terminologie. Un type d'objet géométrique que nous manipulons couramment dans cette thèse est le *polytope*. Un polytope est un polyèdre convexe borné, ce qui peut être vu comme l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. Les polytopes que nous utilisons sont toujours dans \mathbb{R}^3 . Pour simplifier nos raisonnements, nous supposons que deux faces d'un même polytope ne sont pas coplanaires (autrement dit, les faces coplanaires sont supposées fusionnées). Un polytope peut être réduit à un polygone convexe, un segment ou un point. Nous appelons *arête ouverte* une arête privée de ses extrémités.

Une droite qui est tangente à un polytope l'intersecte en un ou plusieurs sommets et arêtes ; les *générateurs* de la droite sur ce polytope sont les sommets et les arêtes ouvertes qu'elle rencontre. Seules les droites tangentes à un polytope dans le plan d'une de ses faces peuvent avoir plusieurs générateurs sur ce polytope : deux arêtes ouvertes, une arête ouverte et un sommet, deux sommets ou deux sommets et une arête ouverte.

Soit \mathcal{C} une collection d'objets convexes en 3D. Un segment est *libre* vis-à-vis de \mathcal{C} s'il n'intersecte l'intérieur d'aucun objet de \mathcal{C} . Un segment *libre maximal* est un segment libre qui n'est contenu dans aucun segment libre autre que lui-même. Nous notons $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ l'espace des segments libres maximaux vis-à-vis de \mathcal{C} .

Soit s un segment libre maximal. s est *tangent* à un objet \mathcal{O} d'intérieur non vide si et seulement si sa droite support intersecte \mathcal{O} mais pas son intérieur. s est *tangent* à un polygone \mathcal{O} si et seulement si il intersecte une de ses arêtes. Enfin, s est *tangent* à un segment \mathcal{O} si et seulement si il l'intersecte.

Notons que ces définitions de *segment libre* et *segment tangent* sont discutables dans le cas d'objets tangents. La figure 4.8 représente des exemples de segments libres maximaux tangents selon notre définition.

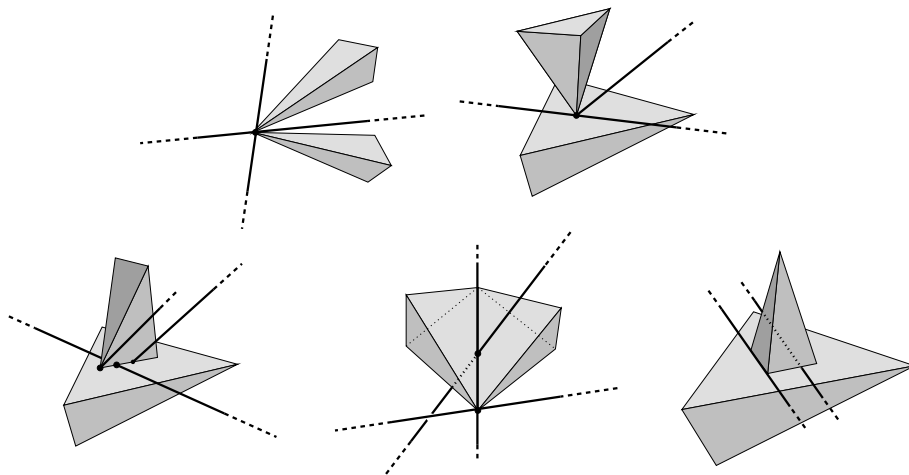


FIG. 4.8. Exemples de segments libres maximaux tangents dans le cas d'objets tangents.

Le choix d'une définition excluant tous ou certains de ces cas est principalement guidé par les applications. Un tel choix a bien entendu des implications sur le complexe et le squelette de visibilité qui sont définis par des critères de tangence dans l'espace des segments libres maximaux.

Pour l'essentiel, étendre les arguments et algorithmes que nous proposons à d'autres définitions présente surtout des difficultés d'ordre pratique et non théorique. Pour cette raison, nous avons fait le choix d'une définition simple.

Les *générateurs* d'un segment libre maximal sont les sommets et arêtes ouvertes en lesquels il est tangent à des polytopes.

Complexe de visibilité. Nous utilisons le complexe plus comme un cadre théorique où sont exprimées des questions de visibilité que comme une structure de donnée proprement dite. Aussi nous nous attachons à définir un cadre aussi simple et pratique que possible. Nous souhaitons cependant avoir une définition qui prenne en compte les situations dégénérées.

Définition 1. Le complexe de visibilité d'une collection \mathcal{C} d'objets d'objets d'intérieurs disjoints est la partition de l'espace $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ en composantes connexes de segments libres maximaux de mêmes générateurs.

Notons que nous ne représentons pas les arcs de $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ qui induisent des surfaces d'événement visuel de type $T++T$. Nous voulons avant tout décrire la visibilité des rayons, or ces arcs concernent la vue d'ensembles de rayons. En outre, étendre la plupart de nos résultats à un complexe prenant en compte ces arcs demande une simple reformulation de nos arguments. Pour ne pas alourdir notre propos nous écartons ces arcs.

Par ailleurs, dans le cas où \mathcal{C} contient des polyèdres, chaque face est subdivisée en ensembles de segments libres maximaux s'appuyant sur exactement le même ensemble de générateurs. Si \mathcal{C} comporte des objets alignés ou tangents, nous imposons simplement que tous les segments d'une face intersectent les mêmes générateurs (*cf.* figure 4.9).

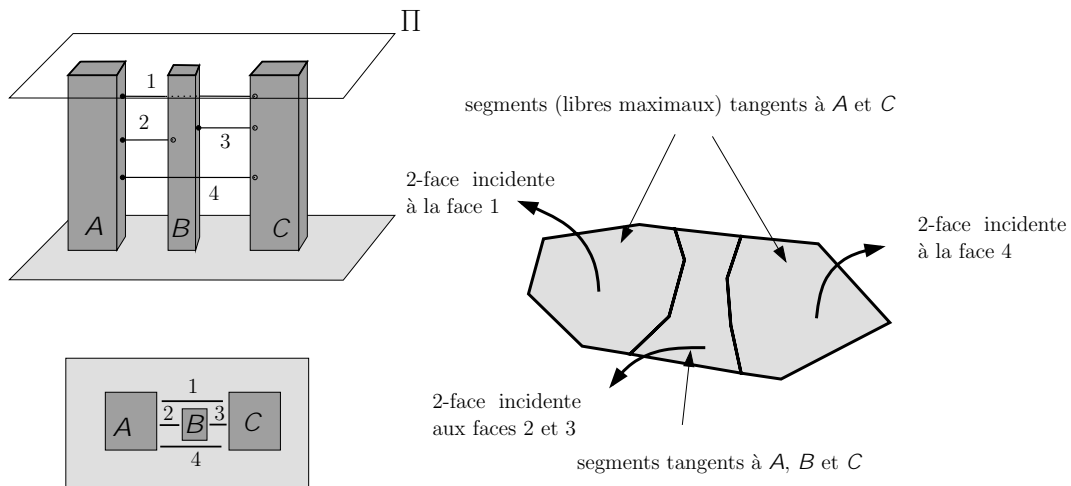


FIG. 4.9. Subdivision d'une 2-face due à des objets alignés : la situation en 3D (à gauche) et les 2-faces formées de segments libres maximaux dans le plan Π .

Le complexe de visibilité, ainsi défini, prend en compte les éventuelles dégénérescences, y compris dans une famille d'objets lisses. Cependant, il n'y a *a priori* plus de lien entre le nombre de générateurs des segments libres maximaux d'une face et sa dimension. Des ensembles de générateurs issus d'un même ensemble d'objets peuvent d'ailleurs engendrer des cellules de différentes dimensions (*cf.* figure 4.10).

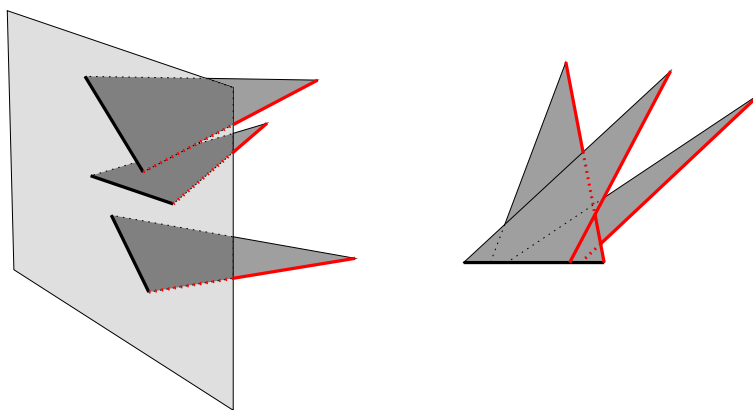


FIG. 4.10. Trois objets générant une face de dimension 2 (le long des arêtes coplanaires) et une face de dimension 1 (le long d'un autre triplet d'arêtes). Vues en perspective (à gauche) et de dessus (à droite).

Pour résumer, nous adoptons la définition de Durand et al. [40] en supprimant les arcs $T++T$ et leurs sommets $T++T+T$, en bloquant la visibilité par certains points de tangence entre objets et en prenant en compte des objets en position quelconque. Pour des polytopes disjoints en position générique, notre complexe ne diffère de celui de Durand et al. que par l'omission des $T++T$.

Squelette de visibilité. Le squelette de visibilité a été introduit dans l'objectif de traiter spécifiquement certains problèmes, notamment le calcul de maillages de discontinuité. Nous le définissons donc de manière à ce qu'il encode les surfaces d'évènement visuel et soit de taille aussi réduite que possible. Comme nous l'avons souligné en section 4.4, il est possible de considérer différents maillages de discontinuité suivant que l'on souhaite représenter les changements de visibilité des *objets* ou des *polygones*. Nous avons choisi de ne décrire que les changements de visibilité des objets, qui correspondent aux frontières d'ombre les plus tranchées visuellement.

Dans cette thèse, nous nous limitons à l'étude du squelette de visibilité de *polytopes d'intérieurs disjoints*, aussi nous ne formulons notre définition que dans ce contexte. En outre, pour que nos méthodes s'appliquent à un squelette de visibilité relatif aux polygones, il suffit de considérer chaque polygone comme un objet.

Notons que la définition du squelette de visibilité de Durand et al. encode plus que les changements de visibilité des objets : les ensembles de segments libres maximaux tangents à deux polytopes en respectivement un sommet et une arête forment des arcs de leur squelette. Or, les segments d'un tel arc n'engendrent pas nécessairement un plan tangent au polytope supportant le sommet (*cf.* figure 4.11).

Une surface d'évènement visuel parmi des objets lisses disjoints est un $T++T$ ou un $T+T+T$ (*cf.* Petitjean et al. [74]). Dans le cas de polyèdres, il semble clair que le catalogue des surfaces d'évènement visuel reste le même (*cf.* leur utilisation dans Durand et al. [40] ou les articles de Gigus et al. [43, 44]). C'est donc l'hypothèse que nous adoptons.

Considérons dans l'espace des segments libres maximaux l'ensemble \mathcal{K}_{EV} des segments tangents à deux polytopes dans un plan bitangent et s'appuyant en un sommet pour l'un et une arête ouverte pour l'autre. Considérons ensuite l'ensemble \mathcal{K}_{E3} des segments tangents à trois polytopes en trois arêtes ouvertes qui ne sont ni concourantes, ni toutes les trois coplanaires. Ces ensembles ne sont pas nécessairement disjoints. Rappelons que les générateurs d'un segment libre

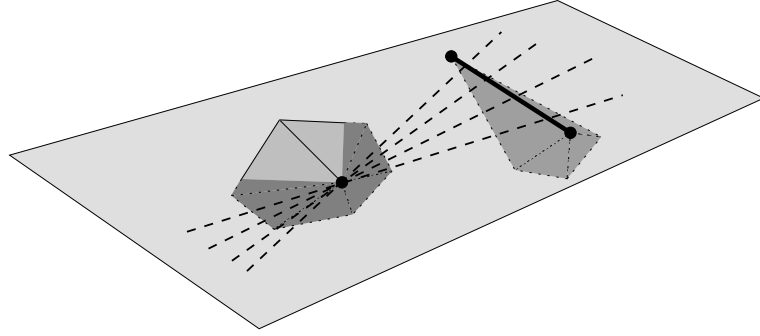


FIG. 4.11. Un sommet et une arête ne définissant pas un plan bitangent à leurs polytopes respectifs.

maximal sont les sommets et arêtes ouvertes en lesquels le segment est tangent à des polytopes.

Définition 2. *Le squelette de visibilité est la partition de $\overline{\mathcal{K}_{EV} \cup \mathcal{K}_{E3}}$ en composantes connexes de segments libres maximaux de mêmes générateurs.*

Les générateurs d'un arc sont, naturellement, les générateurs de ses segments libres maximaux. Tout arc du squelette a dans ses générateurs soit un triplet d'arêtes deux à deux non coplanaires, soit un sommet et une arête définissant un plan bitangent à leurs objets. Avec cette définition, le squelette de visibilité satisfait les 4 propriétés suivantes⁴ :

1. toute surface d'événement visuel est balayée par les segments d'un arc,
2. tout segment libre maximal d'un arc est inscrit dans une surface d'événement visuel,
3. les segments libres maximaux d'un arc ont les mêmes générateurs géométriques,
4. tout arc est un ensemble 1D.

Un *sommet du squelette de visibilité* est un segment libre maximal qui est sur la frontière d'un arc. Les générateurs d'un sommet sont obtenus à partir de ceux d'un arc qui lui est incident soit en ajoutant une arête ouverte, soit en remplaçant une arête ouverte par un de ses sommets incidents. Intuitivement, un sommet correspond à une position où les segments libres maximaux formant un arc soit changent de générateur sur un objet, soit deviennent tangent à un nouvel objet.

Un arc est dit *de type EV* s'il est contenu dans \mathcal{K}_{EV} et *de type E3* s'il est contenu dans \mathcal{K}_{E3} . Un arc peut donc être à la fois de type EV et de type E3 s'il est dans l'intersection de ces deux ensembles.

Nous reformulons donc la définition de Durand et al. [40] sans nous reposer sur un catalogue d'ensembles de générateurs et de leurs incidences. Hormis ce détail de présentation, nous ajustons simplement la notion de segment libre pour prendre en compte les objets tangents et traitons le cas de segments libres maximaux tangents à un nombre arbitraire d'objets, et enlevons certains arcs qui n'induisent aucune surface d'événement visuel. Pour des polytopes disjoints en position générique, le squelette de Durand et al. et le notre sont identiques à ces arcs près.

⁴ Cf. Annexe C pour une justification de ces propriétés.

Chapitre 5

État de l'art

Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse des résultats connus sur les questions que nous avons abordées afin de situer nos contributions. Cet état de l'art est organisé en quatre sections abordant respectivement l'algorithmique permettant de calculer tout ou partie du complexe (section 5.1), les bornes sur sa taille (section 5.2), la compréhension et la caractérisation des dégénérescences (section 5.3) et les propriétés structurelles du complexe (section 5.4). Nous concluons en détaillant d'autres structures de visibilité globales, certaines proches du complexe ou du squelette (section 5.5).

5.1 Algorithmique du complexe et squelette de visibilité

En calcul géométrique, un algorithme est satisfaisant d'un point de vue théorique si sa correction est prouvée et si sa complexité asymptotique dans le cas le pire, ou en moyenne, est proche de l'optimal. Il est fréquent, notamment en géométrie algorithmique, de simplifier la présentation d'un algorithme en supposant que les données sont en *position générique*, c'est-à-dire évitent certaines dégénérescences. Ces dégénérescences sont soit décrites ultérieurement, en indiquant les modifications à opérer pour que l'algorithme les traite correctement, soit gérées en perturbant les données pour les placer en position générique, soit laissées à la discrétion du lecteur.

Pour être intéressant en pratique, un algorithme doit être correct, suffisamment simple pour être implantable et *robuste*, *i.e.* fournir un résultat⁵ sur des données en position éventuellement dégénérée. Il peut en revanche être inefficace dans le cas le pire s'il est efficace sur les scènes courantes.

Bien sûr, un algorithme peut être intéressant en théorie et pas en pratique (par exemple l'algorithme de lancer de rayon de Pellegrini [69]), ou vice-versa (typiquement, les heuristiques pour lesquelles aucune justification théorique n'a encore été apportée). Dans cette section, nous examinons les algorithmes existants de calcul du complexe et du squelette de visibilité à la lumière de ces différents critères.

Dans le plan. Commençons par un rapide tour d'horizon des méthodes de calcul du complexe de visibilité d'objets du plan. Nous citons ici les travaux concernant le complexe de visibilité d'une famille de polygones ou d'objets lisses. Pour un résumé plus complet le lecteur pourra consulter la thèse d'Angelier [7].

Pocchiola et Vegter [76] ont proposé en 1996 le *greedy flip algorithm*, un algorithme de calcul du complexe de visibilité de convexes disjoints du plan. Cet algorithme traite les objets lisses et

⁵Si ce résultat est juste, on parle alors d'algorithme *certifié*.

peut également gérer les polygones non-convexes disjoints [7, chapitre III-4]. Il calcule les sommets du complexe en énumérant des pseudo-triangulations, opérant ainsi un balayage topologique du complexe. La principale opération utilisée est le basculement d'une bitangente, le *flip*. Cet algorithme est de complexité $O(n \log n + K)$ où K est la taille du complexe et n celle des objets. Cependant, cette complexité suppose que le *flip* soit réalisé en temps constant amorti. Pocchiola et Vegter proposent pour cela d'utiliser une structure de données de type *splittable queue*, peu commode en pratique.

Rivière [80, 81] a peu après proposé et implanté un algorithme alternatif de calcul du complexe 2D de polygones disjoints qui n'utilise que des structures de données élémentaires. Cet algorithme procède par un balayage topologique de l'arrangement dual des sommets des polygones. Rivière aboutit ainsi à une méthode de complexité $O(n \log n + K)$ où K est la taille du complexe et n celle des polygones. Cet algorithme a été implanté, les configurations dégénérées étant gérées par *perturbation symbolique* : lors de l'évaluation d'un prédicat, ces configurations sont perturbées symboliquement pour simuler une situation générique⁶. Rivière [80, 81, 82, 83] et Orti et al. [67, 79] ont utilisé cette implantation pour résoudre plusieurs problèmes de visibilité au sein de polygones du plan : calcul de polygones de visibilité [83], visibilité dynamique [82], calcul de facteurs de forme et de maillage de discontinuité [79] et radiosité dynamique [67]. Le code n'est cependant pas disponible.

Angelier [7] a ensuite implanté une version de l'algorithme de Pocchiola-Vegter [76] utilisant des structures de données élémentaires. La complexité théorique reste la même grâce à un résultat d'amortisation [8]. Cette implantation gère des polygones disjoints et des cercles. Les dégénérescences étant traitées par perturbation symbolique. À notre connaissance, cette implantation n'a été appliquée qu'au calcul de plus court chemin et de facteur de forme. Ce code est disponible en tant qu'extension de la bibliothèque CGAL [20].

Cho et Forsyth [24] ont proposé au même moment un algorithme de construction incrémentale randomisée du complexe de visibilité d'une famille de polygones convexes disjoints. Cet algorithme est de complexité moyenne⁷ $O(n^2 \log n)$, mais construit une structure plus riche que les algorithmes de Pocchiola et Vegter et de Rivière : l'historique de la construction fournit une structure de localisation qui permet de lancer un rayon en temps logarithmique. Cet algorithme a été implanté pour des polygones en position générique, les alignements de trois sommets étant proscrits, et appliqué au problème de *ray tracing*. Le code n'est cependant pas disponible.

Dans l'espace. Le premier algorithme non trivial de calcul du complexe de visibilité 3D est dû à Durand et al. [36, 40]. Leur technique, basée sur un double balayage de l'espace 3D, calcule le complexe d'objets convexes disjoints en temps $O((|S| + n^3) \log n)$ où $|S|$ est le nombre de sommets du complexe. Le temps d'exécution est en partie proportionnel à la taille de la sortie, le terme cubique étant dû à des événements se produisant dans les balayages qu'il est nécessaire de pré-calculer. Cet algorithme n'est ni robuste, ni implantable : il est compliqué, les configurations dégénérées d'objets ne sont pas traitées et les prédicats, sans être précisément décrits, semblent de degré élevé et sont basés sur des constructions exactes. Comme le signale Durand dans sa thèse [36], cet algorithme, intéressant pour estimer la complexité théorique du calcul du complexe de visibilité, «*est sujet à des problèmes de robustesse et a un coût cubique fixe qui n'est pas*

⁶Il s'agit d'une application de la technique de *simulation de simplicité* introduite par Edelsbrunner et Mücke [41].

⁷Cet algorithme est randomisé au sens où les polygones sont insérés dans un ordre aléatoire. Sa complexité est donc la moyenne du nombre d'opérations effectuées pour les différentes permutations des polygones. Cette complexité moyenne, pour un même ensemble de données, est *a priori* différente de la complexité moyenne pour une distribution de données.

acceptable en pratique». C'est néanmoins la seule méthode ayant été proposée pour calculer le complexe de visibilité 3D.

Face aux difficultés de calcul du complexe, Durand et al. se sont tournés vers le calcul du squelette de visibilité [38]. Leur méthode consiste à améliorer l'approche naïve, énumérer les ensembles de générateurs possibles, par des heuristiques de subdivision spatiale. Ils aboutissent ainsi à un algorithme simple de calcul du squelette de visibilité de polyèdres dont la complexité dans le cas le pire est $\Theta(n^5)$. Cependant, la complexité observée de cet algorithme est plutôt de l'ordre de $n^{2.4}$ [36]. Le principal problème de cette approche est son manque de robustesse, les configurations d'objets alignés ou tangents n'étant pas gérées. Ces résultats ont néanmoins démontré l'intérêt du squelette de visibilité en l'appliquant au calcul de maillages de discontinuité.

Duguet et Drettakis [35] ont ensuite amélioré les travaux de Durand et al. [38] de plusieurs manières. Pour commencer, ils ont introduit des seuils de tolérance dans la notion de tangence. Ainsi, une droite est définie comme *presque tangente* à un polygone si elle est à distance au plus ϵ de son bord. Les droites susceptibles de contenir un segment libre maximal sommet du squelette, pour cette notion de presque tangence, sont calculées par énumération des ensembles de générateurs (2 sommets, 1 sommet et 2 arêtes, et 4 arêtes). Ensuite, ils ont pris en compte les configurations dégénérées en déterminant pour chacune de ces droites ses interactions avec le reste de la scène, ajoutant d'éventuels générateurs supplémentaires. Enfin, ils ont formulé plusieurs questions géométriques en termes d'algèbre linéaire, ce qui permet de les traiter de manière robuste par une algorithmique dédiée. Cette méthode reste de complexité théorique prohibitive, $O(n^5)$, mais est suffisamment simple pour être implantée et a grandement gagné en robustesse par rapport à la version de Durand et al.

Duguet et Drettakis [35] ont implanté cette méthode mais uniquement pour le calcul du squelette de visibilité restreint à des rayons parallèles. Cette implantation leur a permis de calculer exactement les ombres directes induites par une source de lumière à l'infini pour des scènes complexes, ayant de l'ordre de plusieurs centaines de milliers de polygones. Cependant, l'efficacité et la précision de leur approche semblent limitées. Premièrement, l'énumération qui apparaît gérable dans le cas de rayons de direction fixée (où il suffit d'énumérer les sommets et les paires d'arête) devient vraisemblablement inabordable dans le cas général, la complexité passant de $O(n^3)$ à $O(n^5)$. Ensuite, l'utilisation de droites presque tangentes fournit une approximation de la visibilité qui est cohérente mais peut ne pas avoir la même combinatoire que la visibilité de la scène considérée. Enfin, dans le cas de rayons de direction arbitraire, la fusion de droites presque tangentes à des familles distinctes de générateurs peut conduire à une accumulation des erreurs ingérable en théorie comme en pratique.

Remarquons que les algorithmes de calcul du squelette mentionnés nécessitent de tester si une droite s'appuyant sur 4 segments intersecte un triangle, ce qui, pour être fait de manière robuste, requiert de pouvoir détecter qu'elle intersecte son bord. Or, tester si 5 droites, données par des paires de points, admettent une tangente commune conduit, par un calcul direct, à un prédicat de degré 27. À notre connaissance, le prédicat de plus petit degré connu pour ce problème est de degré 15 et a été proposé par Mourrain [65] : il consiste à tester l'annulation du déterminant d'une matrice 5×5 dont les coefficients sont les *side-operator*⁸ des paires de droites (chaque terme est donc de degré 3 en les coordonnées des sommets initiaux). Il semble donc illusoire qu'une approche du calcul du squelette ou du complexe de visibilité par constructions explicites de droites perçantes via une arithmétique flottante finie puisse fournir un résultat correct à tous les coups. À titre de comparaison, soulignons que tester, dans le plan, si une droite tangente à deux polygones intersecte un segment fait intervenir un prédicat d'ordre 3 en les entrées. Il suffit,

⁸ Cf. l'Annexe A pour une définition du *side-operator* de deux droites.

en effet, de tester l'orientation des triplets de points constitués d'une extrémité du segment et des deux sommets en lesquels la droite est tangente aux polygones.

En conclusion, le contraste entre les situations en 2D et en 3D est frappant. Si dans le plan une algorithmique efficace est disponible, aucun des algorithmes proposés pour calculer le complexe ou le squelette de visibilité 3D ne semble satisfaisant en dépit des nombreux travaux qui y ont été consacrés. Les méthodes développées pour le calcul du squelette en 3D ont néanmoins confirmé expérimentalement son intérêt en l'utilisant pour calculer effectivement des maillages de discontinuité.

5.2 Taille du complexe de visibilité

La taille du complexe de visibilité en dimension 2 ou 3 a jusqu'à présent été estimée via des bornes théoriques et des observations pratiques. Nous passons en revue ces deux types de résultats.

5.2.1 Bornes théoriques

Une première manière de décrire la complexité d'un objet est d'estimer le comportement asymptotique de sa taille dans le cas le pire. Cela est obtenu d'une part via des arguments théoriques bornant cette taille et d'autre part en explicitant des familles d'exemples.

La complexité d'une structure géométrique est généralement définie comme la somme des complexités de ses faces de toutes dimensions. Si cette décomposition est telle que

- (i) pour tout $k \geq 1$, toute k -face est incidente à au moins une $(k - 1)$ face et
- (ii) le nombre de k -faces incidentes à une même $(k - 1)$ face est borné,

alors le nombre de sommets de la structure détermine l'ordre de grandeur de sa complexité. C'est par exemple le cas des polytopes.

Dans le cas du complexe de visibilité, toute face n'est pas nécessairement incidente à une face de dimension inférieure (*cf.* figure 5.1). En fait, il existe des scènes arbitrairement grandes dont le complexe ne contient ni sommet ni arête.

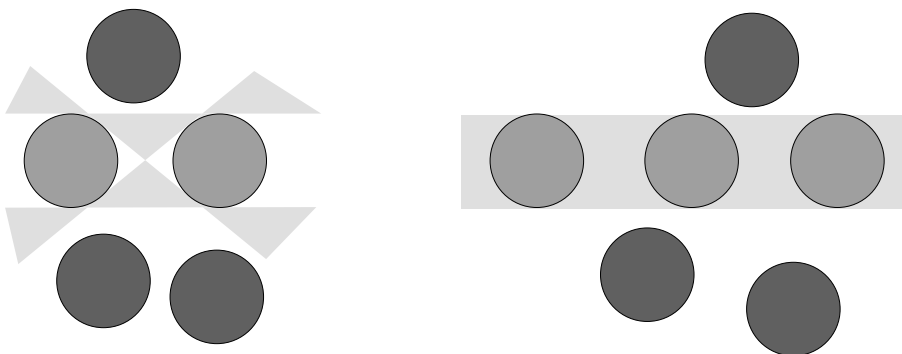


FIG. 5.1. Des ensembles de sphères de \mathbb{R}^3 . À gauche, un ensemble de droites tangentes à deux sphères qui correspond à une 2-face du complexe qui n'est incidente à aucune arête ou sommet. À droite, un ensemble de droites tangentes à trois sphères qui correspond à une arête du complexe qui n'est incidente à aucun sommet.

Cependant, si les objets sont tels qu'une droite ne peut être tangente à plus d'un nombre borné d'entre eux, alors la condition (ii) est, elle, toujours vraie. Il suffit alors de borner la taille

des faces qui ne vérifient pas l'hypothèse (i), la complexité des autres étant dominée par le nombre de sommets.

Dans le cas particulier des polyèdres, le maillage introduit par Durand et al. pour décomposer les faces en ensembles de complexité constante garantit notamment que la condition (i) est vérifiée. La taille du complexe de visibilité de polyèdres en position générique est donc dominée par son nombre de sommets.

Dans de nombreux cas, des bornes de complexité sur des ensembles de droites induisent ou suggèrent des résultats partiels sur la taille du complexe. De telles bornes sont souvent plus simples à obtenir que celles portant sur le complexe puisqu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte les occultations.

Complexe 2D. Tout d'abord, remarquons que deux convexes disjoints du plan ont exactement 4 droites bitangentes. Par conséquent, le nombre de sommets du complexe de visibilité de k convexes disjoints du plan est $O(k^2)$, et ce quelque soit la complexité totale de ces objets. Comme par ailleurs la complexité des arcs du complexe de visibilité est de même ordre que celle du bord des objets, il s'ensuit que le complexe de visibilité de k convexes disjoints du plan totalisant n arêtes est $O(k^2 + n)$.

Cette borne peut en outre être atteinte en disposant les objets en cercle de manière à ce que chaque paire d'objets se voie tangentiellement (cf. figure 5.2).

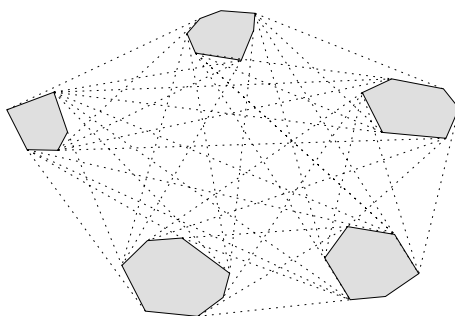


FIG. 5.2. k convexes disposés "en cercle" dont le complexe de visibilité est de taille $\Omega(k^2 + n)$.

Complexe 3D. Un premier résultat, classique, est que dans le cas le pire le complexe de visibilité de n droites est $\Theta(n^4)$ (cf. figure 5.3). Ce résultat se généralise à des segments, des convexes généraux et même des terrains.

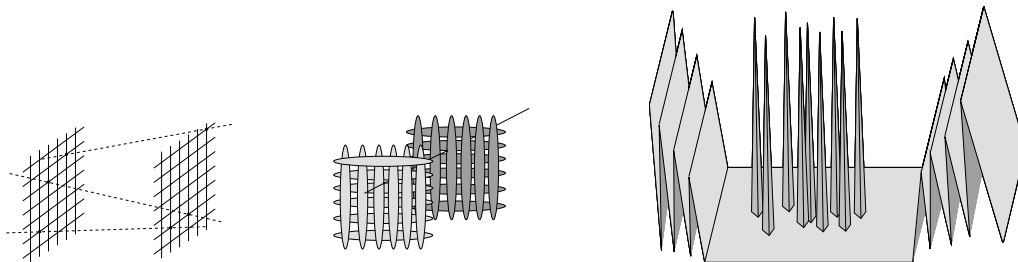


FIG. 5.3. Un complexe de visibilité dont la taille est d'ordre n^4 : exemples de grilles et d'un terrain.

Objets	Taille du complexe de visibilité
Convexes, segments, polytopes, polygones, terrains	$\Theta(n^4)$
Sphères (disjointes) de rayons arbitraires	$\Omega(n^3)$ [32] et $O(n^4)$
Sphères (disjointes) congruentes	$\Omega(n^3)$ [45] et $O(n^4)$

TAB. 5.1. Bornes sur la taille du complexe de visibilité.

Il semble cependant difficile de réaliser de tels exemples sans tomber dans l'archétype de la grille qui impose d'utiliser des objets très étirés, confinant au segment. De fait, la meilleure borne inférieure connue pour la taille du complexe de visibilité de n sphères, due à Devillers et Ramos [32], est $\Omega(n^3)$. Comme par ailleurs toute famille de 0 à 4 sphères définit un nombre borné de faces fermées, la taille du complexe de n sphères est $O(n^4)$. Ces arguments restent valides si l'on impose que les sphères soient disjointes. Pour des sphères de mêmes rayons, l'argument pour la borne supérieure reste valide, et Glisse [45] a récemment produit un exemple de n sphères unité disjointes dont le complexe de visibilité a $\Omega(n^3)$ sommets. Ces résultats sont résumés dans le tableau 5.1.

Ensembles de droites. L'étude de la complexité d'ensembles de droites induits par une collection d'objets est un sujet actif qui a connu de récents développements. En particulier, trois types d'ensembles de droites se rattachent à la complexité de structures de visibilité globale : les droites tangentes à plusieurs parmi n objets, les droites libres dans une famille d'objets et les droites intersectant une famille d'objets. Pour un tour d'horizon plus large, mais qui commence néanmoins à dater, nous renvoyons à la synthèse de Pellegrini [71].

La complexité de l'ensemble des droites tangentes à plusieurs parmi n objets a principalement été étudiée pour borner le nombre d'événements visuels d'une scène en négligeant, pour simplifier, les questions d'occultation. Il existe deux résultats de ce type. D'une part, Durand et al. [36, 40] ont montré qu'en moyenne parmi n sphères congruentes distribuées uniformément, le nombre de triplets admettant au moins une droite tritangente est $O(n^{\frac{7}{3}})$ et le nombre de quadruplets admettant au moins une droite quadritangente est $O(n^{\frac{8}{3}})$. D'autre part, le nombre de droites tangentes à 4 parmi k polytopes disjoints, en position générique et de complexité totale n , est $O(n^2 k^2)$; ce résultat découle d'une borne, établie par Efrat et al. [42], sur le nombre de changements de la vue d'un point qui se déplace sur une trajectoire rectiligne.

Les droites évitant une famille d'objets, aussi appelées *droites libres*, forment les cellules du complexe de visibilité "s'appuyant" sur l'infini. De Berg et al. [28] ont montré que la complexité de l'espace des droites libres parmi n polytopes homothètes disjoints est $\Omega(n^3)$. Cet espace est, par ailleurs, de complexité $O(n^4)$. Dans le cas d'un *terrain* de taille n , c'est-à-dire une collection de polygones de complexité totale n telle que toute droite verticale intersecte au plus l'un d'entre eux, Pellegrini [70] a montré que la taille de l'espace des droites libres est $O(n^3 2^{O(\log n)})$. Il est par ailleurs clair que cet espace peut être de taille au moins quadratique (cf. figure 5.4).

Récemment, Agarwal et al. [5] ont établi que la complexité de l'espace des droites libres parmi n sphères congruentes est de complexité $O(n^{3+\epsilon})$, réduisant ainsi l'écart avec la borne inférieure intuitive de $\Omega(n^2)$ précédemment mentionnée. Soulignons que l'exemple de Glisse [45] contient $\Omega(n^3)$ segments libres maximaux mais qui ne sont pas des droites libres. Le tableau 5.2 résume ces résultats.

Les droites intersectant tous les objets d'une famille constituent le troisième type d'ensemble de droites couramment étudié et pouvant se rattacher au complexe de visibilité. En effet, pour

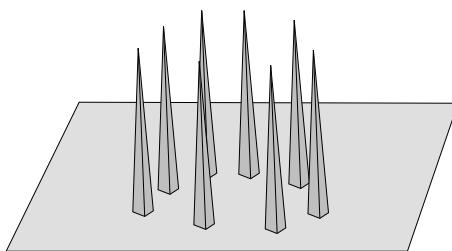


FIG. 5.4. Un terrain induisant un espace de droites libres de complexité quadratique.

Objets	Complexité de l'ensemble des droites libres
Convexes, segments, polytopes, polygones	$\Theta(n^4)$
Polytopes homothètes disjoints	$\Omega(n^3)$ [28] et $O(n^4)$
Terrains	$\Omega(n^2)$ et $O(n^3 2^{O(\sqrt{\log n})})$ [70]
Sphères (disjointes) congruentes	$\Omega(n^2)$ et $O(n^{3+\epsilon})$ [5]

TAB. 5.2. Bornes sur la taille de l'ensemble des droites libres.

une famille de 4 objets les sommets du complexe sont les droites perçantes extrêmes, et leur nombre est borné par la complexité de cet ensemble de droites. On ne s'intéresse donc qu'aux objets dont la complexité peut être arbitrairement grande. Pour des familles de polyèdres, des bornes non triviales ont été établies dans deux cas qui nous intéressent (*cf.* l'article de synthèse de Pellegrini [71]).

Objets	Complexité de l'ensemble des droites perçantes
Polytopes	$\Omega(n^3)$ et $O(n^3 \log n)$
Polyèdres avec $O(1)$ orient. distinctes	$O(n^2)$

TAB. 5.3. Bornes sur la taille de l'ensemble des droites perçantes.

5.2.2 Observations pratiques

Une autre manière d'analyser la complexité d'une structure consiste à mesurer sa taille sur des exemples suffisamment nombreux et variés pour être représentatifs des situations qui se présentent en pratique. La *taille empirique* ainsi observée peut être très inférieure à la taille théorique dans le cas le pire. Pour être significative, ce type d'étude requiert une implantation permettant de traiter des scènes de taille représentative, et donc suffisamment robuste et efficace.

Cho et Forsyth [24] ont observé que la taille du complexe de visibilité de triangles disjoints dans le plan augmente linéairement avec le nombre de triangles, et non pas quadratiquement comme pourrait le suggérer la borne dans le cas le pire. Cette observation a été effectuée sur des scènes de quelques centaines de triangles équirépartis dans le plan : une région du plan est quadrillée, et un triangle est placé dans chaque case de cette grille. Cette étude n'est pas le propos principal de Cho et Forsyth, et demanderait à être approfondie pour être réellement significative. Elle n'en demeure pas moins un cas intéressant dans lequel la taille empirique du complexe est linéaire en la taille des entrées.

Aucun algorithme de calcul du complexe de visibilité d'une scène 3D n'a à ce jour été implanté. En revanche, deux implantations du squelette de visibilité ont été effectuées. Durand et al. [36] ont observé que la taille empirique du squelette de visibilité d'une famille de polygones en 3D est approximativement quadratique en leur nombre d'arêtes. Cette étude n'a été menée que sur quelques scènes ayant au plus 1 500 polygones, principalement pour des raisons de manque d'efficacité et de robustesse de l'implantation. Aussi, il n'est pas clair que ce résultat soit significatif et, en particulier, que les scènes considérées approchent le régime asymptotique. Cependant, ces observations suggèrent qu'en pratique le squelette de visibilité est considérablement moins gros que dans le cas le pire. Une autre implantation du calcul du squelette de visibilité, restreint à des rayons parallèles, a été effectuée par Duguet et Drettakis [35] et utilisée sur des scènes considérablement plus importantes. À notre connaissance, aucun résultat sur la taille empirique du squelette n'est disponible pour cette seconde implantation.

5.2.3 Conclusion

Par delà la complexité théorique dans le cas le pire, plusieurs travaux ont tenté d'estimer une taille «réaliste» du complexe de visibilité, que ce soit en s'intéressant à la taille moyenne ou en considérant des objets plus contraints que des polygones, par exemple des sphères. Ce problème est relié à la question, *a priori* plus simple, de borner la complexité d'ensembles de droites induites par des familles d'objets de l'espace (droites libres, droites perçantes, droites tangentes...). Cette question n'est elle-même qu'en partie résolue et est l'objet de recherches actives. Les études expérimentales suggèrent que la complexité dans le cas le pire est pessimiste en regard des situations rencontrées en pratique. Ces mesures souffrent cependant des limitations de l'algorithmique qui rendent difficiles des mesures systématiques sur des scènes de grande taille.

5.3 Dégénérescences

Les configurations dégénérées peuvent être classées en deux catégories [95] : dégénérescences *inhérentes* au problème et dégénérescences *induites* par l'algorithme. Si le traitement des dégénérescences est propre à chaque algorithme, l'identification des dégénérescences inhérentes au problème est une question intéressante en elle-même. Celles ci doivent, en effet, être prises en compte quelque soit l'approche adoptée pour résoudre le problème.

Les familles de k objets admettant un ensemble de tangentes communes non vide et de dimension autre que $4 - k$ constituent des dégénérescences inhérentes au complexe de visibilité. Ainsi formulés, ces ensembles d'objets ne sont pas simples à reconnaître. Dans le cas particulier où les objets sont des polyèdres et des sphères, les configurations dégénérées liées à la dimension des ensembles de tangentes sont presque entièrement décrites. Cette section résume les résultats connus sur ce sujet (*cf.* tableau 5.4). Comme nous le verrons au chapitre 11, l'étude de ces configurations dégénérées est très liée à la recherche de bornes fines sur le nombre maximal de droites tangentes quand ce nombre est fini. Aussi nous présentons les résultats connus sur ces deux problèmes de concert. Pour simplifier la présentation, nous commettons l'abus de langage qui consiste à dire qu'une droite qui en intersecte une autre lui est *tangente*.

Polyèdres. Le cas des polyèdres est relativement simple puisqu'il revient à considérer les tangentes communes à des familles de segments. Un premier résultat élémentaire concerne les tangentes à k droites. Les configurations dégénérées sont simplement :

$k = 2$: deux droites confondues,

$k = 3$: trois droites coplanaires,

$k \geq 4$: k droites coplanaires, concourantes ou appartenant à une même famille de réglages d'un hyperboloïde à une nappe ou d'un parabololoïde hyperbolique.

Le cas $k = 2$ est évident et les cas $k \geq 3$ découlent de la propriété classique [52] que l'ensemble des droites intersectant trois droites de l'espace balaye une quadrique réglée. Mentionnons par ailleurs, autre résultat classique, que 4 droites en position générique admettent au plus 2 tangentes communes [52, 53].

Le passage des droites aux segments, en apparence immédiat, présente quelques subtilités. Brönniman et al. [18] ont montré que si $k \geq 3$ segments sont simultanément intersectés par un nombre fini de droites, ce nombre est au plus k et que cette borne est atteinte. Ils ont de plus caractérisé les configurations dégénérées.

Sphères. MacDonald et al. [59] ont prouvé que 4 sphères congruentes ont une infinité de tangentes communes si et seulement si leurs centres sont alignés. Ils ont par ailleurs montré que, dans le cas générique, le nombre de tangentes est au plus 12 et que cette borne est atteinte. Cette borne a par ailleurs été trouvée indépendamment par Devillers et al. [31] en étudiant les cylindres circulaires de rayon 1 passant par 4 points de l'espace : l'axe d'un tel cylindre est une droite tangente aux sphères unités centrées en ces points. Megyesi [61] a fourni une preuve simplifiée que cette borne est en fait 8 si les centres sont coplanaires, et souligne que la borne de 12 reste valide pour des sphères de rayons distincts. Enfin, Theobald [92] a ultérieurement exhibé un exemple de quatre sphères congruentes admettant exactement k tangentes, pour $k = 1, \dots, 12$. Ainsi, pour des sphères, seul le cas de 4 objets (ou plus) a été étudié et même là, le cas de sphères de rayons arbitraires a résisté aux différentes analyses [93].

Sphères et polyèdres. Les quadruplets dégénérés de sphères et droites ont eux aussi été étudiés, décrivant donc les dégénérescences pour des familles d'objets formées de sphères et polyèdres. Theobald [93, théorème 7] a décrit les ensembles de 3 droites et 1 sphère admettant une infinité de tangentes communes. Megyesi et al. [63] ont ensuite caractérisé les ensembles dégénérés de 2 sphères et 2 droites en l'obtenant comme un cas particulier des ensembles dégénérés de 2 droites et 2 quadriques complexes. Enfin, Megyesi et Sottile [62] ont caractérisé les ensembles dégénérés de 3 sphères et 1 droite. Pour chacun de ces cas, Theobald [93] a donné une borne, atteinte, sur le nombre de tangentes communes des configurations génériques.

Objets	nombre de tangentes	caractérisation des configurations dégénérées
4 droites	2 (classique)	oui (classique)
$k \geq 3$ segments	k [18]	oui [18]
3 droites et 1 sphère	4 [93]	oui [93]
2 droites et 2 sphères	8 [93]	oui [63]
1 droite et 3 sphères	12 [93]	oui [62]
4 sphères unité	12 [31, 59]	oui [59]
4 sphères unité de centres coplanaires	8 [61]	oui [59]
4 sphères de rayons arbitraires	12 [59]	non

TAB. 5.4. Caractérisation des quadruplets d'objets en position dégénérée pour des droites et des sphères.

La description des configurations dégénérées est donc quasiment complète pour les ensembles

de quatre droites ou sphères. Il est à noter que les ensembles de *segments* et de sphères n'ont pas été étudiés spécifiquement. Cependant, s'il est possible que le nombre maximal de droites tangentes change, les configurations dégénérées ne changeront *a priori* que peu.

5.4 Propriétés structurelles

Les *propriétés structurelles* d'une structure représentent à la fois la topologie de ses faces ou ensembles de faces et les caractéristiques de sa structure combinatoire (degrés d'incidence, *diamond property* ou théorème de la zone pour les polytopes).

La structure du complexe de visibilité de convexes du plan est dans l'ensemble bien comprise. D'une part, la topologie de ses faces est simple puisqu'il s'agit⁹ d'un *complexe cellulaire* [77] : l'intérieur (resp. le bord) d'une cellule est homéomorphe à une boule (resp. une sphère) de même dimension. D'autre part, les incidences ont été listées (*cf.* par exemple la thèse d'Angelier [7]) et certaines propriétés combinatoires fines sont connues, par exemple le théorème du type *sum of squares* [8] qui a été utilisé pour amortir la complexité des *flips* du *greedy flip algorithm*.

La structure du complexe de visibilité 3D est moins bien comprise. Si les incidences ont été énumérées (*cf.* par exemple Durand [36]), il est clair que la topologie des faces peut être compliquée. En particulier, elles peuvent comporter un nombre arbitraire de trous. En dehors des questions de topologie, le complexe 3D présente un certain nombre de caractéristiques qui rendent son traitement difficile. Un exemple de telle caractéristique est l'existence de faces de dimension 1 ou 2 sans bord : toute approche basée sur une étude des faces de dimension inférieure devra les traiter à part. Notamment, dans l'algorithme de calcul du complexe de Durand et al. [36, 40] les faces de dimension 1 sans bord ne sont pas détectées au cours du balayage, et leur traitement induit un coût fixe en n^3 .

5.5 Autres structures pour la visibilité globale

Nous proposons ici un survol des structures globales qui ont été proposées pour résoudre des problèmes de visibilité. Pour une synthèse plus complète, nous renvoyons à l'état de l'art de Durand [37] sur les problèmes de visibilité.

5.5.1 La structure de Pellegrini

Pellegrini [69] a proposé une structure permettant de résoudre le problème du lancer de rayon parmi n triangles en 3D en temps $O(\log n)$. Il s'agit d'une décomposition de l'espace des droites en cellules formées de droites perçant les mêmes triangles dans le même ordre. Une fois la cellule à laquelle appartient la droite support d'un rayon déterminée, il suffit d'effectuer une recherche dichotomique pour trouver entre quels triangles, le long de la droite, se trouve son origine. La structure de donnée proprement dite est donc formée de deux niveaux : une décomposition de l'espace des droites, munie d'une structure de localisation et, dans chaque cellule, une liste ordonnée des triangles percés.

Les droites sont représentées par leurs coordonnées de Plücker¹⁰, ramenant ainsi l'espace des droites à la *quadrique de Plücker*, une hypersurface de degré 2 dans $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$, l'espace projectif réel de dimension 5. Avec cette représentation, l'ensemble des droites qui coupent une droite donnée est l'intersection d'un hyperplan de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ avec la quadrique de Plücker. Si l'on considère

⁹Cela n'est vrai que pour des scènes comportant plus de 2 objets.

¹⁰*Cf.* l'Annexe A ou l'article de Pellegrini [71] pour une introduction aux coordonnées de Plücker.

la famille d'hyperplans associée aux droites supportant les côtés des triangles, on obtient une famille d'hyperplans de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ qui induit un arrangement sur la quadrique de Plücker. Les droites d'une cellule de cette arrangement rencontrent exactement le même ensemble de triangles.

Cette structure permet de traiter d'autres problèmes que le lancer de rayon, par exemple calculer l'intersection de polyèdres ou tester si deux droites sont isotopes dans un ensemble de droites-obstacles données et, si oui, calculer un chemin de l'une à l'autre. Elle présente cependant l'inconvénient majeur d'être potentiellement énorme : pour un ensemble de n triangles, l'arrangement des hyperplans est de taille $\Theta(n^5)$, et sa trace sur la quadrique de taille $\Theta(n^4)$.

L'ensemble des droites support de toute face du complexe de visibilité, tel que nous l'avons défini, apparaît dans la structure de Pellegrini. En revanche, une face de cette structure peut être formée de droites tangentes à plusieurs triangles mais ne supportant aucun segment libre entre les points de tangence, ou de droites tangentes aux droites support de côtés de triangles mais pas aux triangles eux-mêmes. Si l'on omet ces subdivisions "inutiles", la structure de Pellegrini est à peu de choses près une représentation du complexe de visibilité par sa projection dans l'espace des droites assortie, pour chaque cellule, de l'information permettant une remontée dans l'espace des rayons.

La structure de Pellegrini définit un cadre simple et propre d'étude de la visibilité en se plaçant dans l'espace des droites, plus simple et efficace que l'espace des rayons ou celui des segments libres maximaux. Cette structure échoue cependant à traduire la *localité* de la visibilité, *i.e.* qu'un objet n'interagisse qu'avec les objets qu'il voit.

5.5.2 Le graphe d'aspect

Les surfaces d'événement visuel d'une scène partitionnent l'espace entre les objets en cellules où la combinatoire de la vue est invariante. Le *graphe d'aspect* proposé par Koenderink et Van Doorn[55, 56] est une représentation de cette partition par un graphe qui lui est dual : chaque région est représentée par un sommet et chaque paire de régions adjacentes donne lieu à un arc entre les sommets correspondants. Seules les régions adjacentes par une surface de dimension 2 donnent lieu à un arc, les autres adjacences, par une courbe ou un sommet, n'étant pas observables en pratique.

Une scène de complexité¹¹ n peut contenir $\Theta(n^3)$ surfaces d'événement visuel, conduisant à un graphe d'aspect comportant $\Theta(n^9)$ noeuds. Remarquons toutefois que la taille du graphe d'aspect d'une scène est dominée par le cube de la taille de son squelette de visibilité : ces deux structures encodent les surfaces d'événement visuel, l'une directement et l'autre par le dual de leur arrangement. Par conséquent, une meilleure compréhension du squelette de visibilité et notamment de sa taille est susceptible de se traduire en résultats similaires sur le graphe d'aspect.

Dans la communauté de la *vision*, le graphe d'aspect a été largement étudié et notamment appliqué au problème de reconnaissance d'objets.

5.5.3 Structures de lancer de rayon

Le problème du lancer de rayon, et par la même occasion la question de visibilité point à point, a été intensivement étudié dans les communautés de géométrie algorithmique et d'infographie. De nombreuses solutions ont été développées par ces deux communautés, mais, en dehors des travaux de Pellegrini déjà mentionnés, elles ont peu voire aucun rapport avec le complexe de visibilité. De manière générale, ces solutions traitent le lancer d'un rayon, souvent par des techniques

¹¹Cette complexité, pour être précis, doit prendre en compte le degré des surfaces de la scène. Les résultats que nous formulons supposent que ce degré est borné.

de décomposition de l'espace (*cf. octrees, arbres BSP...*), et se prêtent mal à la manipulation d'ensembles de rayons. C'est d'ailleurs ce qui explique que les questions de calcul de maillage de discontinuité ou de facteur de forme restent mal traitées alors que le problème du lancer de rayon est, lui, bien résolu en théorie et en pratique.

La littérature à ce sujet est très vaste, tant en géométrie algorithmique qu'en infographie. Aussi nous ne nous risquons pas à en faire un tour d'horizon mais renvoyons plutôt aux synthèses de Pellegrini [71], Chang [21] et Durand [37].

Deuxième partie

Taille moyenne du complexe de visibilité

Chapitre 6

The expected number of visibility events is linear

Les bornes inférieures sur la taille des structures globales de visibilité que nous avons vu au chapitre 5 sont atteintes par des scènes présentant deux caractéristiques. D'une part, elles comportent des structures de «grilles» pathologiques au sens où elles sont peu courantes dans les scènes pratiques. D'autre part, les objets qui les constituent sont simples, en général de complexité bornée (droite, triangle, tétraèdre...). Nous proposons dans ce chapitre une étude de la taille du complexe de visibilité qui s'efforce de ne pas tenir compte des comportements pathologiques peu courants en pratique. Nous nous intéressons pour cela à la taille moyenne du complexe sur certains modèles de scènes probabilistes.

Dans ce chapitre, nous établissons que la taille moyenne du complexe de visibilité d'une famille de n sphères de même rayons uniformément distribuées dans un univers borné est $\Theta(n)$. Ce résultat prolonge une étude antérieure de Durand et al. [40] qui ont montré que le nombre de droites quadritangentes pour ce même modèle de scène est $O(n^{8/3})$. Nous améliorons ainsi l'analyse de Durand et al. en prenant en compte les occultations, en traitant les faces de toutes dimension et en prouvant une borne inférieure.

L'idée générale de notre étude est de borner la probabilité que 4 objets donnés admettent une droite tangente commune et que, entre ces 4 objets, cette tangente ne soit pas occultée. La probabilité d'un tel événement est exprimée comme un rapport de volumes qui dépendent des positions relatives des sphères. Nous bornons ensuite la moyenne de cette probabilité. Soulignons que les phénomènes qui se produisent au bord de l'univers soulèvent de réelles difficultés techniques. Intuitivement, quand un quadruplet de sphères est proche du bord, ses tangentes potentielles le sont aussi. Or, la probabilité qu'une occultation se produise décroît quand une droite se rapproche du bord. Nous montrons alors que la probabilité qu'une droite soit tangente à plusieurs sphères décroît elle aussi quand ces sphères sont proches du bord de l'univers, un phénomène de compensation délicat à exploiter.

Notre étude s'adapte à d'autres types d'objets (sphères de rayons variables mais bornés, polyèdres «épais», polygones «épais»), à tout univers convexe et de courbure bornée et à d'autres distributions (Poisson notamment). Néanmoins, l'étude au bord de l'univers ne se généralise que partiellement si les objets ne sont pas des sphères de mêmes rayons (la borne obtenue étant $O(n^2)$ et non plus $\Theta(n)$).

Ce travail a été réalisé en collaboration avec plusieurs co-auteurs : Olivier Devillers, Vida Dujmovic, Hazel Everett, Sylvain Lazard, Hyeon-Suk Na et Sylvain Petitjean. Il a été publié dans le *SIAM Journal of Computing*.

6.1 Introduction

Visibility computations are central in computer graphics applications. Computing the limits of the umbra and penumbra cast by an area light source, identifying the set of blockers between any two polygons and determining the view from a given point are examples of visibility queries that are essential for the realistic rendering of 3D scenes. In global illumination algorithms, where the flow of light in a scene is simulated according to the laws of geometrical optics, visibility computations are excessively costly. In fact, more than half of the overall computation time can routinely be spent on visibility queries in radiosity simulations [54].

One approach to speeding up rendering is to store global visibility information in a data structure which can then be efficiently queried. The visibility complex, a partition of the set of maximal free line segments, has been proposed as a unified data structure encoding the visibility information of a scene [77] and has been used for rendering purposes [40]. Other related data structures include Pellegrini's ray-shooting structure [69], the aspect graph [75] and the visual hull [57]; see [37] for a recent survey.

One problem with these types of data structures which may prevent their application in practice is their potentially enormous size; the size of the visibility complex of a set of n triangles in \mathbb{R}^3 is $\Theta(n^4)$ in the worst case [40], which is prohibitive even for scenes of relatively modest size. Worst-case examples are somewhat artificial and indeed Durand, Drettakis and Puech [38] provide empirical evidence indicating that these worst-case upper bounds are largely pessimistic in practical situations; they observe a quadratic growth rate, albeit for rather small scenes. In 2D, while the worst-case complexity of the visibility complex is quadratic, experimental results strongly suggest that the size of the visibility complex of a scene consisting of scattered triangles is linear [24].

Our goal is to provide theoretical evidence to support these observations. To this end we investigate the *expected size* of the visibility complex, or equivalently, the expected number of visibility events, occurring in scenes in \mathbb{R}^3 . A visibility event is a combinatorial change in the view of a moving observer; such an event occurs when the viewing direction becomes tangent to some objects. For sets of convex objects in general position in \mathbb{R}^3 , the viewing direction can be tangent to at most four objects. Visibility events thus correspond to maximal non-occluded line segments tangent to at most four objects; combinatorially different visibility events correspond to the faces of the visibility complex.

In this paper we prove that the expected number of maximal non-occluded line segments tangent to four balls, amongst n uniformly distributed unit balls in \mathbb{R}^3 , is linear. This improves the previously known upper bound of $O(n^{8/3})$ by Durand et al. who proved the more general result that the expected number of (possibly occluded) lines tangent to four balls is $O(n^{8/3})$ for the same model [40]. The intuition behind our proof is that, given a line segment tangent to four balls, the probability that this segment is not occluded by any other ball is the probability that a cylinder-like volume of radius 1 about the segment is free from the centers of the other balls. This probability decays roughly exponentially fast with the length of the segment, yielding the result. Using our techniques we then show a linear bound on the expected size of the visibility complex of n uniformly distributed unit balls in \mathbb{R}^3 . A simple computation then provides us with the same result for the Poisson distribution.

Our results generalize in the following ways. We show that, for certain types of visibility events, the linear bound also applies to balls of various but bounded radii, to polyhedral objects enclosed between two concentric balls of fixed radius, and even to non-fat objects such as polygons, enclosed between two concentric circles of fixed radius, whose centers and normals are uniformly distributed. For the remaining types of visibility events (namely those occurring close

	Worst-case	Expected
possibly occluded lines amongst unit balls	$\Theta(n^4)$	$O(n^{\frac{8}{3}})$ [40]
free lines amongst unit balls	$\Omega(n^2)$ [★], $O(n^{3+\epsilon})$ [2]	$\Theta(n)$ [★]
free lines amongst disjoint homothetic polytopes	$\Omega(n^3)$ [28]	?
free segments amongst unit balls	$\Omega(n^2)$ [★], $O(n^4)$	$\Theta(n)$ [★]
free segments amongst arbitrary sized balls	$\Omega(n^3)$ [32], $O(n^4)$?
visibility complex of unit balls	$\Omega(n^2)$ [★], $O(n^4)$	$\Theta(n)$ [★]

TABLE 6.1. Known bounds on the complexity of the set of lines, free lines or maximal free line segments tangent to 4 amongst n objects. The expected complexities are calculated for the uniform distribution. The results referenced by ★ are established in this paper.

to the boundary of the scene – see Section 6.7.3 for the details), we prove only an $O(n^2)$ bound, which is still an improvement over the bound by Durand et al. [40].

Of course objects in graphics scenes are seldom distributed uniformly or according to a Poisson point process. We chose this model because it allows tractable proofs of theoretical results. This is important in a context where there are few rigorous results either theoretical or experimental. The same model, albeit with significant simplifying assumptions, has also been used to study the average complexity of ray shooting [90, 91] and occlusion culling for 2D urban scenes [66]. It is interesting to note that Szirmay-Kalos et al. [90], after establishing bounds on the average complexity of ray shooting in scenes consisting of unit balls distributed according to a Poisson point process, tested their algorithms on a small number of realistic scenes. The results they obtain are consistent with those predicted by the theoretical results thus providing some evidence that the model is helpful. No other model has been widely accepted by the graphics community and, in fact, generating meaningful random scenes usable for testing algorithms is a major problem. (Note that rather than attempting to generate random scenes, an alternative approach, which has been used to study the average complexity of ray shooting, is to fix the scene and randomly distribute the rays; see, for example, [9].)

Previous results on this topic include those that bound the number of lines and the number of free (i.e., non-occluded) lines amongst different sets of objects. They are summarized in Table 6.1. Agarwal, Aronov and Sharir [2] showed an upper bound of $O(n^{3+\epsilon})$ on the complexity of the space of line transversals of n balls by studying the lower envelope of a set of functions¹². Agarwal et al. [2] also showed a lower bound on the complexity of the space of line transversals of n balls of $\Omega(n^3)$ for arbitrarily sized balls and $\Omega(n^2)$ for unit sized balls. De Berg, Everett and Guibas [28] showed a $\Omega(n^3)$ lower bound on the number of free lines (and thus free segments) tangent to four amongst n disjoint homothetic convex polyhedra. Recently, Devillers and Ramos [32] presented a simple $\Omega(n^3)$ lower bound on the number of free segments tangent to 4 amongst n arbitrarily sized balls, which also holds for non-intersecting balls. We also present a simple $\Omega(n^2)$ lower bound on the number of free segments tangent to 4 amongst n unit balls.

In the next section we carefully define the problem and state our main results. In Section 6.3 and Section 6.4 we prove the expected upper and lower linear bounds on the number of free segments tangent to four balls. In Section 6.5 we extend this result to the visibility complex. We present in Section 6.6 a $\Omega(n^2)$ worst-case lower bound. In Section 6.7 we discuss extensions of our results to some other models. We conclude in Section 6.8.

¹²L'article[30] mentionne ici qu'une étude de l'enveloppe supérieure fournit un résultat analogue sur l'ensemble des droites libres. Si le résultat est vrai, il a été récemment prouvé par Agarwal et al. [5], l'argument avancé est faux et nous l'avons donc enlevé.

6.2 Our model and results

We first describe our objects and their distribution. Let $n \in \mathbb{N}$ and μ be a positive constant. A sample scene consists of n unit radius balls B_1, \dots, B_n whose centers p_1, \dots, p_n are independently chosen from the uniform distribution over a universal ball \mathcal{U} of radius R centered at O . Since we distribute the centers p_i over \mathcal{U} , the balls B_i may intersect each other and are contained in the ball, denoted \mathcal{U}^+ , whose radius is $R + 1$ and whose center is that of \mathcal{U} .

We define the radius R of the universal ball \mathcal{U} to be a function of n satisfying

$$R^3 = n/\mu. \tag{6.1}$$

The constant μ reflects the density of the balls in the sense that the expected number of centers lying in any given solid of volume V in the universe is $\frac{3}{4\pi}\mu V$. (The model is interesting only if n is asymptotically proportional to R^3 . Indeed, if $\frac{n}{R^3}$ tends to infinity when n tends to infinity, then the universe gets entirely filled up with balls and visibility events only occur in $\mathcal{U}^+ \setminus \mathcal{U}$. Conversely, if $\frac{n}{R^3}$ tends to zero when n tends to infinity, then the balls get scattered so far apart that the probability that any four (or three) balls have a common tangent goes to zero.)

We now define the *visibility complex* of a set of objects [77]. A *free* or *non-occluded* segment is a line segment that does not intersect the interior of any object. A free segment is maximal if it is not properly contained in another one. Thus, the endpoints of a maximal free segment are either on an object or at infinity. We say that two maximal free segments are similar if their endpoints lie on the same objects (possibly at infinity). The visibility complex of a collection of objects is roughly defined as the partition of the space of maximal free segments into connected components of similar segments¹³. Its faces have dimension between 0 and 4; when the objects are in adequate general position, a k -dimensional face corresponds to a connected set of similar maximal non-occluded line segments tangent to $4 - k$ objects.

In order to bound the total number of faces of the visibility complex, we first bound the number of 0-faces. To do this, we count the *T4-segments*, which are the free segments tangent to 4 balls with endpoints on two of those balls. Since there is a one-to-one correspondence between 0-faces and T4-segments when the objects are in adequate general position, this yields a bound on the expected number of vertices of the visibility complex. Note that since the balls are contained in \mathcal{U}^+ , the T4-segments are also contained in \mathcal{U}^+ .

Our main result is the following.

Theorem 3. *The expected number of T4-segments amongst n uniformly distributed unit balls is $\Theta(n)$.*

We extend this result to the higher dimensional faces of the complex.

Theorem 4. *The expected size of the visibility complex of n uniformly distributed unit balls is $\Theta(n)$.*

We also present an $\Omega(n^2)$ worst-case lower bound on the number of T4-segments amongst n unit balls in \mathbb{R}^3 (see Proposition 29). In fact the lower bound holds for the number of k -faces of the visibility complex, for all k between 0 and 4.

¹³Formally, we consider the space of free segments quotiented by the equivalence relation that is the transitive and reflexive closure of the inclusion. In other words, two free segments are identified if they are both contained in the same maximal free segment. This allows the cells of the partition to be connected.

6.3 The expected number of $T4$ -segments is at most linear

The general idea behind the proof of the upper bound of Theorem 3 is the following. For any ordered choice of four balls, we bound from above the probability that a line is tangent to these balls in the given order and is not occluded in between its contact points with the balls. Then we sum these probabilities over all ordered quadruples of balls and all potential tangent lines to these balls.

For any two points p and q , and positive real number α , let $\mathcal{H}(p, q, \alpha)$ denote the union of all the balls of radius α centered on the line segment pq (see Figure 6.1). We first show that a line is tangent to four balls B_i, B_j, B_k and B_l in that order only if p_j and p_k are in $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2)$. Thus the volume of $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2) \cap \mathcal{U}$ gives an upper bound on the probability that a line tangent to the four balls, in the given order, exists.

We next show that a segment tangent to four balls B_i, B_j, B_k and B_l in that order, at points t_i, t_j, t_k and t_l , respectively, is not occluded if and only if the centers of all remaining balls are outside or on the boundary of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$. The volume of $\mathcal{U} \setminus \mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$ gives an upper bound on the probability that the tangent segment is not occluded. Thus, to get an upper bound on that probability, we need a lower bound on the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$.

To bound the probability that a $T4$ -segment exists, we integrate over the distance between p_i and p_l , and over the distance from p_i to the boundary of the universe \mathcal{U} . This integral is split into three parts covering the cases where

- (i) B_i and B_l are close to one another,
- (ii) at least one of B_i and B_l is entirely inside the universe,
- (iii) B_i and B_l are not close to one another and both are partially outside the universe.

In each case we over-estimate the volume of $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2) \cap \mathcal{U}$ and under-estimate the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$. We apply the same general proof technique in each of the three cases. While Case (ii) illustrates the main idea behind the proof (Case (i) being a simplified version), extending this idea to Case (iii) is technically challenging because of the difficulties caused by the boundary of the universe.

6.3.1 Definitions

Let \mathcal{N} be the set of ordered 4-tuples (i, j, k, l) chosen from $\{1, 2, \dots, n\}$ such that i, j, k, l are pairwise distinct. In our model, the probability that four centers are collinear is zero, so we may assume that any set of four balls admits at most 12 real common tangent lines [31, 59]. Moreover, the real common tangent lines correspond to the real solutions of a degree 12 system of equations. For any set of four balls we order arbitrarily the 12 solutions of the associated system.

Given four balls B_i, B_j, B_k and B_l , we denote by $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$, for ω in $\{1, \dots, 12\}$, the event that the ω^{th} solution of the system is real, that the corresponding real tangent line is tangent to the four balls B_i, B_j, B_k and B_l in that order, and that p_i is not closer than p_l to the boundary of \mathcal{U} . Whenever $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ occurs, we denote the points of tangency of that line on B_i, B_j, B_k, B_l by t_i, t_j, t_k, t_l , respectively. Let $\delta_{i,j,k,l}^\omega$ be the event that $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ occurs and the line segment $t_i t_l$ is not occluded. Notice that if $\delta_{i,j,k,l}^\omega$ occurs, the balls B_i, B_j, B_k, B_l define a $T4$ -segment, and that a $T4$ -segment corresponds to a unique $\delta_{i,j,k,l}^\omega$.

Let $\mathbf{x}_{i,l}$ be the random variable representing the distance from p_i to p_l , and \mathbf{y}_i (resp. \mathbf{y}_l) be the random variable denoting the distance from p_i (resp. p_l) to the boundary of the universe.

In the sequel, a random point p denotes a point chosen from the uniform distribution over \mathcal{U} .

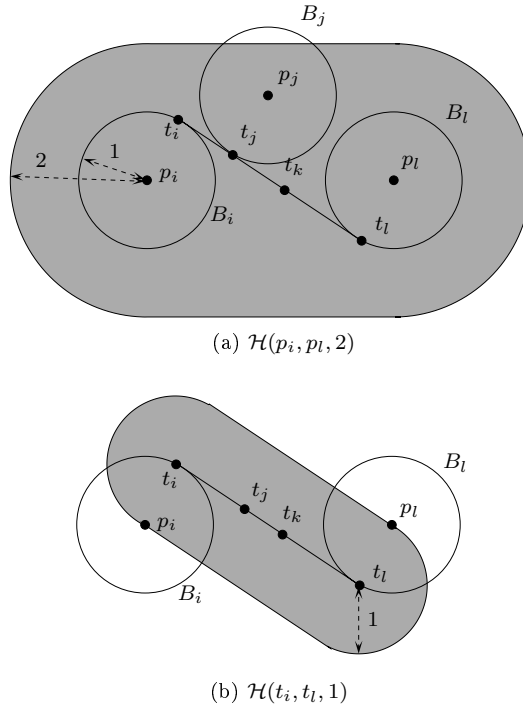


FIG. 6.1. $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2)$ and $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$ are shown shaded.

6.3.2 The Proof

There is a one-to-one correspondence between the $T4$ -segments and the events $\delta_{i,j,k,l}^\omega$ that occur. We thus have the following straightforward lemma.

Lemma 5. *The expected number of $T4$ -segments amongst n uniformly distributed unit balls is*

$$\sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{N}} \sum_{\omega=1}^{12} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega).$$

We bound the probability $\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega)$ by integrating over the distance x between p_i and p_l , and over the distance y from p_i to the boundary of the universe \mathcal{U} . The integral is split into three parts covering the cases where (i) the balls B_i and B_l are close to one another, (ii) p_i is at distance at least 1 from the boundary of \mathcal{U} , and (iii) the balls B_i and B_l are not close to one another and p_i is at distance less than 1 from the boundary of \mathcal{U} . Note that in the last case, if $\delta_{i,j,k,l}^\omega$ occurs, then both ball centers p_i and p_l are within distance 1 from the boundary of \mathcal{U} . Two balls are considered close to one another if their centers are closer than some sufficiently large constant; for technical reasons which are embedded in the proof of Proposition 31, we actually define *close* to mean distance at most 6.

Lemma 6. $\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega) \leq I_{x \leq 6} + I_{y \geq 1} + I_{x > 6, y < 1}$, where

$$\begin{aligned} I_{x \leq 6} &= \int_{x=0}^6 \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x) \cdot \Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx), \\ I_{y \geq 1} &= \int_{x=0}^{2R} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i \geq 1) \cdot \Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx \mid \mathbf{y}_i \geq 1), \\ I_{x > 6, y < 1} &= \int_{x=6}^{2R} \int_{y=0}^1 \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \\ &\quad \cdot \Pr((x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \cap (\mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \mid \mathbf{y}_i = y) \\ &\quad \cdot \Pr(y \leq \mathbf{y}_i < y + dy). \end{aligned}$$

Démonstration. By the Total Probability Theorem (see [68]),

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega) = \int_{x=0}^{2R} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x) \cdot \Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx).$$

The integral can be split at $x = 6$, giving $I_{x \leq 6}$. Then applying the Total Probability Theorem on what remains, we get

$$\begin{aligned} \int_{x=6}^{2R} \int_{y=0}^R \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y) \cdot \Pr((x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \mid \mathbf{y}_i = y) \\ \cdot \Pr(y \leq \mathbf{y}_i < y + dy) \end{aligned} \quad (6.2)$$

which can be split at $y = 1$. The part corresponding to y between 1 and R is equal to

$$\begin{aligned} \int_{x=6}^{2R} \int_{y=1}^R \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_i \geq 1) \\ \cdot \Pr((x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \mid \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_i \geq 1) \cdot \Pr(y \leq \mathbf{y}_i < y + dy) \\ \leq \int_{x=6}^{2R} \int_{y=0}^R \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \cap (x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \mid \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_i \geq 1) \cdot \Pr(y \leq \mathbf{y}_i < y + dy). \end{aligned}$$

Applying the Total Probability Theorem again, we get

$$\int_{x=6}^{2R} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \cap (x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \mid \mathbf{y}_i \geq 1)$$

which is less than $I_{y \geq 1}$. Consider now the part of (6.2) for y between 0 and 1. If $\mathbf{y}_l > \mathbf{y}_i$ then $\delta_{i,j,k,l}^\omega$ does not occur (by definition of $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$), thus we have

$$\begin{aligned} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y) \cdot \Pr((x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \mid \mathbf{y}_i = y) \\ = \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \cap (x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \mid \mathbf{y}_i = y) \\ = \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \cap (x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \cap (\mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \mid \mathbf{y}_i = y) \\ = \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \\ \cdot \Pr((x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \cap (\mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \mid \mathbf{y}_i = y). \end{aligned}$$

Thus, the part of (6.2) for y between 0 and 1 is equal to $I_{x > 6, y < 1}$. \square

Let Ξ denote any of the following events : $(\mathbf{x}_{i,l} = x)$, $(\mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i \geq 1)$, $(\mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i)$. The next three lemmas are used to bound $\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \Xi)$ appearing in the three integrals $I_{x \leq 6}$, $I_{y \geq 1}$ and $I_{x > 6, y < 1}$.

Lemma 7. *If a line is tangent to four balls B_i, B_j, B_k, B_l in that order at t_i, t_j, t_k, t_l , respectively, then $p_j, p_k \in \mathcal{H}(p_i, p_l, 2)$. Also, the segment $t_i t_l$ is not occluded if and only if the interior of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$ does not contain the center of any other ball.*

Démonstration. Segment $t_i t_l$ is contained in $\mathcal{H}(p_i, p_l, 1)$. Since t_j and t_k belong to that segment, t_j and t_k are also in $\mathcal{H}(p_i, p_l, 1)$. Thus p_j, p_k are both in $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2)$. See Figure 6.1 (a).

The segment $t_i t_l$ is occluded if and only if some ball B_γ , $\gamma \neq i, j, k, l$, properly intersects it, that is the center of B_γ lies in the interior of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$. See Figure 6.1 (b). \square

Lemma 8. $\Pr(p \in \mathcal{H}(p_i, p_l, 2) \mid \Xi) \leq \frac{(3x + 8)}{R^3}$.

Démonstration.

$$\Pr(p \in \mathcal{H}(p_i, p_l, 2) \mid \Xi) = \frac{\text{Volume of } \mathcal{H}(p_i, p_l, 2) \cap \mathcal{U}}{\text{Volume of } \mathcal{U}} \Big|_{\Xi} \leq \frac{\text{Volume of } \mathcal{H}(p_i, p_l, 2)}{\text{Volume of } \mathcal{U}} \Big|_{\Xi}.$$

When Ξ occurs, $\mathbf{x}_{i,l} = x$ and the volumes of $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2)$ and \mathcal{U} are $\frac{4\pi}{3}(3x + 8)$ and $\frac{4\pi}{3}R^3$, respectively. Thus

$$\Pr(p \in \mathcal{H}(p_i, p_l, 2) \mid \Xi) \leq \frac{3x + 8}{R^3}.$$

\square

Lemma 9. $\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \Xi) \leq \frac{(3x + 8)^2}{R^6} \cdot \Pr(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega, \Xi)^{n-4}$.

Démonstration. If $\delta_{i,j,k,l}^\omega$ occurs, then $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ necessarily occurs, thus

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \Xi) = \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \cap \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega \mid \Xi) = \Pr(\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega \mid \Xi) \cdot \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega, \Xi).$$

By Lemma 7, $\Pr(\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega \mid \Xi)$ is bounded by the probability that p_j and p_k belong to $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2)$ given Ξ , and $\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega)$ is equal to the probability that for all $\gamma \neq i, j, k, l$, point p_γ is outside $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$ given Ξ . Since all the points are independently and identically drawn from the uniform distribution over \mathcal{U} , Lemma 8 yields the result. \square

We consider the three integrals $I_{x \leq 6}$, $I_{y \geq 1}$ and $I_{x > 6, y < 1}$ in the following subsections, and prove that each is bounded by $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. This will complete the proof of the upper bound of Theorem 3 since, by Lemmas 5 and 6, the expected number of $T4$ -segments is less than $12\binom{n}{4}(I_{x \leq 6} + I_{y \geq 1} + I_{x > 6, y < 1})$.

B_i and B_l are close to one another

We prove here that $I_{x \leq 6}$ is $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. When B_i and B_l are close to one another, the probability that there exist two other balls, B_j and B_k , defining a line tangent to B_i, B_j, B_k, B_l in that order, is small enough that we do not need to consider occlusions in order to get the bound we want.

We first bound the term $\Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx)$ appearing in the integral $I_{x \leq 6}$.

Lemma 10. $\Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \leq \frac{3x^2}{R^3} dx$.

Démonstration. When p_i is given, p_l must belong to a spherical shell between two spheres of center p_i and radii x and $x + dx$. The probability $\Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx)$, if p_i is known, is exactly the volume of the part of the spherical shell inside \mathcal{U} divided by the volume of \mathcal{U} . The volume of the part of the spherical shell inside \mathcal{U} is bounded from above by the volume of the spherical shell which is $4\pi x^2 dx$. Since the volume of \mathcal{U} is $\frac{4}{3}\pi R^3$ we get the claimed bound. (The exact value of $\Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx)$ is actually given in [60, 84] but the above approximate bound is enough for our purposes.) \square

Proposition 11. $I_{x \leq 6}$ is $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Démonstration. Recall that (see Lemma 6)

$$I_{x \leq 6} = \int_{x=0}^6 \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x) \cdot \Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx).$$

By Lemma 9,

$$\begin{aligned} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x) &\leq \frac{(3x+8)^2}{R^6} \cdot \Pr(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega)^{n-4} \\ &\leq \frac{(3x+8)^2}{R^6}. \end{aligned}$$

It thus follows from Lemma 10 that

$$I_{x \leq 6} \leq \int_{x=0}^6 \frac{(3x+8)^2}{R^6} \cdot \frac{3x^2}{R^3} dx = \frac{\mu^3}{n^3} \int_{x=0}^6 3x^2(3x+8)^2 dx = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

\square

B_i is entirely inside \mathcal{U}

For the integral $I_{y \geq 1}$, occlusions must be taken into account. To this aim, we bound from below the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ in the following lemma.

Lemma 12. When $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ occurs and $\mathbf{y}_i \geq 1$, the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{\pi}{12} \mathbf{x}_{i,l}$.

Démonstration. Let K be the ball having diameter $p_i t_i$. Note that K and p_l are both contained in \mathcal{U} and in $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$. The convex hull of p_l and K is thus contained in $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$, and its volume is larger than half the volume of the ball K , $\frac{\pi}{12}$, plus the volume of a cone of apex p_l , of base a disk whose boundary is a great circle of K , and of height greater than $\mathbf{x}_{i,l} - 1$. The volume of that cone is at least $\frac{1}{3} \frac{\pi}{2^2} (\mathbf{x}_{i,l} - 1) = \frac{\pi}{12} \mathbf{x}_{i,l} - \frac{\pi}{12}$. \square

We now bound the probability that a tangent line segment $t_i t_l$ is not occluded by any of the other $n - 4$ balls, given that the line segment $t_i t_l$ exists and the ball B_i is entirely contained in \mathcal{U} .

Lemma 13. $\Pr(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i \geq 1, \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega)^{n-4} < 55 \exp\left(-\frac{\mu x}{16}\right)$.

Démonstration. First notice that

$$\begin{aligned} \Pr(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i \geq 1, \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega) \\ = 1 - \frac{\text{Volume of } \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}}{\text{Volume of } \mathcal{U}} \Big|_{\mathbf{x}_{i,l}=x, \mathbf{y}_i \geq 1, \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega}. \end{aligned}$$

By Lemma 12, the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is bounded from below by $\frac{\pi}{12}x$. Since the volume of \mathcal{U} is $\frac{4}{3}\pi R^3$, we get

$$\Pr(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i \geq 1, \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega)^{n-4} < \left(1 - \frac{x}{16R^3}\right)^{n-4}.$$

For any $0 \leq t \leq 1$, we have $(1-t) \leq e^{-t}$ thus

$$(1-t)^{n-4} \leq e^{-t(n-4)} = e^{-tn} e^{4t} \leq e^4 e^{-tn} < 55 e^{-tn}.$$

Now $0 \leq x \leq 2R$ and $R \geq 1$ since B_i is entirely inside \mathcal{U} . Thus $0 \leq \frac{x}{16R^3} \leq \frac{1}{8R^2} \leq 1$ and

$$\begin{aligned} \Pr(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i \geq 1, \mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega)^{n-4} &< 55 \exp\left(-\frac{nx}{16R^3}\right) \\ &= 55 \exp\left(-\frac{\mu x}{16}\right). \end{aligned}$$

□

The following proposition now bounds the integral $I_{y \geq 1}$.

Proposition 14. $I_{y \geq 1}$ is $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Démonstration. Recall that

$$I_{y \geq 1} = \int_{x=0}^{2R} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i \geq 1) \cdot \Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx \mid \mathbf{y}_i \geq 1).$$

By Lemmas 9 and 13 we have

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i \geq 1) \leq \frac{(3x+8)^2}{R^6} \cdot 55 \exp\left(-\frac{\mu x}{16}\right).$$

Similarly as in Lemma 10 we have

$$\Pr(x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx \mid \mathbf{y}_i \geq 1) \leq \frac{3x^2}{R^3} dx.$$

Thus we get

$$\begin{aligned} I_{y \geq 1} &\leq \int_{x=0}^{2R} \frac{(3x+8)^2}{R^6} \cdot 55 \exp\left(-\frac{\mu x}{16}\right) \cdot \frac{3x^2}{R^3} dx \\ &\leq \frac{\mu^3}{n^3} \int_{x=0}^{+\infty} 3x^2(3x+8)^2 \cdot 55 \exp\left(-\frac{\mu x}{16}\right) dx. \end{aligned}$$

Changing $\frac{\mu x}{16}$ by z we get integrals of the kind

$$\int_0^\infty z^r \exp(-z) dz$$

which is bounded by a constant and thus $I_{y \geq 1}$ is $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

□

\mathbf{B}_i and \mathbf{B}_l are not close to one another and \mathbf{B}_i is partially outside \mathcal{U}

The only remaining task is to bound the integral $I_{x>6,y<1}$. As in the previous case, we need to bound from below the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$. Here, however, the tangent $t_i t_l$ can be entirely outside \mathcal{U} , so the bound of Lemma 12 does not apply and a more intricate proof is needed. We need to distinguish two cases depending on the distance of segment $t_i t_l$ from O , the center of \mathcal{U} .

To this aim, we introduce two new types of events. For any $s \in \mathbb{R}$, let $\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(s)$ (resp. $\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(s)$) be the event that $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ occurs and the line segment $t_i t_l$ is at distance greater (resp. less) than $R + 1 - s$ from O . For reasons that will become clear in the proof of Lemma 17, we consider $s = y^{\frac{2}{3}}$.

The next five lemmas are used to bound the first term of the integral $I_{x>6,y<1}$.

Lemma 15. *For any random point p in \mathcal{U} , $\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i)$ is equal to*

$$\begin{aligned} & \Pr\left(\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i\right) \\ & \cdot \Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4} \\ & + \Pr\left(\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i\right) \\ & \cdot \Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4}. \end{aligned}$$

Démonstration. $\delta_{i,j,k,l}^\omega$ implies $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ which can be split into $\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})$, $\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})$, and the event that $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ occurs and the line segment $t_i t_l$ is at distance exactly $R + 1 - y^{\frac{2}{3}}$ from O . This later event occurs with probability 0, thus

$$\begin{aligned} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) = & \\ & \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \cap \mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \\ & + \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \cap \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i), \end{aligned}$$

which can be expanded into

$$\begin{aligned} & \Pr(\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \\ & \cdot \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})) \\ & + \Pr(\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \\ & \cdot \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})). \end{aligned}$$

When $\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})$ occurs, the probability

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}))$$

is the probability that the tangent is not occluded, that is, p_γ does not belong to $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$ for all the $n - 4$ values of $\gamma \neq i, j, k, l$. The same argument holds for $\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})$. Since the p_γ are independent, we get the result. \square

In order to bound the two terms in Lemma 15,

$$\begin{aligned} & \Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4} \text{ and} \\ & \Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4}, \end{aligned}$$

we need to bound the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ from below.

Lemma 16. *When $\mathbf{x}_{i,l} \geq 6$, $\mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i \leq 1$, $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ occurs and segment $t_i t_l$ is at distance less than $R + 1 - s$, $0 \leq s \leq 1$, from the center of \mathcal{U} , then the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is larger than $\frac{1}{6\sqrt{2}} (\mathbf{x}_{i,l} - 5) s \sqrt{s}$.*

Démonstration. We give here the idea of the proof ; full details can be found in Section 6.9. Let t be the closest point on segment $t_i t_l$ from O , and D be a unit radius disk centered at t in a plane containing O , the center of \mathcal{U} . We define a quadrilateral with vertices a, b, a', b' such that a and a' are the closest and the farthest points, respectively, in $D \cap \mathcal{U}$ from O , and b and b' are the points of intersection of ∂D and the perpendicular bisector of segment aa' (see Figure 6.2). Let v be equal to $R + 1$ minus the distance from O to segment $t_i t_l$. We prove that the convex hull of a, b, a', b' and p_l , which is included in $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$, has volume greater than $\frac{1}{6\sqrt{2}} (\mathbf{x}_{i,l} - 5) \min(2\sqrt{2}, v\sqrt{v})$. It follows that, for any $0 \leq s \leq 1$, if segment $t_i t_l$ is at distance less than $R + 1 - s$ from O , then $v \geq s$ and the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{1}{6\sqrt{2}} (\mathbf{x}_{i,l} - 5) s \sqrt{s}$. \square

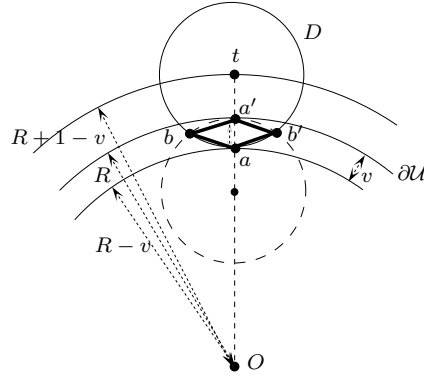


FIG. 6.2. For the sketch of the proof of Lemma 16 ($v \in (0, 1)$).

Lemma 17. *For any random point p in \mathcal{U} , $x \geq 6$ and $0 \leq y \leq 1$,*

$$\Pr \left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \right)^{n-4} < 55 \exp \left(-\frac{\mu(x-5)y^2}{8\sqrt{2}\pi} \right)$$

and

$$\Pr \left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \right)^{n-4} < 55 \exp \left(-\frac{\mu(x-5)y}{8\sqrt{2}\pi} \right).$$

Furthermore, if $x \geq 6\sqrt{R}$ then

$$\Pr \left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \right)^{n-4} < 55 \exp \left(-\frac{\mu(x-5)}{8\sqrt{2}\pi} \right).$$

Démonstration. Let $\mathbf{x}_{i,l} = x$, $\mathbf{y}_i = y$ and suppose first that event $\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})$ occurs. Since p_i is at distance $R - y$ from O , the segment $t_i t_l$ is at distance less than $R + 1 - y$ from O , and thus, by Lemma 16, the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{1}{6\sqrt{2}}(x - 5)y\sqrt{y}$, which is bigger than $\frac{1}{6\sqrt{2}}(x - 5)y^2$ since $0 \leq y \leq 1$ (we bound $y\sqrt{y}$ from below by y^2 only so that we can actually compute the integral \mathcal{I}_1 in the proof of Proposition 22). We now follow the proof of Lemma 13, except that the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is now bounded from below by $\frac{1}{6\sqrt{2}}(x - 5)y^2$ instead of $\frac{\pi}{12}x$. We get

$$\Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4} < 55 \exp\left(-\frac{\mu(x-5)y^2}{8\sqrt{2}\pi}\right).$$

When $\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})$ occurs, the segment $t_i t_l$ is at distance less than $R + 1 - y^{\frac{2}{3}}$ from O , and thus, by Lemma 16, the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is bounded from below by $\frac{1}{6\sqrt{2}}(x - 5)y^{\frac{2}{3}}\sqrt{y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}(x - 5)y$. Then, as before, we get

$$\Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4} < 55 \exp\left(-\frac{\mu(x-5)y}{8\sqrt{2}\pi}\right).$$

Now, if $x \geq 6\sqrt{R}$, the length of the tangent $t_i t_l$ is at least $6\sqrt{R} - 2$. Since $x \geq 6$, $R > 3$ and a simple computation shows that $6\sqrt{R} - 2$ is bigger than $2\sqrt{2R + 1}$ which is the length of the longest line segment that may entirely lie inside $\mathcal{U}^+ \setminus \mathcal{U}$. Thus $\text{dist}(O, t_i t_l) \leq R = R + 1 - s$ with $s = 1$ and, by Lemma 16, the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{1}{6\sqrt{2}}(x - 5)$. Then, as before, we get

$$\Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4} < 55 \exp\left(-\frac{\mu(x-5)}{8\sqrt{2}\pi}\right).$$

□

Lemma 18. $\Pr(\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \leq \frac{(3x+8)^2}{R^6}$.

Démonstration. The event $\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})$ occurs only if $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ occurs. The result thus follows since, by Lemmas 7 and 8, $\Pr(\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \leq \frac{(3x+8)^2}{R^6}$. □

Lemma 19. *If $y < 1$, then*

$$\Pr\left(\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y\right) \leq 81\pi^2 \frac{(x+6)^2 y^2}{R^6}.$$

Démonstration. A “far” tangent $t_i t_l$ is at distance at least $R + 1 - y^{\frac{2}{3}}$ from the center O of \mathcal{U} . Such a segment also lies in $\mathcal{H}(p_i, p_l, 1)$. Let E be the part of $\mathcal{H}(p_i, p_l, 1)$ lying outside of the

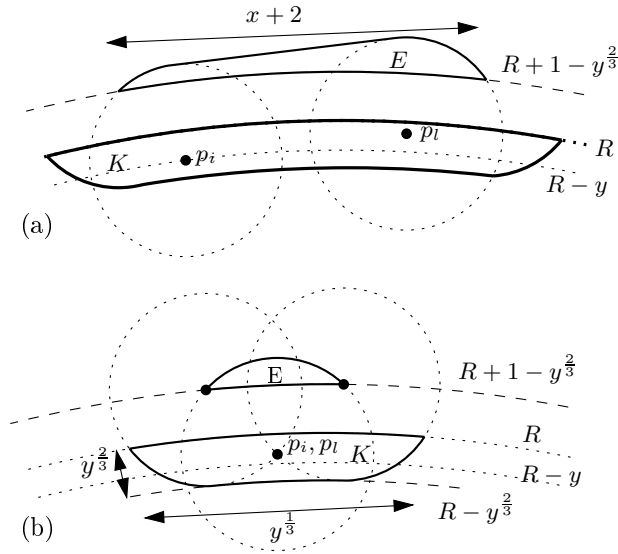


FIG. 6.3. For the sketch of the proof of Lemma 19.

sphere of radius $R + 1 - y^{\frac{2}{3}}$ and center O . See Figure 6.3 (a). Now, both p_j and p_k must be in the region inside \mathcal{U} and within distance 1 from E . Denote this region by K . Then

$$\Pr\left(\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i\right) \leq \left(\frac{\text{Volume of } K}{\text{Volume of } \mathcal{U}}\right)^2.$$

By Proposition 34, which we prove in Section 6.10, the volume of K is bounded from above by $12\pi^2(x+6)y$, which yields the result. Here we give the intuition of the proof. Refer to Figure 6.3. First notice that the “length” of K is at most $x+4$. Since K is enclosed in between a sphere of radius R and one of radius $R-y^{\frac{2}{3}}$, its “height” is at most $y^{\frac{2}{3}}$. For the “width”, consider Figure 6.3 (b) which shows a cross-section of K taken with a plane through O and perpendicular to $p_i p_l$. The “width” of K is no more than 2 times the “width” of E . The “height” of E can be bounded by some constant times $y^{\frac{2}{3}}$; thus its “width” can be bounded by some constant times $\sqrt{y^{\frac{2}{3}}} = y^{\frac{1}{3}}$. Thus, intuitively, the volume of K is smaller than $(x+4)y^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = (x+4)y$, up to a constant, and the result follows. \square

We now bound the two last terms of the integral $I_{x>6,y<1}$.

Lemma 20. $\Pr(y \leq \mathbf{y}_i < y + dy) \leq \frac{3dy}{R}$.

Démonstration. The event $(y \leq \mathbf{y}_i < y + dy)$ occurs only if p_i lies in the spherical shell delimited by the two spheres centered at O of radii $R-y$ and $R-y-dy$ whose volume is smaller than $4\pi R^2 dy$. Dividing by the volume of \mathcal{U} proves the result. \square

Lemma 21. For $6 \leq x \leq 2R$ and $y \leq 1$, we have

$$\Pr((x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \cap (\mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \mid \mathbf{y}_i = y) \leq \frac{6xy dx}{R^3}.$$

Démonstration. The probability $\Pr((x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \cap (\mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \mid \mathbf{y}_i = y)$ is equal to the volume of the region (shown in grey in Figure 6.4) which is the intersection of the region in between the two spheres centered at p_i and of radii x and $x + dx$, and the region in between the two spheres centered at O and of radii R and $R - y$, divided by the volume of \mathcal{U} . We prove in Proposition 39 in Section 6.11 that the volume of that region is at most $8\pi xy dx$. Roughly speaking, the volume bounded by the four spheres is at most $8\pi xy dx$ because, its “thickness” is dx , its “height” is y and its “radius” is x . Dividing by the volume of \mathcal{U} proves the result. \square

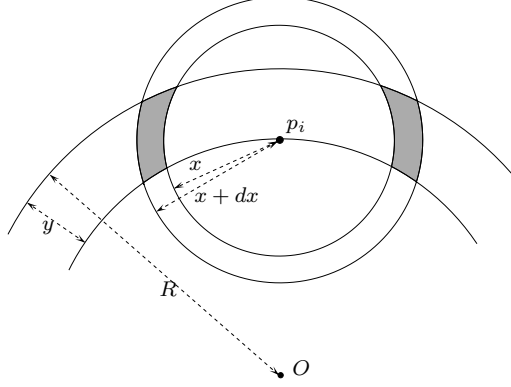


FIG. 6.4. For the proof of Lemma 21.

We can now bound the integral $I_{x>6,y<1}$ of Lemma 6.

Proposition 22. $I_{x>6,y<1}$ is $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Démonstration. Recall that

$$\begin{aligned} I_{x>6,y<1} &= \int_{x=6}^{2R} \int_{y=0}^1 \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \\ &\quad \cdot \Pr((x \leq \mathbf{x}_{i,l} < x + dx) \cap (\mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \mid \mathbf{y}_i = y) \\ &\quad \cdot \Pr(y \leq \mathbf{y}_i < y + dy). \end{aligned}$$

By Lemmas 20 and 21, we get

$$I_{x>6,y<1} \leq \int_{x=6}^{2R} \int_{y=0}^1 \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \cdot \frac{6xy dx}{R^3} \cdot \frac{3dy}{R}.$$

By Lemma 15, $\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i)$ is equal to

$$\begin{aligned} &\Pr\left(\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i\right) \\ &\quad \cdot \Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4} \\ &\quad + \Pr\left(\mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i\right) \\ &\quad \cdot \Pr\left(p \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i, \mathcal{N}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}})\right)^{n-4}. \end{aligned}$$

We split the integral at $x = 6\sqrt{R}$. When $x \geq 6\sqrt{R}$, the distance from O to the tangent $t_i t_l$ is less than R (see the proof of Lemma 17), which is less than $R + 1 - y^{\frac{2}{3}}$ for any y in $(0, 1)$. Thus, for any $x \geq 6\sqrt{R}$ and $y \in (0, 1)$, the probability $\Pr\left(\mathcal{F}_{i,j,k,l}^\omega(y^{\frac{2}{3}}) \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i\right)$ is equal to 0. It then follows from Lemmas 17, 18 and 19 that $I_{x>6,y<1} \leq \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$ with

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \int_{x=6}^{6\sqrt{R}} \int_{y=0}^1 81 \pi^2 \frac{(x+6)^2 y^2}{R^6} \cdot 55 \exp\left(-\frac{\mu(x-5)y^2}{8\sqrt{2}\pi}\right) \cdot \frac{6xy dx}{R^3} \cdot \frac{3dy}{R}, \\ \mathcal{I}_2 &= \int_{x=6}^{6\sqrt{R}} \int_{y=0}^1 \frac{(3x+8)^2}{R^6} \cdot 55 \exp\left(-\frac{\mu(x-5)y}{8\sqrt{2}\pi}\right) \cdot \frac{6xy dx}{R^3} \cdot \frac{3dy}{R}, \\ \mathcal{I}_3 &= \int_{x=6\sqrt{R}}^{2R} \int_{y=0}^1 \frac{(3x+8)^2}{R^6} \cdot 55 \exp\left(-\frac{\mu(x-5)}{8\sqrt{2}\pi}\right) \cdot \frac{6xy dx}{R^3} \cdot \frac{3dy}{R}.\end{aligned}$$

Changing $\frac{\mu(x-5)}{8\sqrt{2}\pi}$ by z in the three integrals and y^2 by y' in \mathcal{I}_1 , we get

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &\leq \frac{K}{R^{10}} \sum_{u=0}^3 \int_{z=0}^{c\sqrt{R}} \int_{y'=0}^1 z^u y' \exp(-z y') dz dy', \\ \mathcal{I}_2 &\leq \frac{K}{R^{10}} \sum_{u=0}^3 \int_{z=0}^{c\sqrt{R}} \int_{y=0}^1 z^u y \exp(-z y) dz dy, \\ \mathcal{I}_3 &\leq \frac{K}{R^{10}} \sum_{u=0}^3 \int_{z=0}^{\infty} \int_{y=0}^1 z^u y \exp(-z) dz dy,\end{aligned}$$

where K and c are some positive constants.

Note first that \mathcal{I}_3 is bounded from above by $\frac{K}{R^{10}} \sum_{u=0}^3 \int_{z=0}^{\infty} z^u \exp(-z) dz$. These integrals are bounded by a constant, thus \mathcal{I}_3 is $O\left(\frac{1}{R^{10}}\right)$.

To bound the integrals \mathcal{I}_1 and \mathcal{I}_2 , we now compute the integral

$$\int_{z=0}^A \int_{y=0}^1 z^u y \exp(-z y) dz dy \tag{6.3}$$

for $u \in \{0, \dots, 3\}$ and $A > 0$, for example with Maple [87]. For $u = 0$ it is equal to

$$\frac{\exp(-A) + A - 1}{A}. \tag{6.4}$$

For $u = 1$, the integral (6.3) is equal to

$$\exp(-A) + \ln A + Ei(1, A) + \gamma - 1 \tag{6.5}$$

where $Ei(1, A)$ denotes the exponential integral $\int_{t=1}^{\infty} \frac{\exp(-At)}{t} dt$ and γ denotes Euler's constant. Finally, for $u = 2$ or 3 , the integral (6.3) is equal to

$$\exp(-A) P_1(A, u-1) + P_2(A, u-1) \tag{6.6}$$

where $P_i(A, u-1)$ denotes a polynomial of degree $u-1$ in A .

When A tends to ∞ , (6.4) tends to 1, (6.5) is equivalent to $\ln A$ (since $Ei(1, A)$ tends to 0) and (6.6) is equivalent to the leading monomial of $P_2(A, u-1)$ which is of degree $u-1 \leq 2$. This guarantees that for $A = c\sqrt{R}$ and $u \in \{0, \dots, 3\}$, the integral (6.3) is $O(R)$. It follows that \mathcal{I}_1 and \mathcal{I}_2 are $O\left(\frac{1}{R^9}\right)$.

Since $R^3 = n/\mu$, we get that $I_{x>6,y<1} \leq \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = O\left(\frac{1}{R^9}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. \square

We can now conclude the proof that the expected number of $T4$ -segments is $O(n)$, because, by Lemmas 5, 6, and Propositions 11, 14, and 22, the expected number of $T4$ -segments is smaller than

$$\sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{N}} \sum_{\omega=1}^{12} \left(O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = O(n).$$

6.4 The expected number of $T4$ -segments is at least linear

In this section, we prove that the expected number of $T4$ -segments amongst n uniformly distributed unit balls is $\Omega(n)$. To do this, we bound from below the probability that four given balls have a given $T4$ -segment. The key step is to give a condition on the relative positions of four unit balls that guarantees that they have exactly twelve common tangent lines. We use here the notation as defined in Section 6.3.1.

Lemma 23. *Let e be a real number satisfying $\frac{4\sqrt{2}}{3} < e < 2$ and let the radius R of \mathcal{U} be strictly greater than e . There exists an $\epsilon > 0$ such that for any point $p \in \mathcal{U}$, there exist three balls $\Gamma_1(p)$, $\Gamma_2(p)$, $\Gamma_3(p)$ of radius ϵ contained in \mathcal{U} and satisfying the following conditions :*

- p and the centers of the $\Gamma_i(p)$ form a regular tetrahedron with edges of length e , and
- for any triple of points (p_1, p_2, p_3) , p_i taken from $\Gamma_i(p)$, the four unit balls centered at p , p_1 , p_2 and p_3 have exactly 12 distinct tangent lines.

Démonstration. Macdonald, Pach and Theobald proved [59, Lemma 3] that 4 unit balls centered on the vertices of a regular tetrahedron with edges of length e , $\frac{4\sqrt{2}}{3} < e < 2$, have exactly 12 distinct real common tangent lines. Moreover, these 12 tangent lines correspond to the 12 real roots of a system of equations of degree 12, thus each tangent line corresponds to a *simple* root of that system of equations. It thus follows that for any sufficiently small perturbation of the 4 ball centers, the 4 perturbed balls still have 12 real common tangent lines. Let $\epsilon > 0$ be such that the 4 ball centers can move distance ϵ in any direction while keeping 12 distinct common tangents.

Now, for any point $p \in \mathcal{U}$, consider a regular tetrahedron with edge length e having p as a vertex and such that the other vertices are at distance at least ϵ from the boundary of \mathcal{U} ; for example, we can choose the other three vertices on a plane perpendicular to the segment Op . Let $\Gamma_1(p)$, $\Gamma_2(p)$, and $\Gamma_3(p)$ be the balls of radius ϵ centered at the vertices, distinct from p , of that tetrahedron. By the previous reasoning, for any $q \in \Gamma_1(p)$, $r \in \Gamma_2(p)$, and $s \in \Gamma_3(p)$, the four unit balls centered at p , q , r and s have exactly twelve tangents. \square

Now, by Lemma 5, the expected number of $T4$ -segments is

$$\sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{N}} \sum_{\omega=1}^{12} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega).$$

Thus we only need to bound from below the probability that the event $\delta_{i,j,k,l}^\omega$ occurs.

Lemma 24. $\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega)$ is $\Omega\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Démonstration. Assume that $n > 8\mu$ so that the radius $R = \sqrt[3]{n/\mu}$ of \mathcal{U} is larger than 2 and let $T(p)$ be the set $\Gamma_1(p) \times \Gamma_2(p) \times \Gamma_3(p)$ where $\Gamma_i(p)$ and e are defined as in Lemma 23. First, note

that

$$\begin{aligned} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega) &\geq \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \cap (p_i, p_j, p_k) \in T(p_l)) \\ &= \Pr((p_i, p_j, p_k) \in T(p_l)) \cdot \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid (p_i, p_j, p_k) \in T(p_l)). \end{aligned}$$

Since $\Gamma_1(p_l)$, $\Gamma_2(p_l)$, and $\Gamma_3(p_l)$ are three balls of radius ϵ entirely contained in \mathcal{U} , we have

$$\Pr((p_i, p_j, p_k) \in T(p_l)) = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\epsilon^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right)^3 = \frac{\mu^3\epsilon^9}{n^3}.$$

By Lemmas 7 and 23, the event $(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid (p_i, p_j, p_k) \in T(p_l))$ occurs if and only if the interior of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ does not contain the center of any ball. Note that the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is at most the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$, which is at most $\frac{4}{3}\pi + \pi(2 + e + 2\epsilon)$ since the length of $t_i t_l$ is at most $e + 2 + 2\epsilon$. It follows that

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid (p_i, p_j, p_k) \in T(p_l)) \geq \left(1 - \frac{\pi(\frac{4}{3} + 2 + e + 2\epsilon)}{\text{Volume}(\mathcal{U})} \right)^{n-4}.$$

Since $e < 2$, we get, after some elementary calculations, that

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid (p_i, p_j, p_k) \in T(p_l)) \geq \left(1 - \frac{(6 + 2\epsilon)\mu}{n} \right)^{n-4}. \quad (6.7)$$

We thus have

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega) \geq \frac{\mu^3\epsilon^9}{n^3} \left(1 - \frac{(6 + 2\epsilon)\mu}{n} \right)^{n-4}.$$

Since $\left(1 - \frac{(6+2\epsilon)\mu}{n} \right)^{n-4}$ tends to $e^{-(6+2\epsilon)\mu}$ when n tends to infinity, we get

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega) = \Omega\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

□

This completes the proof of the lower bound of Theorem 3 since the expected number of $T4$ -segments amongst n uniformly distributed unit balls is, by Lemmas 5 and 24,

$$\sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{N}} \sum_{\omega=1}^{12} \Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega) = \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{N}} \sum_{\omega=1}^{12} \Omega\left(\frac{1}{n^3}\right) = \Omega(n).$$

6.5 The expected size of the visibility complex is linear

In this section we prove Theorem 4, that the expected size of the visibility complex of a set of n uniformly distributed unit balls is linear.

We say that the balls are in general position if any k -dimensional face of the visibility complex is a connected set of maximal free segments tangent to exactly $4 - k$ balls. We can assume that the balls are in general position since this occurs with probability 1. We give a bound on the expected number of k -faces, for $k = 0, \dots, 4$.

Lemma 25. *The expected number of 0-faces is $\Theta(n)$.*

Démonstration. A 0-face of the visibility complex is a maximal free line segment tangent to 4 balls. Each maximal free line segment tangent to 4 balls contains a $T4$ -segment and each $T4$ -segment is contained in one maximal free line segment. Thus, by Theorem 3, the expected number of 0-faces is linear. \square

To deal with the faces of dimension $k \geq 1$, we divide them into two classes. A k -face is *open* if it is incident to at least one $(k - 1)$ -face, otherwise it is *closed*. When the balls are in general position, the number of k -faces incident to a particular $(k - 1)$ -face is constant. In the proof of the following lemmas, any constant can be used. However, for completeness, we will use the exact values, but without justifying them.

Lemma 26. *The expected number of 1-faces is $\Theta(n)$.*

Démonstration. Note that a 0-face corresponds to a maximal free segment tangent to 4 balls and it is incident to those 1-faces corresponding to free segments tangent to 3 amongst those 4 balls. So, a 0-face is incident to exactly six 1-faces, which implies that the number of open 1-faces is 6 times the number of 0-faces, and is thus $\Theta(n)$ by the previous lemma.

Proving that the expected number of closed 1-faces is $O(n)$ can be done in a way very similar to the proof of the upper bound in Theorem 3. The difference is that we consider now only three balls and thus in all proofs, we forget ball B_k . We have to consider only $\binom{n}{3}$ triples of balls instead of $\binom{n}{4}$ quadruples, but we remove from the integral the probability $\Pr(p_k \in \mathcal{H}(p_i, p_l, 2) | \mathbf{x}_{i,l} = x) \leq \frac{3x+8}{R^3}$. Since $\frac{n}{R^3} = \mu$, this amounts to dividing the terms over which we integrate by $\mu(3x + 8)$ which does not change the general shape of the integrals (a polynomial multiplied by an exponential) which are convergent. Notice that B_i, B_j, B_l and ω now define a set of segments $t_i t_l$, rather than just a single segment. However, those segments define a closed 1-face only if none of them is occluded by one of the $n - 3$ remaining balls. Any particular choice of a tangent $t_i t_l$ in the 1-face will give a relevant cylinder $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$ to use in the proofs. \square

Lemma 27. *The expected number of 2-faces is $\Theta(n)$.*

Démonstration. Since a 1-face has five incident 2-faces, the tight linear bound on the number of 1-faces gives a tight linear bound on the number of open 2-faces. The closed case is solved similarly to the proof of the upper bound in Theorem 3. We now consider $\binom{n}{2}$ pairs of balls B_i, B_l and we remove from the integrals the probability $\Pr(p_j, p_k \in \mathcal{H}(p_i, p_l, 2) | \mathbf{x}_{i,l} = x) \leq \left(\frac{3x+8}{R^3}\right)^2$ which gives an $O(n)$ bound on the number of closed 2-faces. \square

Lemma 28. *The expected numbers of 3-faces and 4-faces are $\Theta(n)$.*

Démonstration. A 3-face, corresponding to lines tangent to a ball, can only be closed if $n = 1$. The number of open 3-faces is linear by the fact that in general position a 2-face is incident to four 3-faces. The number of 4-faces is linear since a 3-face is incident to three 4-faces. \square

6.6 Worst-case lower bound

We provide here a $\Omega(n^2)$ lower bound on the number of k -faces in the visibility complex. Recall that for the case of n arbitrarily sized balls, Devillers and Ramos [32] presented a simple $\Omega(n^3)$ lower bound on the number of free segments tangent to 4 balls, which is also the number of vertices in the visibility complex. Their lower bound (see Figure 6.5) consists of (i) $\frac{n}{3}$ balls such that the view from the origin consists of $\frac{n}{3}$ disjoint disks centered on a circle, (ii) $\frac{n}{3}$ balls such that the view from the origin consists of $\frac{n}{3}$ disks whose boundaries are concentric circles

intersecting (in projection) all the disks of (i), and (iii) $\frac{n}{3}$ tiny balls centered around the origin such that from any point on these $\frac{n}{3}$ tiny balls the view of the balls in (i) and (ii) is topologically invariant. Note that finding a $\Omega(n^3)$ lower bound on the number of free segments tangent to 4 balls, amongst n balls of bounded radii, is to the best of our knowledge, open.

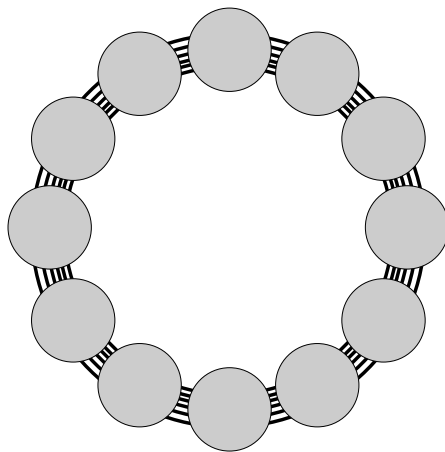


FIG. 6.5. Quadratic view from the origin [32].

Proposition 29. *The number of k -faces in the visibility complex of n disjoint unit balls in \mathbb{R}^3 is $\Omega(n^2)$ for all k between 0 and 4.*

Démonstration. We first observe that the size of the visibility complex of n unit balls can trivially be quadratic by having the balls sparsely distributed in the space such that any pair of balls defines a closed 2-face.

Getting a quadratic number of free lines tangent to four balls amongst a set of n unit balls can be done by taking balls B_i centered at $(2i, 0, 0)$ for $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ and balls B'_j centered at $(2j, 10, 0)$ for $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$. Then, for any i and j , the line through the points $(2i + 1, 0, 1)$ and $(2j + 1, 10, 1)$ is free and can be moved down so that it comes into contact with the four balls B_i, B_{i+1}, B'_j and B'_{j+1} . This argument proves that the number of k -faces, for $0 \leq k \leq 2$, can be quadratic.

The free segment $(2i, 1, 0)(2j, 9, 0)$ belongs to the 4-face consisting of maximal free segments with endpoints on B_i and B'_j . Thus there is a quadratic number of 4-faces. The bound also applies to 3-faces by considering lines tangent to B_i and stabbing B'_j .

In the above construction, the balls can be pushed together (they will intersect) so that they fit inside a spherical universe of radius $\sqrt[3]{n/\mu}$ without changing the result. Note also that the above construction can be slightly perturbed to obtain the same result for a set of n unit balls, disjoint or not, with no 4 centers coplanar. \square

6.7 Generalizations

In this section we provide several generalizations of our results.

6.7.1 Poisson distribution

Consider a set of unit balls whose centers are drawn by a 3-D Poisson point process of parameter μ in the universe \mathcal{U} . By a *Poisson point process of parameter μ in \mathcal{U}* [48], we mean

that we generate X random points inside \mathcal{U} so that

$$Pr(X = k) = \frac{(\mu \cdot \text{Volume}(\mathcal{U}))^k \cdot \exp(-\mu \cdot \text{Volume}(\mathcal{U}))}{k!} \quad (6.8)$$

and for any disjoint subsets M and M' of \mathcal{U} , the number of the points inside M and the number of points inside M' are independent random variables. Note that Equation (6.8) yields that the expected number of points inside \mathcal{U} is $\mu \cdot \text{Volume}(\mathcal{U}) = \frac{4\pi}{3}n$.

The following simple argument shows that our results extend to this distribution. Let X be the random variable representing the number of centers of unit balls generated by a Poisson point process with parameter μ in \mathcal{U} , and let Y be the random variable representing the number of $T4$ -segments amongst those balls. The expected number of $T4$ -segments is

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} E(Y|X = k) \cdot Pr(X = k).$$

Theorem 3 gives $E(Y|X = k) = \Theta(k)$ and

$$Pr(X = k) = \frac{(\frac{4}{3}\pi n)^k \cdot \exp(-\frac{4}{3}\pi n)}{k!}.$$

Thus

$$\begin{aligned} E(Y) &= \Theta \left(\frac{4}{3}\pi n \exp(-\frac{4}{3}\pi n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{4}{3}\pi n)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &= \Theta(n \exp(-\frac{4}{3}\pi n) \exp(\frac{4}{3}\pi n)) = \Theta(n). \end{aligned}$$

Therefore the expected number of $T4$ -segments amongst n balls whose centers are generated by a Poisson point process with parameter μ in \mathcal{U} is $\Theta(n)$. Similarly this bound extends to the expected size of the visibility complex.

We now investigate various models in which we change the shape of the universe or the nature of the objects.

6.7.2 Smooth convex universe

Our results can be generalized to the case where the universe is no longer a ball, but a homothet of a smooth convex set with homothety factor proportional to $\sqrt[3]{n}$. This can be achieved by considering the radius of curvature of the boundary of the universe, instead of R , in the proofs of the lemmas dealing with tangents outside the universe.

6.7.3 Other objects

Let r_{min} and r_{max} be two strictly positive real constants. In the following, we bound the expected number of $T4$ -segments amongst balls whose radii vary in the interval $[r_{min}, r_{max}]$, amongst polyhedra each enclosed between two concentric balls of radii r_{min} and r_{max} , and amongst polygons each enclosed between two concentric circles of radii r_{min} and r_{max} . The centers of the concentric balls or circles are called the centers of the polyhedra or polygons, respectively. In each case a $T4$ -segment is called *outer* if the centers of the two extremal objects it is tangent to are farther apart than $6r_{max}$ and are both at distance less than $2r_{max}$ from the boundary of \mathcal{U} . Otherwise the $T4$ -segment is called *inner*.

For these models, the proof of the $\Omega(n)$ lower bound on the expected number of $T4$ -segments (Section 6.4) generalizes directly because, for the kind of objects we consider, there always exist placements of four of them such that they admit at least one common tangent line with multiplicity one.

Balls of various radii

We have considered a model where all the balls have the same radius. If we allow the radii to vary in the interval $[r_{min}, r_{max}]$, then the proof of the linear upper bound on the expected number of inner $T4$ -segments generalizes almost immediately by considering the volumes $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2r_{max})$ and $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min})$ instead of $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2)$ and $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$.

Section 6.3.2 generalizes immediately to prove that the expected number of $T4$ -segments tangent to four balls B_i, B_j, B_k and B_l in that order such that p_i and p_l are closer to one another than $6r_{max}$ is $O(n)$. The only difficult task for extending Section 6.3.2 is the proof of the following analog of Lemma 12.

Lemma 30. *When $\mathbf{x}_{i,l} \geq 6r_{max}$, $\mathbf{y}_i \geq 2r_{max}$ and $\mathcal{L}_{i,j,k,l}^\omega$ occurs, the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min}) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{\pi}{24}r_{min}^2(\mathbf{x}_{i,l} - 6r_{max})$.*

Démonstration. The proof is similar to the proof of Lemma 12. Refer to Figure 6.6. Let m be the midpoint of segment $t_i t_l$ and K be the sphere of diameter r_{min} centered on the point c lying on segment $t_i p_i$ at distance $\frac{1}{2}r_{min}$ from t_i . The sphere K is entirely inside $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min}) \cap \mathcal{U}$, m lies in $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min})$ and a straightforward computation shows that m is in \mathcal{U} since t_i is in \mathcal{U} at distance at least r_{max} from its boundary and t_l is at distance at most r_{max} from \mathcal{U} . Thus $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min}) \cap \mathcal{U}$ contains the convex hull of K and m which contains the cone of apex m , of base a disk whose boundary is a great circle of K , and of height the distance from m to the center c of K . Now

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,l} = |p_i p_l| &\leq |p_i c| + |cm| + |mt_i| + |t_l p_l| \\ &\leq r_{max} + |cm| + \frac{1}{2}|t_i t_l| + r_{max} \\ &\leq 2r_{max} + |cm| + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{i,l} + 2r_{max}). \end{aligned}$$

Thus $|cm| \geq \frac{1}{2}\mathbf{x}_{i,l} - 3r_{max}$ and the volume of the cone is at least $\frac{1}{3}\pi(\frac{r_{min}}{2})^2(\frac{1}{2}\mathbf{x}_{i,l} - 3r_{max}) = \frac{\pi}{24}r_{min}^2(\mathbf{x}_{i,l} - 6r_{max})$. \square

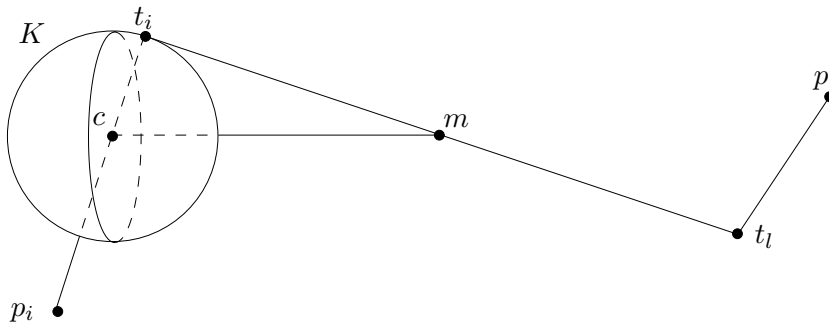


FIG. 6.6. For the proof of Lemma 30.

The rest of Section 6.3.2 generalizes easily for proving that the expected number of $T4$ -segments tangent to four balls B_i, B_j, B_k and B_l in that order such that p_i and p_l are farther apart than $6r_{max}$ and p_i is farther than $2r_{max}$ from the boundary of \mathcal{U} , is $O(n)$. Hence the expected number of inner $T4$ -segments is $O(n)$.

Our proof cannot be extended to provide a linear upper bound on the expected number of outer $T4$ -segments. This is because, if balls B_i and B_l are of radius r_{max} then a line segment $t_i t_l$ tangent to B_i and B_l might be outside \mathcal{U} and at distance greater than r_{min} from its boundary. Then $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min})$ does not intersect \mathcal{U} and we cannot bound $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min}) \cap \mathcal{U}$ from below by a positive constant as in Lemma 16, which is crucial for the proof of Lemma 17 and thus for Proposition 22.

However, by not taking into account the occlusion in the proof of Proposition 22, we get that the expected number of outer $T4$ -segments is $O(n^2)$. Refer to the proof of Proposition 22 and consider $I_{x>6r_{max}, y<2r_{max}}$, the analog of $I_{x>6, y<1}$ for this case. The analogs of Lemmas 8 and 9 yield that

$$\Pr(\delta_{i,j,k,l}^\omega \mid \mathbf{x}_{i,l} = x, \mathbf{y}_i = y, \mathbf{y}_l \leq \mathbf{y}_i) \leq \frac{(3x r_{max}^2 + 8r_{max}^3)^2}{R^6}.$$

Lemma 20 still holds and we can easily prove the analog of Lemma 21. Both results imply that

$$\begin{aligned} I_{x>6r_{max}, y<2r_{max}} &\leq \int_{x=6r_{max}}^{2R} \int_{y=0}^{2r_{max}} \frac{(3x r_{max}^2 + 8r_{max}^3)^2}{R^6} \cdot \frac{6xy dx}{R^3} \cdot \frac{3dy}{R} \\ &\in O\left(\frac{1}{R^6}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Hence the expected number of inner $T4$ -segments is $O(n)$ and the expected number of outer $T4$ -segments is $O(n^2)$. This still improves the result of Durand et al. [40] who proved a bound of $O(n^{8/3})$ for the same model.

In this section we have assumed that the sphere centers are uniformly distributed but we have made no assumption on the distribution of the radii of the spheres in the interval $[r_{min}, r_{max}]$, which are thus assumed to be worst case. The addition of some hypothesis on the radii distribution may yield better results on the number of outer $T4$ -segments.

Polyhedra of bounded aspect ratio

Consider polyhedra of constant complexity, each enclosed between two concentric balls of radii r_{min} and r_{max} whose centers are uniformly distributed in \mathcal{U} . In such a case, as for balls of various radii, the $O(n)$ bound on the expected number of inner $T4$ -segments immediately applies as well as the $O(n^2)$ bound on the expected number of outer $T4$ -segments.

Polygons of bounded aspect ratio

Our proof technique can also be generalized to non-fat 3D objects such as polygons. Consider polygons of constant complexity enclosed between two coplanar concentric circles of radii r_{min} and r_{max} , and whose centers and normals are independently chosen from the uniform distributions over \mathbb{R}^3 and \mathbb{S}^2 . Let T_1, \dots, T_n be such polygons with respective normals $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n$ and centers p_1, \dots, p_n .

Four polygons T_i, T_j, T_k and T_l have a common tangent line that meet them in that order only if p_j and p_k lie in $\mathcal{H}(p_i, p_l, 2r_{max})$. This implies, as in Section 6.3.2, that the expected number of $T4$ -segments tangent to four polygons T_i, T_j, T_k and T_l in that order such that p_i and p_l are closer to one another than some constant, say $6r_{max}$, is $O(n)$.

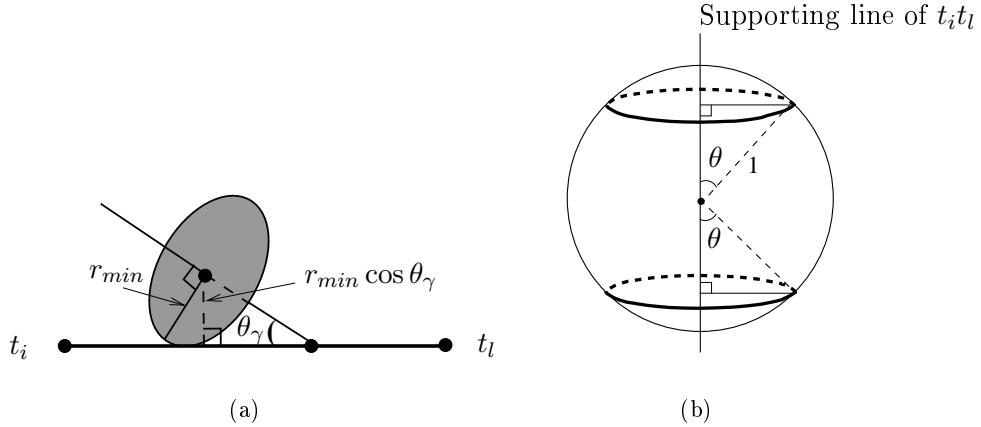


FIG. 6.7. Illustration for the case of polygons of bounded aspect ratio.

When such a tangent, denoted $t_i t_l$, exists, it is not occluded only if, for any $\gamma \neq i, j, k, l$, point p_γ does not lie in the interior of $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min} \cos \theta_\gamma)$ where θ_γ denotes the angle between \mathbf{n}_γ and the supporting line of $t_i t_l$ (see Figure 6.7 (a) and Lemma 7). Let γ be an integer distinct from i, j, k and l . By the Total Probability Theorem, the probability that T_γ does not occlude the tangent line segment $t_i t_l$ is bounded from above by

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \Pr(p_\gamma \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min} \cos \theta_\gamma) \mid \theta_\gamma = \theta) \cdot \Pr(\theta \leq \theta_\gamma < \theta + d\theta).$$

Similarly as in Lemma 30, when the tangent $t_i t_l$ exists, $\mathbf{x}_{i,l} \geq 6r_{max}$ and $\mathbf{y}_i \geq 2r_{max}$, the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min}) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{\pi}{24}(r_{min} \cos \theta_\gamma)^2(\mathbf{x}_{i,l} - 6r_{max})$. Thus

$$\Pr(p_\gamma \notin \mathcal{H}(t_i, t_l, r_{min} \cos \theta_\gamma) \mid \theta_\gamma = \theta) \leq 1 - \frac{(r_{min} \cos \theta_\gamma)^2(\mathbf{x}_{i,l} - 6r_{max})}{32R^3}.$$

The probability that θ_γ is in between θ and $\theta + d\theta$ is $\sin \theta d\theta$, which corresponds to twice the area of the spherical shell between the latitudes θ and $\theta + d\theta$ on the unit sphere, divided by the area of the unit sphere (see Figure 6.7 (b)). Thus when p_i is at distance greater than $6r_{max}$ from p_l and at distance greater than $2r_{max}$ from the boundary of \mathcal{U} , the probability that T_γ does not occlude the tangent line segment $t_i t_l$ is bounded from above by

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(1 - \frac{(r_{min} \cos \theta_\gamma)^2(\mathbf{x}_{i,l} - 6r_{max})}{32R^3}\right) \sin \theta d\theta = 1 - \frac{r_{min}^2(\mathbf{x}_{i,l} - 6r_{max})}{96R^3}.$$

Then, similarly as in Lemma 13, the probability that the tangent line segment $t_i t_l$ is not occluded, when p_i is at distance greater than $6r_{max}$ from p_l and at distance greater than $2r_{max}$ from the boundary of \mathcal{U} , is at most

$$55 \exp\left(-\frac{\mu r_{min}^2(\mathbf{x}_{i,l} - 6r_{max})}{96}\right).$$

We thus get the analog of Proposition 14 for the model considered here which implies that the expected number of $T4$ -segments tangent to four polygons T_i, T_j, T_k and T_l in that order such that p_i and p_l are farther apart than $6r_{max}$ and p_i is farther than $2r_{max}$ from the boundary of \mathcal{U} is $O(n)$.

We thus get that the expected number of inner $T4$ -segments is $O(n)$. Moreover, as for balls of various radii, the expected number of outer $T4$ -segments is $O(n^2)$.

6.8 Conclusion

In this paper, we proved that the expected number of $T4$ -segments amongst n uniformly distributed unit balls in \mathbb{R}^3 is $\Theta(n)$. We also proved that the expected size of the visibility complex of n uniformly distributed unit balls is $\Theta(n)$. Equivalently the expected number of combinatorially different visibility events amongst n uniformly distributed unit balls is $\Theta(n)$. We then proved that $\Theta(n)$ also bounds the expected number of $T4$ -segments occurring not too close to the boundary of the universe for various other models such as n uniformly distributed polyhedra, or polygons, of bounded aspect ratio and constant complexity. For these models, we also provided a $O(n^2)$ bound on the expected number of all the $T4$ -segments.

This paper is an attempt to analyze the average-case behavior of the size of visibility structures. The distribution models of scene objects investigated here are theoretical in nature since objects in graphics scenes are seldom distributed uniformly or by a Poisson process. However, our results are important in a context where there are few rigorous results either theoretical or experimental. They provide theoretical ground to support the empirical evidence indicating that the worst-case upper bound on the number of visibility events is largely pessimistic in practical situations. As a consequence, there is reason to believe that an output-sensitive algorithm for computing all visibility events may work in practice.

Practitioners will be concerned about the size of the constant hidden in the Θ notation. We have calculated (in the proofs of Section 6.3) this constant to be no larger than $2^{16} \mu^3 + 2^{31} \mu + 2^{37} e^{-\mu/3} (\mu^2 + 1/\mu^2)$. Of course this is shocking. We suppose that the constant is actually much smaller. However estimating it in practice is a difficult problem which is still to be solved. After solving this problem, an interesting experiment will be to compare the number of visibility events occurring in a realistic graphic scene with the theoretical bound for uniformly distributed objects.

The results proved here also provide new insight on the complexity of other visibility structures. Consider for instance the aspect graph, a partition of viewpoint space into maximal connected regions by surfaces along which visibility events are observed. As explained in [73], the complexity of the aspect graph is dominated by δ^m , where δ is the degree of the surface corresponding to lines “tangent” to 3 objects and m the dimension of the viewpoint space. For a scene composed of n disjoint spheres, δ is trivially $O(n^3)$, so the aspect graph has $O(n^6)$ orthographic views and $O(n^9)$ perspective views. However the results of this paper show that the expected value of δ is $\Theta(n)$ since the expected number of families of lines tangent to three objects (related to the 1-faces of the visibility complex) is linear and the degree of each family is bounded. It would thus be interesting to get a good bound on the expected value of δ^2 and δ^3 which is related to bounding the expected value of the square and the cube of the number of combinatorially different visibility events. Note that the former would also give the standard deviation of the expected number of combinatorially different visibility events. Similar observations hold for the polyhedral case.

6.9 Volume of the intersection of a 3D hippodrome with a ball

Cette section retranscrit l’annexe A de l’article [30].

Recall that \mathcal{U} is a ball of radius R centered at O . Let B_i and B_l be two unit balls whose centers p_i and p_l are in \mathcal{U} , within distance 1 from its boundary, and distance $x \geq 6$ apart. Let $t_i t_l$ be a line segment tangent to B_i and B_l at its endpoints. The section is devoted to the proof of the following proposition which leads directly to Lemma 16.

Proposition 31. For any $0 \leq s \leq 1$ such that segment $t_i t_l$ is at distance less than $R + 1 - s$ from O , the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is larger than $\frac{1}{6\sqrt{2}}(x - 5) s \sqrt{s}$.

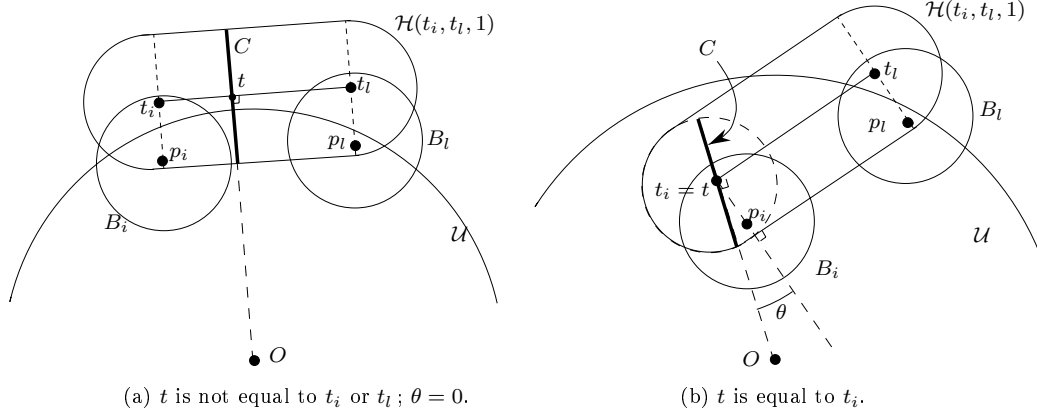


FIG. 6.8. For the definition of t and C (C is shown from the side view).

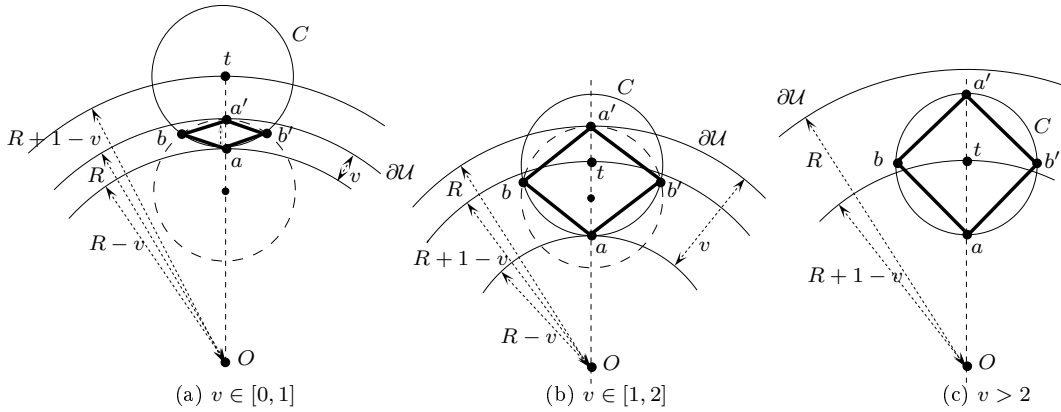


FIG. 6.9. For the definition of a, a', b, b' .

We proceed as follows. Let v be such that the distance from O to the segment $t_i t_l$ is $R + 1 - v$, and let t be the point on segment $t_i t_l$ closest to O (see Figure 6.8). Assume without loss of generality that t is closer to t_i than to t_l . Let C (resp. D) be the unit radius circle (resp. disk) centered at t in the plane, denoted \mathcal{P} , containing the vectors $\vec{O}t$ and the cross product of $\vec{O}t$ and $\vec{t_i t_l}$. Let θ be the angle between the plane orthogonal to $t_i t_l$ and \mathcal{P} . We first prove the following lemma.

Lemma 32. The volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than

$$\frac{1}{3} \min \left(2, \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \min \left(\frac{x-2}{2}, (x-2) \cos \theta - 1 \right).$$

Démonstration. Let a denote the closest point on C from O , a' the farthest point in $D \cap \mathcal{U}$ from O , and b and b' the two points of intersection of C and the perpendicular bisector of segment aa' (see Figure 6.9).

The volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than the volume of the convex hull of a, b, a', b' and p_l because $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is convex and contains these five points. The volume of this polyhedron is equal to one third of the area of its base, the quadrilateral with vertices a, b, a', b' , times its height, the distance from p_l to the plane \mathcal{P} containing a, b, a', b' .

We first compute a lower bound on the area of the quadrilateral with vertices a, b, a', b' . If $v \leq 2$ (see Figure 6.9 (a) and (b)), then the length of aa' is equal to v , and a simple calculation gives that the length of bb' is equal to $2\sqrt{v - \frac{v^2}{4}} \geq \sqrt{2v}$. Thus the area of the quadrilateral a, b, a', b' is greater than $\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2}}$. If $v > 2$ (see Figure 6.9 (c)), then C is entirely contained in \mathcal{U} and the area of the quadrilateral a, b, a', b' is equal to 2. Thus, the area of the quadrilateral is at least $\min(2, \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2}})$.

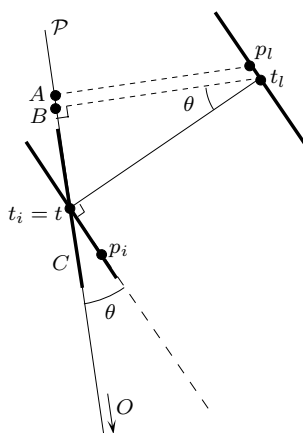


FIG. 6.10. The height from p_l to \mathcal{P} is greater than $|t_i t_l| \cos \theta - 1$.

The volume of the polyhedron is thus greater than $\frac{1}{3} \min(2, \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2}})$ times the distance from p_l to the plane \mathcal{P} . We consider two cases.

First, suppose that t belongs to the interior of the segment $t_i t_l$ (see Figure 6.8 (a)). Then, the height is equal to the distance from t_l to t since p_l and a, b, a', b' belong, respectively, to the two planes, orthogonal to $t_i t_l$ and passing through t_l and t , respectively. Since t_i and t_l belong to B_i and B_l , they are at least distance $x - 2$ apart, thus t and t_l are at least distance $\frac{x-2}{2}$ apart. Thus, the height from p_l to \mathcal{P} is at least $\frac{x-2}{2}$.

Second, suppose that $t = t_i$ (see Figure 6.8 (b)); $t \neq t_l$ since we assumed that t is closer to t_i than to t_l . Refer to Figure 6.10. Let A and B be the orthogonal projections of p_l and t_l onto \mathcal{P} , respectively. Note that the lengths of Ap_l and Bt_l are the distances from p_l and t_l to the plane \mathcal{P} , respectively.

Considering the triangle $\triangle Ap_l t_l$ and that the distance between t_l and p_l is 1, we obtain that $|Ap_l| \geq |At_l| - |t_l p_l| = |At_l| - 1$, where $|ab|$ denotes the length of segment ab . Since $A \in \mathcal{P}$ and the length of Bt_l is the distance from t_l to the plane \mathcal{P} , the length of At_l is greater than that of Bt_l , thus $|Ap_l| \geq |Bt_l| - 1$.

To bound the length of Bt_l , we now consider the triangle $\triangle Bt_l t$. The angle $\angle Bt_l t$ is the angle between the normal of the plane \mathcal{P} and $t_i t_l$, that is, by definition, θ . So the length of Bt_l is the length of $t_i t_l$ times $\cos \theta$ and, since $|t_i t_l|$ is at least $x - 2$, $|Bt_l|$ is greater than $(x - 2) \cos \theta$. Thus the length of Ap_l is greater than $(x - 2) \cos \theta - 1$.

Hence the distance from p_l to the plane \mathcal{P} is greater than $\min(\frac{x-2}{2}, (x - 2) \cos \theta - 1)$ and thus

the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{1}{3} \min(2, \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2}}) \cdot \min(\frac{x-2}{2}, (x-2) \cos \theta - 1)$. \square

The following lemma bounds $\cos \theta$.

Lemma 33. *The angle θ is such that $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{7}}{4}$.*

Démonstration. Note first that this lemma is intuitively obvious. Indeed (see Figure 6.8 (b)), if x is sufficiently large and if t_i is the closest point on segment $t_i t_l$ to O , then the angle between the plane supporting C and the segment $t_i t_l$ is necessarily close to $\pi/2$, which implies that θ is close to 0. We now prove the lemma.

Refer to Figure 6.10 and consider the triangle $\triangle Ot_i t_l$. Let $|ab|$ denote the length of segment ab . Then the law of cosines yields

$$\begin{aligned} |Ot_l|^2 &= |Ot_i|^2 + |t_i t_l|^2 - 2 \cdot |Ot_i| \cdot |t_i t_l| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ &= |Ot_i|^2 + |t_i t_l|^2 + 2 \cdot |Ot_i| \cdot |t_i t_l| \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

which gives that

$$\sin \theta = \frac{|Ot_l|^2 - |Ot_i|^2 - |t_i t_l|^2}{2 \cdot |Ot_i| \cdot |t_i t_l|}.$$

The centers p_i and p_l of balls B_i and B_l are distance $x \geq 6$ apart and at distance less than 1 from the boundary of \mathcal{U} , so $|t_i t_l| \geq 4$, $|Ot_i| \geq R - 2$ and $|Ot_l| \leq R + 1$. Hence

$$\sin \theta \leq \frac{(R+1)^2 - (R-2)^2 - 4^2}{2 \cdot (R-2) \cdot 4} \leq \frac{6(R-2)}{8(R-2)} = \frac{3}{4}.$$

Using $\cos \theta = \sqrt{1 - (\sin \theta)^2}$ proves that $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{7}}{4}$. \square

We can now conclude the proof of Proposition 31. For any $0 \leq s \leq 1$, if segment $t_i t_l$ is at distance $R+1-v \leq R+1-s$ from the center of \mathcal{U} , then $v \geq s$. By Lemma 33, $(x-2) \cos \theta - 1 \geq \frac{x-5}{2}$ which means that $\min(\frac{x-2}{2}, (x-2) \cos \theta - 1) \geq \frac{x-5}{2}$. Thus Lemma 32 gives that the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{1}{6\sqrt{2}} (x-5) \min(2\sqrt{2}, v\sqrt{v}) \geq \frac{1}{6\sqrt{2}} (x-5) \min(2\sqrt{2}, s\sqrt{s}) = \frac{1}{6\sqrt{2}} s \sqrt{s} (x-5)$ since $s \leq 1$. Hence the volume of $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1) \cap \mathcal{U}$ is greater than $\frac{1}{6\sqrt{2}} s \sqrt{s} (x-5)$.

6.10 Volume of \mathcal{K}

Cette section retranscrit l'annexe B de l'article [30].

Recall that \mathcal{U} is a ball of radius R centered at O and let p_i and p_l be two points in \mathcal{U} within distance 1 of its boundary and distance x apart. Let y be a real number such that $0 \leq y < 1$. Let F be the open ball with center O and radius $R+1-y^{\frac{2}{3}}$ and ∂F its frontier. Let E be the part of $\mathcal{H}(p_i, p_l, 1)$ that is outside F and K be the intersection of \mathcal{U} with the union of all unit balls centered on points in E (see Figure 6.3). This section is devoted to the proof of the following proposition used in the proof of Lemma 19.

Proposition 34. *The volume of K is bounded from above by $12\pi^2(x+6)y$.*

Lemma 35. *If $z \in \mathcal{U}$ is at distance less than 1 from E , then z is at distance less than 1 from $E \cap \partial F$.*

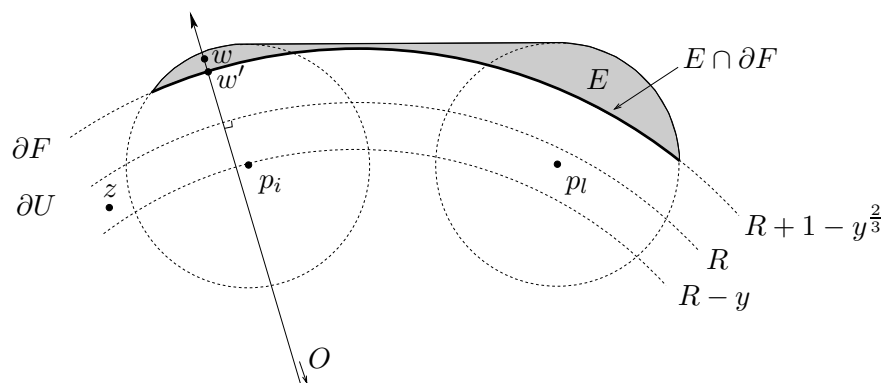


FIG. 6.11. The part E of $\mathcal{H}(p_i, p_l, 1)$ outside F .

Démonstration. Let $z \in \mathcal{U}$ and $w \in E$ be two points at distance less than 1 and refer to Figure 6.11. Let w' be the point of intersection of ∂F and the ray from O through w . For any ball B centered in \mathcal{U} , $B \setminus F$ lies in the cone of center O and base $B \cap \partial F$. Thus $E = \mathcal{H}(p_i, p_l, 1) \setminus F$ lies in the cone of center O and base $E \cap \partial F$. Hence the ray from O through w lies in this cone and $w' \in E \cap \partial F$. On the other hand, $|zw'| \leq |zw|$ since $z \in F$, $w' \in \partial F$ and w lies outside F on the ray from O through w' . Thus, since $w' \in E \cap \partial F$ and $|zw| < 1$ by hypothesis, the distance from z to $E \cap \partial F$ is less than 1. \square

The above lemma implies that K is the intersection of \mathcal{U} with the union of all unit balls centered on $E \cap \partial F$. To bound the volume of K , we enclose $E \cap \partial F$ in a subset of ∂F that will be easier to deal with.

Let $B(p)$ denote the ball of unit radius centered at p . Let $\pi(p)$ be the point that maximizes (under inclusion) the intersection $\partial F \cap B(q)$ for all q on the ray from O through p . A simple computation yields that the distance between $\pi(p)$ and O is

$$R_y = \sqrt{(R + 1 - y^{\frac{2}{3}})^2 - 1}.$$

Thus π is the orthogonal projection onto the sphere centered at O of radius R_y . Now let $\pi'(p)$ be the point that maximizes (under inclusion) the intersection $\partial F \cap B(q)$ for all q on the radius of \mathcal{U} through p (that is the part inside \mathcal{U} of the ray from O through p). Similarly, π' is the orthogonal projection onto the sphere centered at O of radius

$$R' = \min(R, R_y).$$

Let G be the union of the spherical caps $\partial F \cap B(\pi'(p))$ for all p on the segment from p_i to p_l (see Figure 6.12). Let H denote the points of \mathcal{U} at distance less than or equal to 1 from G (see Figure 6.13).

Lemma 36. $K \subseteq H$.

Démonstration. $E \cap \partial F$ is the union of $\partial F \cap B(p)$ for all p on the segment $p_i p_l$. Furthermore, for any such p , $\partial F \cap B(p) \subseteq \partial F \cap B(\pi'(p))$ by definition of π' since $p \in \mathcal{U}$. Thus $E \cap \partial F$ is contained in G .

By Lemma 35, K is the intersection of \mathcal{U} with the union of all unit balls centered on $E \cap \partial F$. Thus K is contained in H , the union of all unit balls centered in G . \square

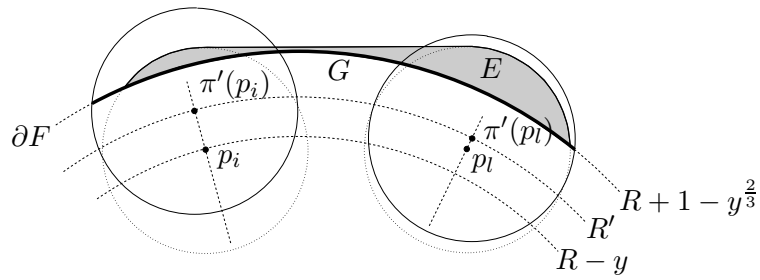


FIG. 6.12. G , a part of ∂F enclosing $E \cap \partial F$.

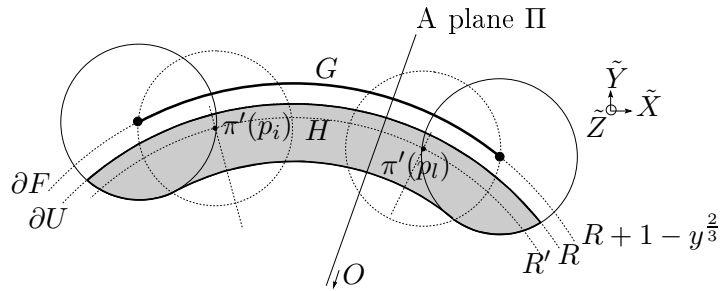


FIG. 6.13. The region H and a plane Π .

To bound the volume of H from above, we first bound the area of its section by planes Π that contain O and are orthogonal to the plane, denoted (O, p_i, p_l) , containing O , p_i and p_l (see Figures 6.13 and 6.14).

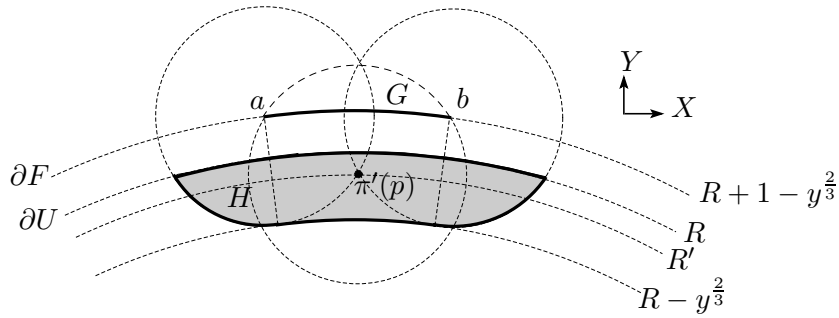


FIG. 6.14. Section of H by a plane Π intersecting segment $p_i p_l$ at p .

Lemma 37. *The area of $\Pi \cap H$ is less than $12\pi y$.*

Démonstration. The section of G by a plane Π is a circular arc on ∂F . If Π intersects the segment $p_i p_l$, let p denote the point of intersection, then the circular arc is the intersection of ∂F and the disk $B(\pi'(p)) \cap \Pi$ (refer to Figures 6.12 and 6.14). Otherwise, the circular arc is the intersection of ∂F and the disk $B(\pi'(p_i)) \cap \Pi$ or $B(\pi'(p_l)) \cap \Pi$ (see Figure 6.12). The disk has radius 1 in the former case and radius less than one in the latter case. In both cases the center of the disk is at distance R' from O . Thus the length of the circular arc $G \cap \Pi$ is maximal if and only if Π intersects the segment $p_i p_l$. Thus the area of $\Pi \cap H$ is maximal if and only if Π intersects the

segment $p_i p_l$. Hence we can assume that Π is such a plane. Let p denote its intersection with segment $p_i p_l$.

Let a and b denote the endpoints of $G \cap \Pi$ and refer to Figure 6.14. Points a and b are the intersection of ∂F and the circle in Π of radius 1 centered at $\pi'(p)$. The lines (Oa) and (Ob) split $\Pi \cap H$ into three parts, a left, a central and a right part. Symmetries with respect to the lines (Oa) and (Ob) send the left and right parts into the central one. Hence, the area of $\Pi \cap H$ is bounded by 3 times the area of its central part. This part is delimited by the two rays from O through a and b , and the two circles in Π with center O and radii R and $R - y^{\frac{2}{3}}$. So, if α denotes the length of the circular arc ab , the area A of the central part is

$$A = \frac{\alpha}{2\pi(R + 1 - y^{\frac{2}{3}})} \cdot \pi(R^2 - (R - y^{\frac{2}{3}})^2) = \alpha \frac{2Ry^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{4}{3}}}{2(R + 1 - y^{\frac{2}{3}})} \leq \alpha y^{\frac{2}{3}}.$$

We now bound the length α of the arc ab . We choose an orthonormal frame $(\pi'(p), X, Y)$ in Π such that O has coordinates $(0, -R')$ (see Figure 6.14). Recall that a is one of the intersection points of the circle centered at $\pi'(p)$ of radius 1 and the circle centered at O of radius $R + 1 - y^{\frac{2}{3}}$. A simple computation yields that the coordinates (X_a, Y_a) of a are equal to

$$Y_a = \frac{(R + 1 - y^{\frac{2}{3}})^2 - 1 - R'^2}{2R'}, \quad |X_a| = \sqrt{1 - Y_a^2}.$$

If $R' = R$, then

$$Y_a = \frac{y^{\frac{4}{3}} + 2R - 2Ry^{\frac{2}{3}} - 2y^{\frac{2}{3}}}{2R} = 1 - y^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{2 - y^{\frac{2}{3}}}{2R}\right) \geq 1 - 2y^{\frac{2}{3}}$$

which implies that

$$|X_a| \leq \sqrt{1 - (1 - 2y^{\frac{2}{3}})^2} = \sqrt{4y^{\frac{2}{3}} - 4y^{\frac{4}{3}}} \leq 2y^{\frac{1}{3}}.$$

Now if $R' \neq R$, then $(R + 1 - y^{\frac{2}{3}})^2 - 1 \leq R^2$ by definition. Expanding this inequality yields

$$\begin{aligned} y^{\frac{4}{3}} + 2R - 2Ry^{\frac{2}{3}} - 2y^{\frac{2}{3}} &\leq 0, \\ y^{\frac{2}{3}} &\geq \frac{y^{\frac{4}{3}} + 2R}{2(R + 1)} \geq \frac{R}{R + 1} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Thus $\sqrt{2y^{\frac{2}{3}}} \geq 1$ and since $|X_a| = \sqrt{1 - Y_a^2} \leq 1$ we get $|X_a| \leq \sqrt{2}y^{\frac{1}{3}}$. Hence, in both cases,

$$|X_a| \leq 2y^{\frac{1}{3}}.$$

Thus the length of the circular arc ab is (see Figure 6.15)

$$\alpha = (R + 1 - y^{\frac{2}{3}}) \cdot 2 \arcsin \left(\frac{|X_a|}{R + 1 - y^{\frac{2}{3}}} \right) \leq (R + 1 - y^{\frac{2}{3}}) \cdot 2 \arcsin \left(\frac{2y^{\frac{1}{3}}}{R + 1 - y^{\frac{2}{3}}} \right).$$

A straightforward computation shows that $\arcsin(x) - \pi x \leq 0$ for any $x \in [0, 1]$. Thus

$$\alpha \leq (R + 1 - y^{\frac{2}{3}}) \cdot 2\pi \frac{2y^{\frac{1}{3}}}{R + 1 - y^{\frac{2}{3}}} = 4\pi y^{\frac{1}{3}}.$$

Since the area A of the middle part is less than or equal to $\alpha y^{\frac{2}{3}}$,

$$A \leq 4\pi y^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 4\pi y.$$

This implies that the area of $\Pi \cap H$ is less than or equal to $12\pi y$. \square

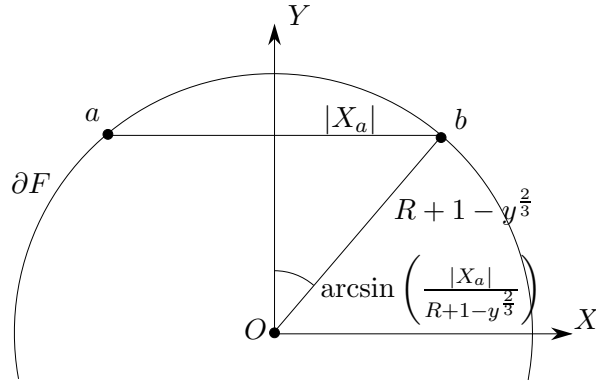


FIG. 6.15. The length of the circular arcs ab .

Lemma 38. *The volume of H is bounded from above by $12\pi^2(x+6)y$.*

Démonstration. We express the volume of H by an integral using spherical coordinates (r, θ, ϕ) in an orthogonal frame $(O, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ such that the plane $(O, \tilde{X}, \tilde{Y})$ contains p_i and p_l (see Figure 6.13). A plane $\theta = \text{constant}$ contains the \tilde{Z} -axis and thus is a plane Π . Let $1_H(r, \theta, \phi)$ denote the indicator function of H ; $1_H(r, \theta, \phi)$ is equal to 1 if the point of coordinates (r, θ, ϕ) belongs to H and to 0 otherwise. Then

$$\text{Volume of } H = \int_{\phi} \int_r \int_{\theta} 1_H(r, \theta, \phi) \cdot r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

Since H is inside \mathcal{U} , $r \cdot 1_H(r, \theta, \phi) \leq R \cdot 1_H(r, \theta, \phi)$. Moreover $\sin \phi \leq 1$, thus

$$\text{Volume of } H \leq R \int_{\theta} \left(\int_{\phi} \int_r 1_H(r, \theta, \phi) \cdot r \, dr \, d\phi \right) d\theta.$$

The double integral in parentheses is equal to the area of the section of H by a plane $\Pi_{\theta} : \theta = \text{constant}$. By Lemma 37, this area is less than $12\pi y$, which is independent of θ . Moreover the area is equal to 0 when Π_{θ} does not intersect H . Let $\Delta\theta$ denote the angle between the two extreme planes Π_{θ} that intersect H . Thus we have

$$\text{Volume of } H \leq R \cdot 12\pi y \cdot \Delta\theta.$$

We now bound $\Delta\theta$. Refer to Figure 6.16. Let Π_{θ_i} and Π_{θ_l} be the two extreme planes that intersect H . Let u_i and u_l be the two points of intersection of H with Π_{θ_i} and Π_{θ_l} , respectively; u_i and u_l lie on $\partial\mathcal{U}$. Let o_i and o_l be the two points in G at distance 1 from u_i and u_l , respectively. $\pi'(p_i)$ and $\pi'(p_l)$ are at distance 1 from o_i and o_l , respectively.

The angle between the two extreme planes Π_{θ_i} and Π_{θ_l} is, as before,

$$\Delta\theta = 2 \arcsin \frac{|u_i u_l|/2}{R} \leq 2\pi \frac{|u_i u_l|/2}{R} = \pi \frac{|u_i u_l|}{R}.$$

Now we bound $|u_i u_l|$ by the length of the polygonal line shown in Figure 6.16.

$$\begin{aligned} |u_i u_l| &\leq |u_i o_i| + |o_i \pi'(p_i)| + |\pi'(p_i) p_i| + |p_i p_l| + |p_l \pi'(p_l)| + |\pi'(p_l) o_l| + |o_l u_l| \\ &= 1 + 1 + |\pi'(p_i) p_i| + x + |p_l \pi'(p_l)| + 1 + 1. \end{aligned}$$

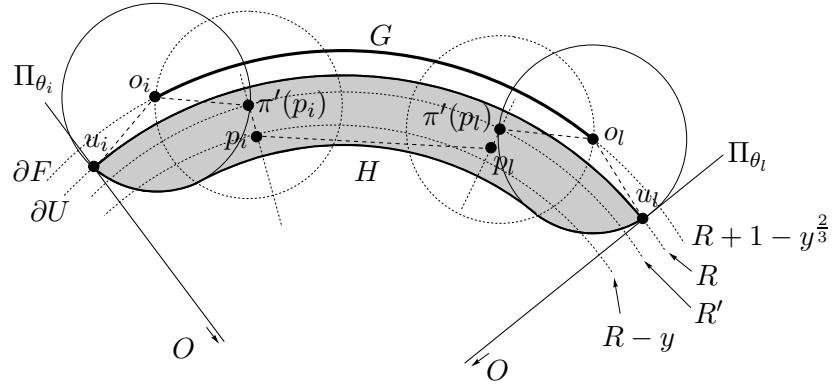


FIG. 6.16. For the computing a bound on $\Delta\theta$.

We show that $|\pi'(p_i)p_i|$ and $|p_l\pi'(p_l)|$ are less than 1. $\pi'(p_i)$ is inside \mathcal{U} at distance less than 1 from ∂F which lies outside \mathcal{U} . Thus $\pi'(p_i)$ is inside \mathcal{U} at distance less than 1 from its frontier. Point p_i is also inside \mathcal{U} at distance less than 1 from its frontier. Since p_i and $\pi'(p_i)$ are on the same ray starting from O , they are at distance less than 1 apart. Similarly for $\pi'(p_l)$ and p_l . Hence

$$\Delta\theta \leq \pi \frac{|u_i u_l|}{R} \leq \pi \frac{x+6}{R}.$$

Therefore

$$\text{Volume of } H \leq R \cdot 12\pi y \cdot \Delta\theta \leq 12\pi^2 y(x+6).$$

□

Proposition 34 follows from Lemmas 36 and 38.

6.11 Volume of the intersection of two spherical shells

Cette section retranscrit l'annexe C de l'article [30].

We prove in this section the following proposition used in the proof of Lemma 21.

Proposition 39. *Let $R > 0$, $x \in [6, 2R]$, $y \in [0, 1]$ and p be a point at distance $R - y$ from O . The volume of the intersection of the region in between the two spheres centered at p and of radii x and $x + dx$, and the region in between the two spheres centered at O and of radii R and $R - y$ (see Figure 6.17) is bounded from above by $8\pi xy dx$.*

Démonstration. Define the balls B_1 with center O and radius R , B_2 with center O and radius $R - y$, B_3 with center p and radius x and finally B_4 with center p and radius $x + dx$. Let \mathcal{V} denote the intersection of $(B_1 \setminus B_2)$ and $(B_4 \setminus B_3)$. We prove that the volume of \mathcal{V} is less than $8\pi xy dx$.

Since dx is infinitesimally small, the volume of \mathcal{V} is $\mathcal{A}dx$ where \mathcal{A} is the area of the intersection of the sphere ∂B_3 with $B_1 \setminus B_2$.

Let (p, X, Y, Z) be an orthogonal reference frame whose center is p and whose X -axis is oriented along \overrightarrow{Op} (see Figure 6.17). Notice that all spheres are centered on that axis. Let C_1 (resp. C_2, C_3) denote the circle that is the boundary of the intersection of B_1 (resp. B_2, B_3) and

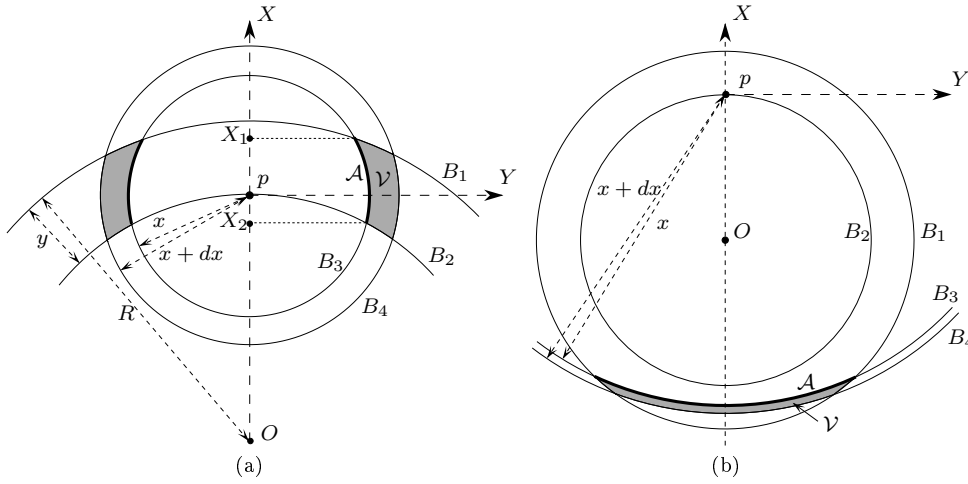


FIG. 6.17. For the proof of Proposition 39.

the plane (p, X, Y) in which Figure 6.17 is drawn. The equations of these circles are, in the frame (p, X, Y) ,

$$\begin{aligned} C_1 : (X + R - y)^2 + Y^2 &= R^2, \\ C_2 : (X + R - y)^2 + Y^2 &= (R - y)^2, \\ C_3 : X^2 + Y^2 &= x^2. \end{aligned}$$

Since C_3 is centered at a point on C_2 and has radius $x \geq 6 > 1 \geq y$, C_3 intersects or encloses C_1 and C_2 . In fact, C_3 intersects or encloses C_1 and C_2 in one of the three following ways.

Case 1 : If $6 \leq x \leq 2R - 2y$ then C_3 intersects both C_1 and C_2 (see Figure 6.17 (a)).

Case 2 : If $2R - 2y < x \leq 2R - y$ then C_3 intersects C_1 and encloses C_2 (see Figure 6.17 (b)).

Case 3 : If $2R - y < x$ then C_3 encloses both C_1 and C_2 . In that case, \mathcal{V} is empty and the volume is 0.

In the first case, let X_1 (resp. X_2) be the abscissa of the points of intersection of circles C_1 (resp. C_2) and C_3 . Note that $X_1 \geq X_2$ and their values can be computed directly from the equations of the circles C_1, C_2 and C_3 :

$$X_1 = \frac{R^2 - x^2 - (R - y)^2}{2R - 2y}, \quad X_2 = \frac{-x^2}{2R - 2y}.$$

Using the fact that $y \leq x \leq 2R - 2y$ we get

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 &= \frac{y(2R - y)}{2R - 2y} = y \left(1 + \frac{y}{2R - 2y} \right) \leq 2y, \\ -X_1 - X_2 &= \frac{2x^2 - y(2R - y)}{2R - 2y} \leq 2x \frac{x}{2R - 2y} \leq 2x. \end{aligned}$$

We now bound from above the area \mathcal{A} of the surface $\partial B_3 \cap (B_1 \setminus B_2)$ by the area of a larger surface which depends on the sign of X_1 . If $X_1 \geq 0$, the surface consists of a cylinder of axis the X -axis, of radius x and height $X_1 - X_2$, and of two annuli in the planes $X = X_1$ and $X = X_2$, of inner radius $\sqrt{x^2 - X_1^2}$ and $\sqrt{x^2 - X_2^2}$, respectively, and outer radius x (see Figure 6.18 (a)). If $X_1 \leq 0$, the surface consists of a cylinder of axis the X -axis, of radius $\sqrt{x^2 - X_1^2}$ and height $X_1 - X_2$, and of an annulus in the plane $X = X_2$, of inner radius $\sqrt{x^2 - X_2^2}$ and outer radius $\sqrt{x^2 - X_1^2}$ (see Figure 6.18 (b)). In both cases that surface is larger than $\partial B_3 \cap (B_1 \setminus B_2)$ by convexity.

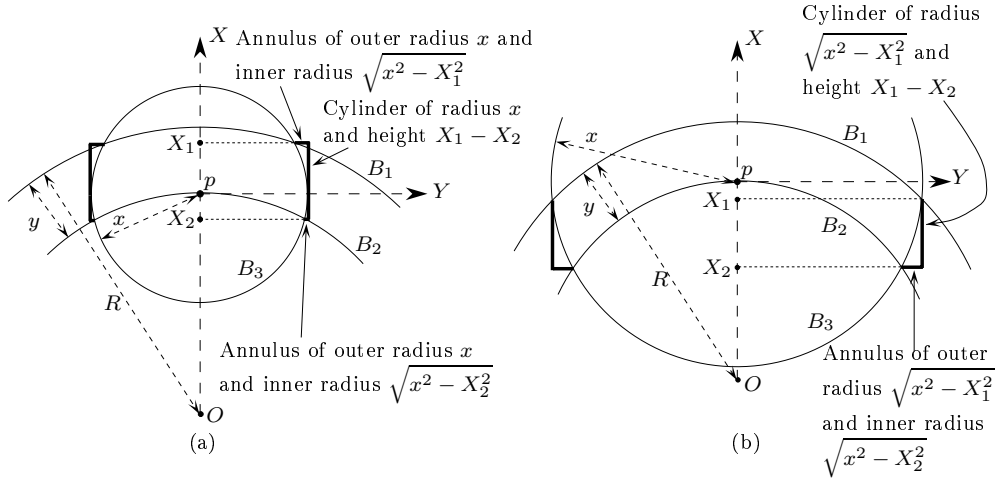


FIG. 6.18. For the proof of Proposition 39, case 1.

If $X_1 \geq 0$, the area of the cylinder is $2\pi x(X_1 - X_2) \leq 4\pi xy$ and the area of the annuli are $\pi x^2 - \pi(x^2 - X_i^2) = \pi X_i^2$, $i = 1, 2$. Since $X_1 \geq 0$, $X_1 \leq y \leq x$ and thus $\pi X_1^2 \leq \pi xy$. We also have from the expression of X_1 that $R^2 - x^2 - (R - y)^2 \geq 0$ and thus $x^2 \leq y(2R - y)$. Thus

$$\pi X_2^2 = \pi \frac{x^2}{2R - 2y} \frac{x^2}{2R - 2y} \leq \pi x \frac{x}{2R - 2y} y \frac{2R - y}{2R - 2y} = \pi xy \frac{x}{2R - 2y} \left(1 + \frac{y}{2R - 2y}\right).$$

It thus follows from $y \leq x \leq 2R - 2y$ that $\pi X_2^2 \leq 2\pi xy$. Hence $\mathcal{A} \leq 7\pi xy$.

If $X_1 \leq 0$, the area of the cylinder is $2\pi \sqrt{x^2 - X_1^2}(X_1 - X_2) \leq 2\pi x(2y)$ and the area of the annulus is $\pi(x^2 - X_1^2) - \pi(x^2 - X_2^2) = \pi(X_1 - X_2)(-X_2 - X_1) \leq 4\pi xy$. Thus $\mathcal{A} \leq 8\pi xy$.

Consider now the second case $2R - 2y < x \leq 2R - y$ (see Figure 6.17 (b)). For a fixed value of y , \mathcal{A} is the area of a spherical cap whose perimeter and curvature decreases as x increases. Thus \mathcal{A} is a decreasing function of x . Since the bound $\mathcal{A} \leq 8\pi xy$ is valid for $x = 2R - 2y$ and $8\pi xy$ is an increasing function of x , $\mathcal{A} \leq 8\pi xy$ for any $x \geq 2R - 2y$. \square

Troisième partie

Visibilité et polytopes

Chapitre 7

Droites tangentes à des polytopes en position arbitraire

Comme nous l'avons signalé au chapitre 5, les bornes inférieures sur la taille du complexe de visibilité dans le cas le pire s'obtiennent généralement au moyen de grilles. Si l'on suppose que les objets sont structurés, par opposition à un ensemble (ou "soupe") de polygones, on peut espérer obtenir des bornes supérieures de complexité moindre.

Dans une première étude en ce sens [15], nous avons montré qu'un ensemble de k polytopes disjoints, satisfaisant certaines hypothèses de position générique et totalisant n arêtes admettent $\Theta(n^2k^2)$ droites tangentes à 4 d'entre eux. Le travail présenté dans ce chapitre étend cette étude à des polytopes arbitraires, notamment libres de s'intersecter.

La version présentée ici est basé sur un article [16] présenté à la conférence *ACM Symposium on Computational Geometry*. Ce travail a été réalisé en collaboration avec de nombreux co-auteurs : Hervé Brönnimann, Olivier Devillers, Vida Dujmovic, Hazel Everett, Marc Glisse, Sylvain Lazard, Hyeon-Suk Na et Sue Whiteside.

7.1 Introduction

Computing visibility relations in a 3D environment is a central problem of computer graphics and engineering tasks such as radio propagation simulation and fast prototyping. Examples of visibility computations include determining the view from a given point, and computing the umbra and penumbra cast by a light source. In many applications, visibility computations are well-known to account for a significant portion of the total computation cost. Consequently a large body of research is devoted to speeding up visibility computations through the use of data structures (see [37] for a survey).

One such structure, the visibility complex [40, 77], encodes visibility relations by partitioning the set of maximal free line segments. Its size is intimately related to the number of maximal non-occluded line segments tangent to four objects in the scene; for n triangles in \mathbb{R}^3 , the complex can have size $\Theta(n^4)$ in the worst case [40], even when the triangles form a terrain (see [26] or Figure 7.1). The complex is thus potentially enormous, which has hindered its application in practice. However, there is evidence, both theoretical and practical, that this estimation is pessimistic. The lower bound examples, which are carefully designed to exhibit the worst-case behavior, are unrealistic in practice. For realistic scenes, Durand et al. [38] observe a quadratic growth rate, albeit for rather small scenes. For random scenes, Devillers et al. [30] prove that the expected size of the visibility complex is much smaller; for uniformly distributed unit balls

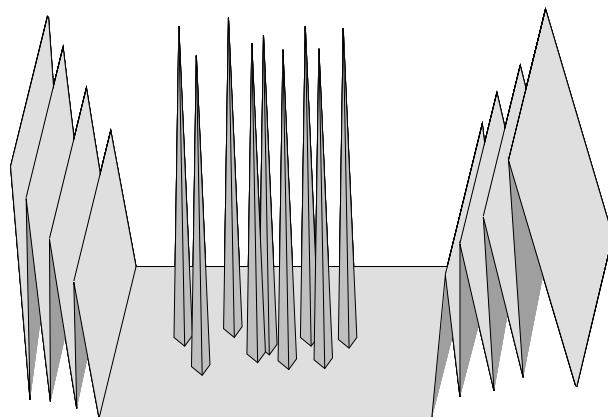


FIG. 7.1. A terrain of size n with $\Omega(n^4)$ maximal non-occluded line segments tangent in four points.

the expected size is linear and for polygons or polyhedra of bounded aspect ratio it is at most quadratic. Also, in 2D, while the worst-case complexity of the visibility complex is quadratic, experimental results strongly suggest that the size of the visibility complex of a scene consisting of scattered triangles is linear [24].

While these results are encouraging, most scenes are not random. In fact, most scenes have a lot of structure which we can exploit; a scene is typically represented by many triangles which form a much smaller number of convex patches. In particular, if a scene consists of k disjoint convex polyhedra with n edges in total then, under a strong general position assumption, the number of maximal non-occluded line segments tangent to four of the polyhedra is at most $O(n^2k^2)$; this follows directly from the bound proved in [42] on the number of combinatorial changes of the silhouette map viewed from a point moving along a straight line, and was also later proved in [15]. We present in this paper a generalization of these results. After preliminary definitions, we give a detailed account of our results and then present related previous work.

Preliminary definitions. We consider a scene that consists of a finite number of polytopes, not necessarily disjoint, not necessarily fully dimensional, and in arbitrary position. The definitions below are standard, yet carefully phrased in a way that remains valid in those situations.

A *polytope* is the convex hull of a point set. A plane is *tangent* to a polytope if it intersects the polytope and bounds a closed half-space that contains the polytope. A line or segment is *tangent* to a polytope if it intersects the polytope and is contained in a tangent plane. A face, edge, or a vertex of a polytope in \mathbb{R}^3 is the 2, 1 or 0-dimensional intersection of the polytope with a tangent plane. Note that, with this usual definition of polytopes, edges and faces are closed and they are not subdivided in any way.

The set of lines in \mathbb{R}^3 has a natural topological structure, namely, that of Plücker space [89]. The set of lines tangent to at least four polytopes is a subspace, whose *connected components* correspond to lines that can be continuously moved one into the other while remaining tangent to at least four polytopes.¹⁴ A line or line segment is *free* if it is tangent to each polytope that its relative interior intersects;¹⁵ otherwise it is *occluded*. The space of line segments also has a natural topological structure and the *connected components* of maximal free line segments

¹⁴The set of polytopes the line is tangent to might change during the motion.

¹⁵When the polytopes are fully dimensional, a segment is free if it does not intersect the interior of any of them. Our definition ensures that a segment is free also when it intersects and is coplanar with a two-dimensional polytope.

tangent to at least four among the k polytopes are defined similarly as for lines.

A *support vertex* of a line is a polytope vertex that lies on the line. A *support edge* of a line is a polytope edge that intersects the line but has no endpoint on it (a support edge intersects the line at only one point of its relative interior). A *support* of a line is one of its support vertices or support edges. The supports of a segment are defined similarly.

A line is *isolated with respect to* a set of edges and vertices if the line cannot be moved continuously while remaining a common transversal to these edges and vertices. Furthermore, we say that a set \mathcal{S} of edges and vertices *admits an isolated transversal* if these edges and vertices admit a common transversal that is isolated with respect to \mathcal{S} . Finally, a line is *isolated* if it is isolated with respect to a set of some, and hence all, of its supports.

Our results. In this paper, we generalize the result of [42, 15] in two ways. First, we consider polytopes that may **intersect**. We show that among k polytopes of total complexity n , the number of lines tangent to any four of them is in the worst case either infinite or $\Theta(n^2k^2)$. The most surprising aspect of this result is that the bound (which is tight) is the same whether the polytopes intersect or not. This is in sharp contrast to the 2D case, where the number of tangents of two convex polygons is always 4 if disjoint, and could be linear in the size of the polygons if they intersect. Secondly we consider polytopes in **arbitrary position** : we drop all general position assumptions. The polytopes may intersect in any way ; they may overlap or coincide. They may degenerate to polygons, segments or points. While four polytopes in general position (as defined in [15]) admit a finite number of common tangents, four polytopes in arbitrary position may admit an infinite number of common tangents which can be partitioned into connected components.

Our main results are the following.

Theorem 40. *Given k polytopes in \mathbb{R}^3 with n edges in total, there are, in the worst case, $\Theta(n^2k^2)$ connected components of maximal free line segments tangent to at least four of the polytopes. This bound also holds for connected components of possibly occluded lines tangent to at least four of the polytopes.*

These results improve the trivial bound of $O(n^4)$. Note that, when $k \neq 4$, neither of the two results stated in Theorem 40 implies the other since a line tangent to at least four among k polytopes may contain many, but does not necessarily contain any, maximal free line segments tangent to four polytopes.

When $k = 4$ Theorem 40 implies that there are $\Theta(n^2)$ connected components of lines tangent to the four polytopes, an improvement on the previously known upper bound of $O(n^3 \log n)$ which follows from the same bound on the complexity of the set of line transversals to a set of polyhedra (here four) with n edges in total [1]. Moreover, we prove a tighter bound when one of the four polytopes has few edges.

Theorem 41. *Given 3 polytopes with n edges in total and one polytope with m edges, there are, in the worst case, $\Theta(mn)$ connected components of lines tangent to the four polytopes.*

We also prove the following result which is more powerful, though more technical, than Theorem 40. Whereas Theorem 40 bounds the number of connected components of tangents, Theorem 42 bounds the number of isolated tangents with some notion of multiplicity. For example, in Figure 7.2, the tangent is counted $\binom{k}{2}$ times which is the number of minimal sets of vertices that admit that line as an isolated transversal. Although neither theorem implies the other, we will prove in Proposition 61 that the upper bound of Theorem 40 is easily proved using Theorem 42.

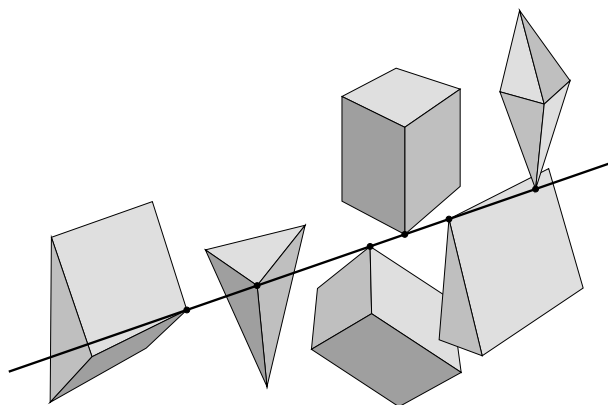


FIG. 7.2. A line tangent at a vertex of each of k polytopes.

Theorem 42. *Given k polytopes in \mathbb{R}^3 with n edges in total, there are, in the worst case, $\Theta(n^2k^2)$ minimal sets of open edges and vertices, chosen from some of the polytopes, that admit an isolated transversal that is tangent to these polytopes.*

To emphasize the importance of considering intersecting polytopes, observe that computer graphics scenes often contain non-convex objects. These objects, however, can be decomposed into sets of convex polyhedra. Notice that simply decomposing these objects into convex polyhedra with disjoint interiors may induce a scene of much higher complexity than a decomposition into intersecting polytopes. Moreover, the decomposition of a polyhedron into interior-disjoint polytopes may yield new tangents which were not present in the original scene; indeed a line tangent to two polytopes along a shared face is not tangent to their union.

The importance of considering polytopes in arbitrary position comes from the fact that graphics scenes are full of degeneracies both in the sense that four polytopes may admit infinitely many tangents and that polytopes may share edges or faces. There may actually be more connected components of tangents when the objects are in degenerate position; this is, for instance, the case for line segments [17]. Also, we could not find a perturbation argument that guarantees the preservation of all (or at least a constant fraction of) the connected components of tangents and we do not believe it is a simple matter.

Related results. Previous results on this topic include those that bound the complexity of sets of free lines or free line segments among different sets of objects. They are summarized in Table 7.1.

Recently, Agarwal et al. [5] proved that the set of free lines among n unit balls has complexity $O(n^{3+\epsilon})$. Devillers et al. showed a simple bound of $\Omega(n^2)$ [30] for this problem, and Koltun recently sketched a bound of $\Omega(n^3)$ (personal communication, 2004).

The complexity of the set of free line segments among n balls is trivially $O(n^4)$. Devillers and Ramos showed that the set of free line segments can have complexity $\Omega(n^3)$ (personal communication 2001, see also [30]). When the balls are unit size, the $\Omega(n^2)$ lower bound for the set of free lines holds. A lower bound of $\Omega(n^4)$ that applies to either case was recently sketched by Glisse (personal communication, 2004).

We mention two results for polyhedral environments. Halperin and Sharir [51], and Pellegrini [70], proved that, in a polyhedral terrain, the set of free lines with n edges has near-cubic complexity. De Berg, Everett and Guibas [28] showed a $\Omega(n^3)$ lower bound on the complexity of the set of free lines (and thus free segments) among n disjoint homothetic convex polyhedra.

	Worst-case	Expected
free lines to a polyhedron	$\Theta(n^4)$ (trivial)	
free lines above a polyhedral terrain	$O(n^3 2^{c\sqrt{\log n}})$ [51, 70]	
free lines among disjoint homothetic polytopes	$\Omega(n^3)$ [28]	
free lines among unit balls	$\Omega(n^2)$ [30], $O(n^{3+\epsilon})$ [5]	$\Theta(n)$ [30]
max. free segments above a polyhedral terrain	$\Theta(n^4)$ [26]	
isolated maximal free segments among k generic disjoint convex polyhedra	$\Theta(n^2 k^2)$ [42, 15]	
max. free segments among unit balls	$\Omega(n^2)$ [30], $O(n^4)$	$\Theta(n)$ [30]

TAB. 7.1. Published bounds on the complexity of the set of free lines or maximal free line segments among objects of total complexity n . The expected complexities are given for the uniform distribution of the balls centers.

The paper is organized as follows. We prove the upper bounds of Theorems 40, 41, and 42 in Sections 7.2 and 7.3, and the lower bounds in Section 7.4.

7.2 Main lemma

We prove in this section a lemma which is fundamental for the proofs of the upper bounds of Theorems 40, 41, and 42. Consider four polytopes \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , and \mathbf{S} in \mathbb{R}^3 , with p , q , r , and $s \geq 1$ edges, respectively, and let e be an edge of \mathbf{S} .

MAIN LEMMA. *There are $O(p + q + r)$ isolated lines intersecting e and tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} excluding those that lie in planes that contain e and are tangent to all four polytopes.*

The proof of the Main Lemma is rather complicated because it handles polytopes which may intersect as well as all the degenerate cases. To assist the reader, we first give an overview of the proof. We then state preliminaries and definitions in Section 7.2.2. In Sections 7.2.3 and 7.2.4, we bound the number of so-called “generic tangent lines”. In Section 7.2.5, we bound the number of “nongeneric tangent lines”. Finally, in Section 7.2.6, we pull these results together to conclude the proof of the Main Lemma.

7.2.1 Proof overview

The proof is inspired by a method which was, to our knowledge, first used in [12] (and later in [29, 42, 15]).

We present here an overview of the proof in which we do not address most of the problems arising from degeneracies. In particular, some definitions and remarks will require more elaboration in the context of the complete proof.

We sweep the space with a plane Π_t rotating about the line containing e . The sweep plane intersects the three polytopes \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} in three, possibly degenerate or empty, convex polygons denoted P_t , Q_t , and R_t , respectively (see Figure 7.3). During the sweep, we track the *bitangents*, that is, the lines tangent to P_t and Q_t , or to Q_t and R_t , in Π_t . As the sweep plane rotates, the three polygons deform and the bitangents move accordingly. Every time two bitangents become aligned during the sweep, the common line they form is tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} .

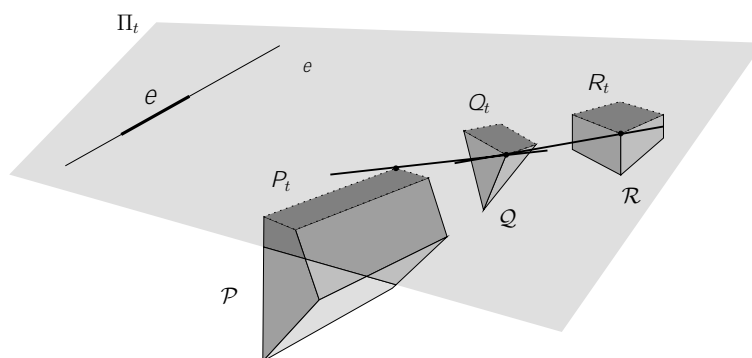


FIG. 7.3. Plane Π_t contains edge e and intersects polytopes \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} in polygons P_t , Q_t , and R_t .

In any given instance of the sweep plane Π_t , we consider the pairs of bitangents (one involving P_t and Q_t , and the other Q_t and R_t) that share a vertex of Q_t (see Figure 7.3). The isolated lines intersecting e and tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} are isolated transversals with respect to a tuple of supports that consists of e and the supports of two such bitangents. We consider all *candidate* such tuples of supports as the sweep plane rotates.

Such a tuple induced by an instance of the sweep plane changes as the plane rotates only when a support of a bitangent changes. We define *critical planes* in such a way that the supports of the bitangents do not change as the sweep plane rotates between two consecutive critical planes. As the sweep plane rotates, the supports of a bitangent change if a support starts or ceases to be swept, or if, during its motion, the bitangent becomes tangent to one of the polytopes along an edge of that polytope (see Figure 7.4). In the latter case, this means that the bitangent crosses a face or contains an edge of one of the polytopes. We thus define two types of critical planes : an instance of the sweep plane is critical if it contains a vertex of one of the polytopes, or if it contains a line that lies in the plane containing a face of one of the polytopes, and is tangent to another of the polytopes (see Figures 7.4 and 7.5). We will show that the number of critical planes is $O(p + q + r)$.

When the polytopes intersect there may exist a linear number of bitangents in an instance of the sweep plane (two intersecting convex polygons may admit a linear number of bitangents, as is the case for two regular n -gons where one is a rotation of the other about its center). Thus there can be a linear number of candidate tuples induced by any instance of the sweep plane, and the linear number of critical planes leads to a quadratic bound on the total number of distinct candidate tuples. In the detailed proof of the lemma, we amortize the count of candidate tuples over all the critical planes to get a linear bound on the number of distinct candidate tuples and thus on the number of isolated lines intersecting e and tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} ; this bound will however not hold for those isolated lines that lie in planes that contain e and are tangent to all four polytopes. Indeed, the number of such isolated tangent lines can be quadratic, in degenerate cases; for instance, four polytopes such that a plane contains edge e and a face of linear complexity from each other polytope may admit in this plane a quadratic number of such isolated tangent lines (one through each of a quadratic number of pairs of vertices).

7.2.2 Preliminaries and definitions

We can assume without loss of generality that \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} have *non-empty interior*. Indeed, since the set of isolated tangent lines to the four polytopes is zero-dimensional, there is

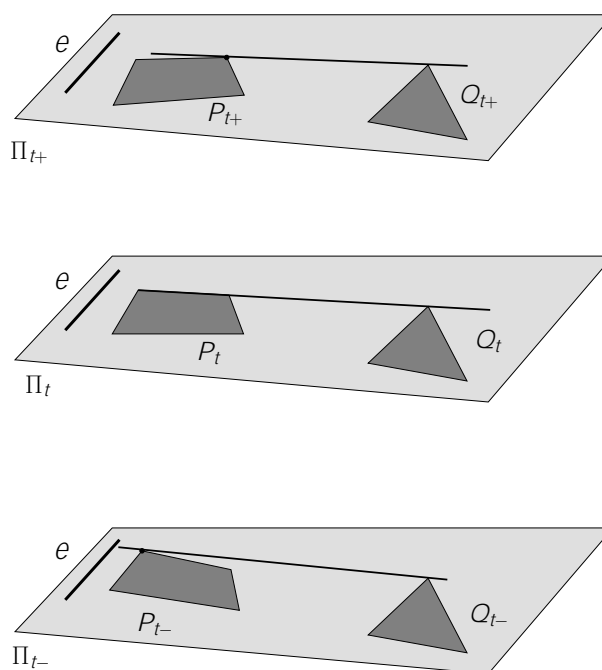


FIG. 7.4. A bitangent to P_t and Q_t is tangent to P_t along an edge. The plane Π_t is F-critical.

always room to extend any polytope with empty interior in such a way that none of the original isolated tangent lines are lost.

We say that a line *properly* intersects a polygon if it intersects its relative interior. In the sequel, we use this definition only when the line and polygon are coplanar. Notice that a line that contains a segment is tangent to the segment as well as properly intersects it.

Let l_e be the line containing e and let Π_t denote the sweep plane parameterized by $t \in [0, \pi]$ such that Π_t contains the line l_e for all t and $\Pi_0 = \Pi_\pi$. Each plane Π_t intersects the three polytopes \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} in three, possibly degenerate or empty, convex polygons, P_t , Q_t , and R_t , respectively (see Figure 7.3).

For any t , a *bitangent* to polygons P_t and Q_t is a line tangent to P_t and Q_t in Π_t (the line may intersect the polygon R_t in any way, possibly not at all). For any t , let a (P_t, Q_t) -tuple be the unordered set of all supports in \mathbf{P} and \mathbf{Q} of one of the bitangents to polygons P_t and Q_t . Note that a support in \mathbf{P} may be identical to a support in \mathbf{Q} , in which case the (P_t, Q_t) -tuple does not maintain duplicates. Also note that a (P_t, Q_t) -tuple consists of exactly one support in \mathbf{P} and one support in \mathbf{Q} (possibly identical) except when the corresponding bitangent is tangent to \mathbf{P} (or \mathbf{Q}) along a face (either intersecting the face properly or containing one of its edges); then the (P_t, Q_t) -tuple contains two supports in \mathbf{P} (or \mathbf{Q}) instead of one. A \mathbf{PQ} -tuple is a set of edges and vertices that is a (P_t, Q_t) -tuple for some t . We define similarly the (Q_t, R_t) -tuples and \mathbf{QR} -tuples.

We say that a (P_t, Q_t) -tuple is *maximal for some t* if it is not contained in any other (P_t, Q_t) -tuple, for the same t . Note that a (P_t, Q_t) -tuple is non-maximal for some t if and only if all its supports intersect Π_t in one and the same point, and P_t and Q_t are not equal to one and the same point (see Figure 7.7(b)).

For any t , let a (P_t, Q_t, R_t) -tuple be the union of a (P_t, Q_t) -tuple and a (Q_t, R_t) -tuple that share at least one support in \mathbf{Q} . A (P_t, Q_t, R_t) -tuple is maximal for some t if it is not contained

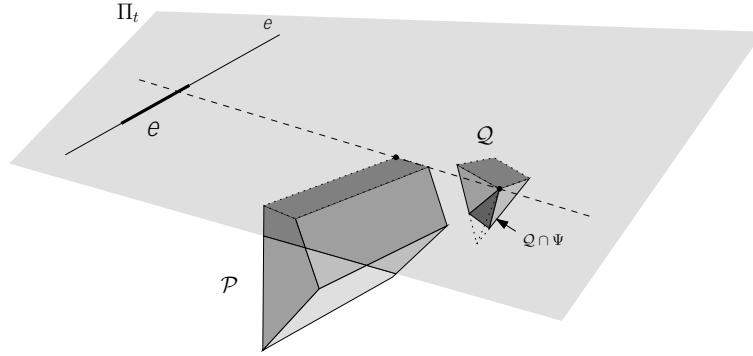


FIG. 7.5. Plane Π_t is F -critical : it contains a line that lies in a plane Ψ containing a face of \mathbf{P} such that the line is tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ at a point not on l_e .

in any other (P_t, Q_t, R_t) -tuple, for the same t . A **PQR-tuple** is a set of edges and vertices that is a (P_t, Q_t, R_t) -tuple for some t . Note that a **PQR-tuple** typically consists of three supports, one from each polytope, and consists, in all cases, of at most two supports in \mathbf{P} , at most three supports in \mathbf{Q} , and at most two supports in \mathbf{R} .

A line intersecting e and tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} is called a *generic tangent line* if and only if it intersects \mathbf{S} only on e and is tangent to P_t , Q_t , and R_t in some plane Π_t . Otherwise it is called a *nongeneric tangent line*. A nongeneric tangent line properly intersects a face of \mathbf{S} or properly intersects P_t , Q_t , or R_t in some plane Π_t . In the latter case P_t , Q_t , or R_t is a face or an edge of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , or \mathbf{R} lying in Π_t ; thus a nongeneric tangent line is (in both cases) tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} in a plane containing a face or two edges of these polytopes, a degenerate situation.

In the following three subsections, we bound the number of generic and nongeneric tangent lines. It is helpful to keep in mind that, as observed earlier, two convex polygons in a plane Π_t (such as P_t and Q_t) may admit a linear number of tangents if they intersect.

7.2.3 Generic tangent lines

Lemma 43. *The set of supports in \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} of a generic tangent line is a **PQR-tuple**.*

Démonstration. Any generic tangent line ℓ is tangent in Π_t to P_t , Q_t , and R_t for some value t . Thus the set of supports of ℓ in \mathbf{P} and \mathbf{Q} (resp. in \mathbf{Q} and \mathbf{R}) is a (P_t, Q_t) -tuple (resp. a (Q_t, R_t) -tuple). Moreover the (P_t, Q_t) -tuple and the (Q_t, R_t) -tuple contain the same supports in \mathbf{Q} , and thus their union is a (P_t, Q_t, R_t) -tuple, hence a **PQR-tuple**. \square

We now define the *critical planes* Π_t in such a way that, as we will later prove, the set of (P_t, Q_t, R_t) -tuples is invariant for t ranging strictly between two consecutive critical values. We introduce two types of critical planes : the *V-critical* and *F-critical planes*.

A plane Π_t is *V-critical* if it contains a vertex of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , or \mathbf{R} , not on l_e . (The constraint that the vertex does *not* lie on l_e ensures that the number of V-critical planes is finite even in degenerate configurations.) A plane Π_t is *F-critical* relative to an ordered pair of polytopes (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) if (see Figure 7.5) it contains a line ℓ such that

- (i) ℓ lies in a plane $\Psi \neq \Pi_t$ containing a face of \mathbf{P} , and
- (ii) ℓ is tangent in Ψ to polygon $\mathbf{Q} \cap \Psi$ or $\mathbf{P} \cap \Psi$, at some point not on l_e .

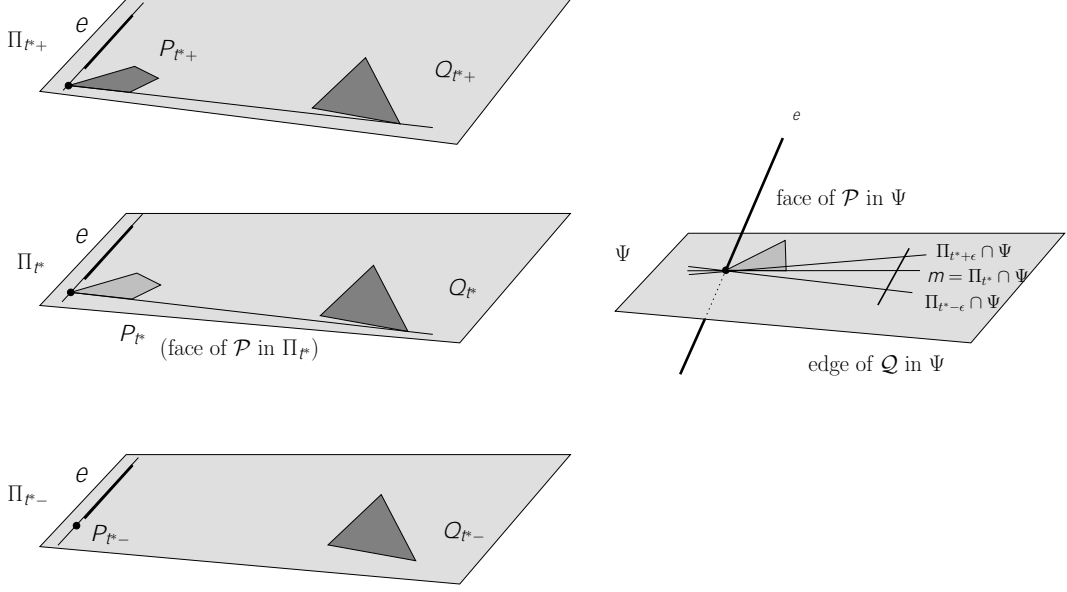


FIG. 7.6. Plane Π_{t^*} contains a line m such that (i) m lies in a plane $\Psi \neq \Pi_{t^*}$ containing a face of \mathbf{P} , and (ii) m is tangent to polygon $\mathbf{P} \cap \Psi$ at some point not on l_e ; however m is not tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$. If the definition of F-critical planes was not considering such plane Π_{t^*} to be F-critical then Lemma 45 would not hold. Indeed the set u of supports of line $\Pi_{t^*-\epsilon} \cap \Psi$ is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for some but not all t in any open neighborhood of t^* , and, although Π_{t^*} is V-critical, there exists no V-critical event (t^*, v) such that u contains v or an edge with endpoint v .

For simplicity, we do not require that ℓ is tangent to \mathbf{P} ; this leads to overestimating the number of common tangents to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , and \mathbf{S} but only by an asymptotically negligible amount. Note that not all lines in Ψ tangent to \mathbf{Q} are tangent to the polygon $\mathbf{Q} \cap \Psi$ when that polygon is a face or edge of \mathbf{Q} lying in Ψ . Note also that we define Π_t to be F-critical when ℓ is tangent to $\mathbf{P} \cap \Psi$ at some point not on l_e only for handling the very degenerate case where $\mathbf{Q} \cap \Psi$ is an edge of \mathbf{Q} and there exists a line in Ψ that properly intersects $\mathbf{Q} \cap \Psi$ and is tangent to $\mathbf{P} \cap \Psi$ along an edge that has an endpoint on l_e (see Figure 7.6).

F-critical planes relative to (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) , (\mathbf{Q}, \mathbf{R}) , and (\mathbf{R}, \mathbf{Q}) are defined similarly. A plane Π_t is *F-critical* if it is F-critical relative to polytopes (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) , (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) , (\mathbf{Q}, \mathbf{R}) , or (\mathbf{R}, \mathbf{Q}) .

The values of t corresponding to critical planes Π_t are called *critical values*. We call *V-critical* and *F-critical events* the ordered pairs (t, o) where t is a critical value and o is a vertex or line depending on the type of critical event. In a V-critical event, o is a vertex of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , or \mathbf{R} that belongs to $\Pi_t \setminus l_e$. In an F-critical event, o is a line lying in some plane Π_t and satisfying Conditions (i-ii) above. A *critical event* is a V-critical or F-critical event.

Lemma 44. *There are at most $\frac{2}{3}(p+q+r)$ V-critical events and $\frac{8}{3}(p+2q+r)$ F-critical events.*

Démonstration. The number of V-critical events is at most the total number of vertices of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} , and hence is less than two thirds the total number of edges of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} . We now count the number of F-critical events relative to polytopes (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) . Let Ψ be a plane containing a face of \mathbf{P} , and suppose that for some plane Π_t , line $\ell = \Pi_t \cap \Psi$ satisfies Conditions (i-ii). Plane Ψ does not contain l_e because otherwise both l_e and ℓ lie in the two distinct planes Ψ and Π_t , so $\ell = l_e$ but then ℓ cannot satisfy Condition (ii). Furthermore ℓ and l_e intersect or are parallel since they both lie in Π_t . Thus if $\Psi \cap l_e$ is a point then ℓ contains it, and otherwise $\Psi \cap l_e = \emptyset$ and ℓ is parallel to l_e .

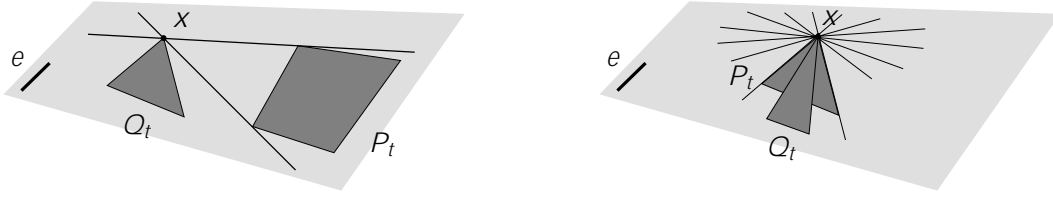


FIG. 7.7. Lines through x in Π_t and tangent to P_t and Q_t .

If $\Psi \cap l_e$ is a point, there are at most four candidates for a line ℓ in plane Ψ going through $\Psi \cap l_e$ and tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ or $\mathbf{P} \cap \Psi$ at some point not on l_e . Likewise, if $\Psi \cap l_e$ is empty, there are at most four candidates for a line ℓ in plane Ψ that is parallel to l_e and tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ or $\mathbf{P} \cap \Psi$. In either case, each candidate line is contained in a unique plane Π_t , for $t \in [0, \pi]$, since $\ell \neq l_e$ (ℓ contains a point not on l_e). Hence, a face of \mathbf{P} generates at most four F-critical events relative to (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) . Therefore the number of critical events relative to (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) is at most $\frac{8}{3}p$ since the number of faces of a polytope is at most two thirds the number of its edges. Hence the number of critical events relative to (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) , (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) , (\mathbf{Q}, \mathbf{R}) and (\mathbf{R}, \mathbf{Q}) is at most $\frac{8}{3}(p + 2q + r)$. \square

The following lemma states that the critical planes have the desired property. Let u_e be the set of supports of l_e in \mathbf{P} and \mathbf{Q} .

Lemma 45. *Let t^* be the endpoint of a maximal interval¹⁶ throughout which $u \neq u_e$ is a maximal (P_t, Q_t) -tuple. Then t^* is a critical value. Moreover, there exists a V-critical event (t^*, v) or a F-critical event (t^*, m) such that u contains v or an edge with endpoint v , or u is contained in the set of supports of m .*

The proof of this lemma is rather long and intricate; we postpone it to Section 7.2.4. Note that, as stated, this lemma only applies under the assumptions that u is maximal and distinct from u_e . These assumptions are made in order to simplify the proof of Lemma 45; we don't suggest that the lemma is false without them.

Lemma 46. *Any edge or vertex of \mathbf{P} or \mathbf{Q} is in at most 2 \mathbf{PQ} -tuples that are maximal (P_t, Q_t) -tuples for all t in any given non-empty interval¹⁶ of $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Let \tilde{t} be an element of a non-empty interval \mathcal{I} of $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ and x be an edge or vertex of \mathbf{P} or \mathbf{Q} . If x does not intersect $\Pi_{\tilde{t}}$ then no $(P_{\tilde{t}}, Q_{\tilde{t}})$ -tuple contains x . If x intersects $\Pi_{\tilde{t}}$ in one point then there are, in general, at most two lines in $\Pi_{\tilde{t}}$ going through x and tangent to $P_{\tilde{t}}$ and $Q_{\tilde{t}}$ (see Figure 7.7(a)); in all cases there are at most 3 $(P_{\tilde{t}}, Q_{\tilde{t}})$ -tuples containing x (see Figure 7.7(b)), however at most 2 of them are maximal. If x intersects $\Pi_{\tilde{t}}$ in more than one point, x is an edge lying in $\Pi_{\tilde{t}}$. Then any line in $\Pi_{\tilde{t}}$ intersecting x and tangent to $P_{\tilde{t}}$ and $Q_{\tilde{t}}$ contains an endpoint of x and thus x belongs to no $(P_{\tilde{t}}, Q_{\tilde{t}})$ -tuple.

Hence at most 2 \mathbf{PQ} -tuples contain x and are maximal (P_t, Q_t) -tuples for $t = \tilde{t}$, and thus at most 2 \mathbf{PQ} -tuples contain x and are maximal (P_t, Q_t) -tuples for all t in \mathcal{I} . \square

Lemma 47. *There are at most $O(p + q + r)$ \mathbf{PQR} -tuples.*

Démonstration. In order to count the number of distinct (P_t, Q_t, R_t) -tuples, we charge each maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple to a critical event. We then show that each critical event is charged at

¹⁶Such an interval could be open or closed, a single point or an interval of positive length.

most a constant number of times. It then follows from Lemma 44 that there are $O(p+q+r)$ distinct maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuples. A maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple consists of at most two supports in \mathbf{P} , at most three supports in \mathbf{Q} , and at most two supports in \mathbf{R} , and thus contains at most $(2^2 - 1)(2^3 - 1)(2^2 - 1)$ distinct subsets with at least one support in each of \mathbf{P} , \mathbf{Q} and \mathbf{R} . Each maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple thus contains at most a constant number of distinct (P_t, Q_t, R_t) -tuples, which implies the result.

Let s be a maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple and let \mathcal{I} be any maximal connected subset of $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ such that s is a maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple for all $t \in \mathcal{I}$. Let u be a maximal (P_t, Q_t) -tuple and u' a maximal (Q_t, R_t) -tuple such that the union of u and u' is s and such that u and u' share at least one support in \mathbf{Q} .

First, suppose that $\mathcal{I} = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Then u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Thus each support in u intersects Π_t for all $t \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ and thus intersects l_e ; moreover each support in u intersects Π_t only on l_e for all $t \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ except possibly for one value of t . Since \mathbf{P} and \mathbf{Q} have non-empty interior, $P_t \cup Q_t$ is not reduced to a point for all t in some interval of positive length. For all t in such an interval, since u is maximal, the union of the supports in u intersects Π_t in at least two distinct points. These at least two distinct points lie on l_e for some values of t by the above argument. Thus, for these values of t , l_e is the only line in Π_t whose set of supports contains u . Hence u is the set of supports of l_e . The same property holds for v and thus s is also the set of supports of l_e . We can thus assume in the following that $\mathcal{I} \neq \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, and only count the maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuples that are not the set of supports of l_e .

Interval \mathcal{I} is thus a non-empty interval of $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$; it can be open or closed, a single point or an interval of positive length. Let w_0 and w_1 denote the endpoints of $\mathcal{I} \neq \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

If s contains a vertex v , or an edge with endpoint v , such that v lies in $\Pi_{w_i} \setminus l_e$, for $i = 0$ or 1 , then we charge s to the V-critical event (w_i, v) . Otherwise, we charge s to an F-critical event (w_i, m) where m is a line in Π_{w_i} whose set of supports contains u or u' . Such a V-critical or F-critical event exists by Lemma 45.

We now prove that each critical event is charged by at most a constant number of distinct maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuples. As mentioned before, that will imply the result.

Consider a V-critical event (t^*, v) that is charged by a maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple s . By the charging scheme, s contains a support x that is v or an edge with endpoint v , and s is a maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple for all t in at least one of three intervals, $\{t^*\}$ and two open intervals having t^* as endpoint; denote these intervals by $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$.

By Lemma 46, at most 2 \mathbf{PQ} -tuples contain x and are maximal (P_t, Q_t) -tuples for all t in \mathcal{I}_i . Moreover, each of these \mathbf{PQ} -tuples contains at most 2 supports in \mathbf{Q} , and each of these supports belongs to at most 2 \mathbf{QR} -tuples that are maximal (Q_t, R_t) -tuples for all t in \mathcal{I}_i . Thus at most 8 \mathbf{PQR} -tuples contain x and are maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuples for all t in \mathcal{I}_i , for each $i = 1, \dots, 3$. Hence any V-critical event (t^*, v) is charged by at most 24 distinct maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuples.

Consider now an F-critical event (t^*, m) that is charged by a maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple s , and define as before u and u' . By the charging scheme, the set of supports of m contains u or u' (or both); suppose without loss of generality that it contains u . The set of supports of m contains at most two supports in \mathbf{P} and at most two supports in \mathbf{Q} . Since u contains at least one support in \mathbf{P} and at least one support in \mathbf{Q} , there are at most 3^2 choices for u .

By the charging scheme, s is a maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuple for all t in at least one of 3 intervals, $\{t^*\}$ and two open intervals having t^* as endpoint; denote by $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ these intervals. It follows from Lemma 46 that, for each support x of \mathbf{Q} in u , at most 2 \mathbf{QR} -tuples contain x and are maximal (Q_t, R_t) -tuples for all t in \mathcal{I}_i . There are at most 3^2 choices for u (as shown above), 2 for x , 3 for i and 2 for the \mathbf{QR} -tuples containing x . Hence any F-critical event (t^*, m) is charged by at most $2^2 \times 3^3$ distinct maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuples.

Therefore each critical event is charged by at most a constant number of distinct maximal (P_t, Q_t, R_t) -tuples, which concludes the proof. \square

Corrolaire 48. *There are at most $O(p + q)$ \mathbf{PQ} -tuples.*

Démonstration. Replace \mathbf{R} by a copy of \mathbf{Q} in Lemma 47. Any \mathbf{PQ} -tuple is also a \mathbf{PQQ} -tuple, and there are at most $O(p + q + q) = O(p + q)$ of these. \square

Proposition 49. *There are $O(p + q + r)$ isolated generic tangent lines.*

Démonstration. A generic tangent line is transversal to e and to the edges and vertices of a \mathbf{PQR} -tuple, by definition and Lemma 43. An isolated generic tangent line is thus an isolated transversal with respect to a set of edges and vertices that consists of a \mathbf{PQR} -tuple and either edge e or one or both of its endpoints. The number of such sets is four times the number of \mathbf{PQR} -tuples, which is in $O(p + q + r)$ by Lemma 47. The result follows since each such set consists of at most eight edges and vertices (at most two supports from each of the four polytopes) and thus admits at most eight isolated transversals [17]. \square

7.2.4 Proof of Lemma 45

Recall that u_e denotes the set of supports of l_e in \mathbf{P} and \mathbf{Q} , and that Lemma 45 states the following.

Let t^ be the endpoint of a maximal interval throughout which $u \neq u_e$ is a maximal (P_t, Q_t) -tuple. Then t^* is a critical value. Moreover, there exists a V -critical event (t^*, v) or a F -critical event (t^*, m) such that u contains v or an edge with endpoint v , or u is contained in the set of supports of m .*

We can assume that u contains no vertex v and no edge with endpoint v , such that v lies on $\Pi_{t^*} \setminus l_e$ because otherwise (t^*, v) is a V -critical event such that u contains v or an edge with endpoint v , which concludes the proof.

We prove a series of lemmas that yields Lemma 45. Indeed, we prove the existence of a line m in Π_{t^*} whose set of supports contains u (Lemma 52) such that (i) m lies in a plane $\Psi \neq \Pi_{t^*}$ containing a face of \mathbf{P} (Lemma 53), and (ii) m is tangent in Ψ to polygon $\mathbf{Q} \cap \Psi$ or $\mathbf{P} \cap \Psi$, at some point not on l_e (Lemma 54). This proves that Π_{t^*} contains a line m whose set of supports contains u and such that (t^*, m) is an F -critical event, which concludes the proof.

By hypothesis, for any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* whose endpoints are denoted by t_0 and t_1 , u is not a maximal (P_t, Q_t) -tuple for some $t \in \mathcal{N}$ and u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for $t = t^*$ or for all $t \in (t^*, t_1)$ (or by symmetry for all $t \in (t_0, t^*)$).

We only consider in the following supports in \mathbf{P} and in \mathbf{Q} ; polytope \mathbf{R} plays no role. We start by proving two preliminary lemmas.

Lemma 50. *Each support in u intersects Π_t in exactly one point (possibly on l_e), for all t in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* .*

Moreover, the union of all supports in u intersects Π_t in at least two distinct points for all $t \neq t^$ in \mathcal{N} . This property also holds for $t = t^*$ if u is a maximal (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple.*

Démonstration. Since u is a (P_t, Q_t) -tuple for some t in every open neighborhood of t^* , each support in u intersects Π_t for some t in every open neighborhood of t^* . It thus follows from the assumption that u contains no vertex v and no edge with endpoint v , such that v lies on $\Pi_{t^*} \setminus l_e$, that each support in u intersects Π_t for all t in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of

t^* . It follows that each support in u either lies in l_e or intersects Π_t in exactly one point for all $t \in \mathcal{N}$. However, no edge of u lies in l_e because otherwise, if x denotes such an edge of, say, \mathbf{P} , then any line tangent to P_t in Π_t and intersecting x contains an endpoint of x which is a vertex of \mathbf{P} ; thus, by definition, u does not contain x but one of its endpoints. Hence each support of u intersects Π_t in exactly one point for all $t \in \mathcal{N}$.

We now prove that the union of the supports in u intersects Π_t in at least two distinct points for any $t \in \mathcal{N}$ such that u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple. Suppose for a contradiction that the union of the supports in u intersects Π_t in one single point v for some $t \in \mathcal{N}$ such that u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple. Then polygons P_t and Q_t are both reduced to point v because otherwise u is not maximal (otherwise, a line in Π_t tangent to P_t and Q_t at v can be rotated about v until it becomes tangent to P_t or Q_t at some other points). Thus $v = P_t = Q_t$ is a vertex of \mathbf{P} and of \mathbf{Q} because the polytopes have non-empty interior. Hence $u = \{v\}$ because each support in u contains v . It follows that v lies on l_e since each support in u intersects Π_t for all $t \in \mathcal{N}$. Moreover, since P_t and Q_t are both reduced to point $v = l_e \cap \mathbf{P} = l_e \cap \mathbf{Q}$, the set u_e of supports of l_e is u , contradicting the hypotheses of Lemma 45.

Thus, if u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in (t^*, t_1)$, the union of the supports in u intersects Π_t in at least two distinct points for all $t \in (t^*, t_1)$ and thus for all $t \neq t^*$ in any sufficiently small open neighborhood of t^* . Also, if u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for $t = t^*$, the union of the supports in u intersects Π_t in at least two distinct points for $t = t^*$ and thus for all t in any sufficiently small open neighborhood of t^* . \square

Lemma 51. *If u is a maximal (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple then u consists of at least three supports.*

Démonstration. Note that it follows from Lemma 50 that u contains at least two supports. Suppose for a contradiction that u consists of only two supports. By Lemma 50, they intersect Π_t in exactly two distinct points for all t in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* . Thus there exists for all $t \in \mathcal{N}$ a unique line m_t in Π_t whose set of supports contains u ; moreover m_t is continuous in terms of t . Since u is a maximal (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple, the set of supports of m_{t^*} is u . Thus, for all t in any sufficiently small \mathcal{N} , the set of supports of m_t is u . Thus the set of supports of m_t is invariant for $t \in \mathcal{N}$ and since m_{t^*} is tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} , line m_t is tangent to P_t and Q_t for all $t \in \mathcal{N}$.

Hence, for all $t \in \mathcal{N}$, line m_t , whose set of supports is u , is tangent to P_t and Q_t in Π_t . Thus u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in \mathcal{N}$. Moreover, m_t is the unique line in Π_t whose set of supports contains u , thus u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in \mathcal{N}$, contradicting the hypotheses of the lemma. \square

Lemma 52. *There exists a line m in Π_{t^*} whose set of supports contains u that is tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} along an edge of one of them, say of P_{t^*} .*

Démonstration. Consider first the case where u is a maximal (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple. There exists in Π_{t^*} a line m tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} whose set of supports is u . By Lemma 51, the set u of supports of m contains at least three supports, and hence at least two supports in \mathbf{P} (or in \mathbf{Q}). Furthermore, the supports of m in one polytope intersect Π_{t^*} in distinct points (by definition of supports). Thus m intersects P_{t^*} (or Q_{t^*}) in at least two distinct points and is tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} . The result follows since P_{t^*} (and Q_{t^*}) is convex.

Consider now the case where u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in (t^*, t_1)$. Then, for all $t \in (t^*, t_1)$, there exists a line in Π_t tangent to P_t and Q_t and whose set of supports is u . Moreover, by Lemma 50, this line is unique for each $t \in (t^*, t_1)$ and varies continuously in terms of $t \in (t^*, t_1)$. When t tends to t^* , the line tends to a line m_{t^*} in Π_{t^*} which is tangent to P_{t^*} and

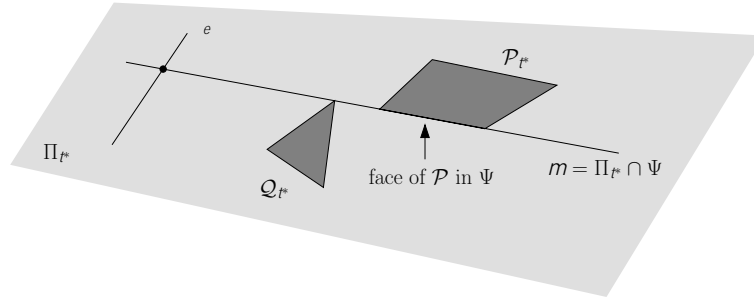


FIG. 7.8. Line m is tangent to \mathbf{P} along a face in plane $\Psi \neq \Pi_{t^*}$.

Q_{t^*} and whose set of supports contains u . If its set of supports strictly contains u then m_{t^*} is tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} along an edge of one of them because the polygons are convex, and hence we can choose $m = m_{t^*}$ to complete the proof. Otherwise, u is a (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple.

We can suppose that u is a non-maximal (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple since we already treated the case where u is maximal. There exists in Π_{t^*} a line tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} whose set of supports is u . Since u is non-maximal this line is tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} at a shared vertex, and can be rotated about this vertex in Π_{t^*} until it becomes tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} at some other points, which must occur because u is non-maximal; let m denote the resulting line. The set of supports of m contains u and m is tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} along an edge of one of them because the polygons are convex. \square

Lemma 53. *Line m lies in a plane $\Psi \neq \Pi_{t^*}$ containing a face of \mathbf{P} .*

Démonstration. By Lemma 52, m contains an edge of P_{t^*} ; see Figure 7.8. This edge either intersects the relative interior of some face of \mathbf{P} in which case we take Ψ to be the plane containing that face, or it is an edge of \mathbf{P} in which case we take Ψ to be a plane, different from Π_{t^*} , containing one of the two faces of \mathbf{P} incident to that edge. \square

Let m_t be the line $\Psi \cap \Pi_t$ for all t in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* ; line m_t is well defined since $\Psi \cap \Pi_{t^*}$ is line m by Lemmas 52 and 53.

Lemma 54. *Line m is tangent to $\mathbf{P} \cap \Psi$ or to $\mathbf{Q} \cap \Psi$, at some point not on l_e .*

Démonstration. We assume for a contradiction that line m does not satisfy the lemma, i.e., m is not tangent to $\mathbf{P} \cap \Psi$ or to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ at any point other than on l_e . We prove that the set of supports of m is u and is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all t in any sufficiently small neighborhood of t^* , contradicting the hypotheses of Lemma 45 and thus proving Lemma 54.

Since m is tangent to \mathbf{Q} (by Lemma 52), m is tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ only on l_e (see Figure 7.9(a)), or m properly intersects $\mathbf{Q} \cap \Psi$ which is then a face or an edge of \mathbf{Q} (see Figure 7.9(b))¹⁷. Similarly m is tangent to $\mathbf{P} \cap \Psi$ only on l_e , or m properly intersects it; however $\mathbf{P} \cap \Psi$ is necessarily a face of \mathbf{P} by Lemma 53.

The following Lemmas 55 and 56 imply that the set of supports of m_t is invariant and equal to u for all t in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* . Moreover, since m_t varies

¹⁷Note that in these two situations, two edges of two distinct polytopes are then coplanar (in the first case an edge of \mathbf{Q} and e are coplanar, and in the later case a face of \mathbf{P} is coplanar with a face or an edge of \mathbf{Q}). Hence proving this lemma is straightforward under some general position assumption that excludes such situations.

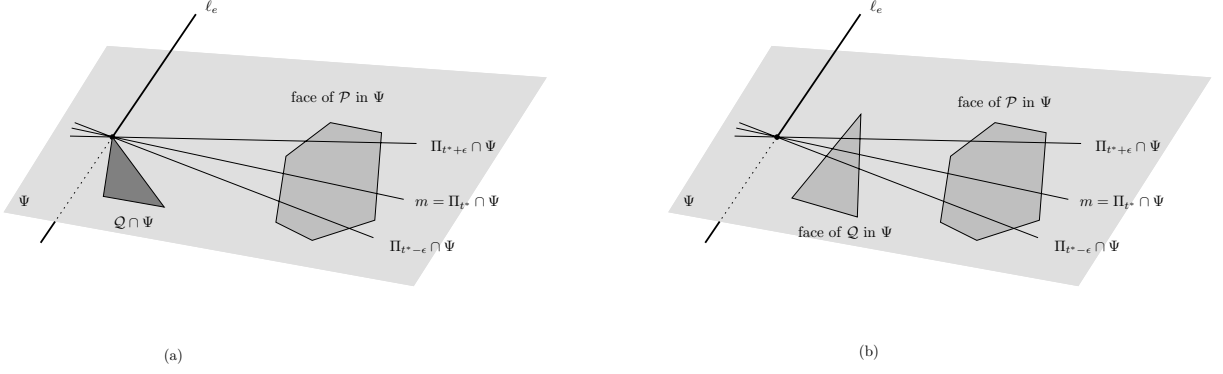


FIG. 7.9. m is tangent to \mathbf{P} along a face in Ψ and (a) to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ only on l_e or (b) to \mathbf{Q} along a face in Ψ .

continuously with t and $m = m_{t^*}$ is tangent to P_{t^*} and Q_{t^*} (by Lemma 52), line m_t is tangent to P_t and Q_t for all $t \in \mathcal{N}$. Hence u is a (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in \mathcal{N}$. We now prove that u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in \mathcal{N}$.

As we have seen before, $m = m_{t^*}$ is tangent to \mathbf{P} in at least two points (by Lemma 52), thus m_{t^*} intersects its supports in at least two distinct points. Moreover the set of supports of m_{t^*} is u . Thus there is a unique line in Π_{t^*} whose set of supports contains u . Hence u is a maximal (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple.

By Lemma 50, m_t is the unique line in Π_t whose set of supports contains u for all $t \neq t^*$ in \mathcal{N} . Thus u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \neq t^*$ in \mathcal{N} .

Hence u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in \mathcal{N}$, contradicting the hypotheses of Lemma 45 and thus concluding the proof of Lemma 54. \square

Lemma 55. *The set of supports of m_t is u for some t in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* .*

Démonstration. We first prove that the supports in u are supports of m_t for all $t \in \mathcal{N}$. A support vertex in u lies on l_e by Lemma 50 and thus lies in Π_t for all t . A support vertex in u also lies on m by Lemma 52 and thus lies in plane Ψ by Lemma 53. Hence, for all $t \in \mathcal{N}$, the support vertices in u lie on m_t , and thus are supports of m_t .

In order to prove that the support edges in u are supports of m_t , it is sufficient (by Lemma 52) to prove that the support edges of m are supports of m_t . The support edges of m in \mathbf{P} lie in plane Ψ (see Figure 7.9(b)) because Ψ contains m and a face of \mathbf{P} (indeed if m intersects an edge of \mathbf{P} not in Ψ then m contains one of its endpoints, and thus the edge is not a support). Thus all the support edges of m lie in Ψ and m contains none of their endpoints (by definition). Since m_t lies in Ψ for all t and $m_{t^*} = m$, line m_t intersects all the support edges of m and contains none of their endpoints for all t in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* . Hence the support edges of m in \mathbf{P} are supports of m_t for all $t \in \mathcal{N}$.

Consider the case where $\mathbf{Q} \cap \Psi$ is a face or an edge of \mathbf{Q} . Similarly as for \mathbf{P} , the support edges of m in \mathbf{Q} lie in plane Ψ , and thus are supports of m_t for all $t \in \mathcal{N}$.

Consider now the case where m is tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ only on l_e at, say, point v (see Figure 7.9(a)). Then v lies in Ψ (since $m \subset \Psi$ by Lemma 53) and also lies in Π_t for all t (since $l_e \subset \Pi_t$ for all t). Hence m_t contains v for all $t \in \mathcal{N}$. Moreover, m_t is tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ only at v for all t in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* . Hence the set of supports of m_t in \mathbf{Q} is invariant for all $t \in \mathcal{N}$.

We have so far proved that the set of supports of m_t contains u for all $t \in \mathcal{N}$.

We now prove that the set of supports of m_t is u for some $t \in \mathcal{N}$. Consider first the case where u is a maximal (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple. Then, by Lemma 50, the union of the supports in u intersects Π_{t^*} in at least two distinct points, thus $m_{t^*} = m$ is the only line in Π_{t^*} whose set of supports contains u . Moreover, since u is a (P_{t^*}, Q_{t^*}) -tuple, there exists a line in Π_{t^*} whose set of supports is u . Hence the set of supports of m_{t^*} is u .

Consider now the case where u is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for all $t \in (t^*, t_1)$. By Lemma 50, for all $t \in (t^*, t_1)$, the union of the supports in u intersects Π_t in at least two distinct points, thus m_t is the only line in Π_t whose set of supports contains u . For all $t \in (t^*, t_1)$, since u is a (P_t, Q_t) -tuple there exists a line in Π_t whose set of supports is u . Hence the set of supports of m_t is u for all $t \in (t^*, t_1)$. \square

Lemma 56. *The set of supports of m_t is invariant for t ranging in any sufficiently small open neighborhood \mathcal{N} of t^* .*

Démonstration. First if $m = l_e$ then $m_t = l_e$ for all $t \in \mathcal{N}$ because Ψ contains $m = l_e$ (by Lemma 53) and Π_t contains l_e for all t (by definition). Thus the set of supports of m_t is invariant for all $t \in \mathcal{N}$. We now assume that $m \neq l_e$.

Line m is tangent to polygon P_{t^*} along an edge by Lemma 52. Thus m is tangent to \mathbf{P} in at least two points. Hence, since $\mathbf{P} \cap \Psi$ is a face of \mathbf{P} and m lies in Ψ , either m properly intersects $\mathbf{P} \cap \Psi$ or m is tangent to $\mathbf{P} \cap \Psi$ along one of its edges. In the later case, the edge does not lie in l_e since $m \neq l_e$, thus m is tangent to $\mathbf{P} \cap \Psi$ at some point not on l_e , contradicting our assumptions. Hence m properly intersects the face of \mathbf{P} in Ψ .

It follows that, if m contains a vertex of \mathbf{P} , then this vertex is an endpoint of a support edge of m_t for all t in any sufficiently small open neighborhood of t^* (indeed m_t lies in Ψ and tends to m when t tends to t^*). By Lemma 55, the set of supports of m_t is u for some t in any sufficiently small open neighborhood of t^* . Hence, if m contains a vertex of \mathbf{P} , this vertex is an endpoint of a support edge in u . By assumption u contains no edge with endpoint on $\Pi_{t^*} \setminus l_e$, thus m contains no vertex of \mathbf{P} except possibly on l_e (since m lies in Π_{t^*}). It thus follows that the set of supports of m_t in \mathbf{P} is invariant for t ranging in any sufficiently small open neighborhood of t^* (since $m_t \subset \Psi$ tends to m when t tends to t^* and all supports of m lie in Ψ).

Now consider the case where m properly intersects $\mathbf{Q} \cap \Psi$ which is a face or an edge of \mathbf{Q} . Similarly as for \mathbf{P} , m contains no vertex of \mathbf{Q} except possibly on l_e and thus the set of supports of m_t in \mathbf{Q} is invariant for t ranging in any sufficiently small open neighborhood of t^* .

Finally, consider the case where m is tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ only on l_e . Then, as in the proof of Lemma 55, the set of supports of m_t in \mathbf{Q} is invariant for all t ranging in any sufficiently small open neighborhood of t^* , which concludes the proof. \square

7.2.5 Nongeneric tangent lines

We count here the number of nongeneric tangent lines. Note that, as mentioned before, there are no such lines under some adequate general position assumption.

Proposition 57. *There are at most $O(p+q+r)$ isolated nongeneric tangent lines except possibly for those that lie in planes that contain e and are tangent to all four polytopes.*

Démonstration. An isolated nongeneric tangent line lies in plane Π_t for some t and contains (at least) two distinct points, each of which is a vertex of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , or \mathbf{S} , or a point of tangency between the line and one of the polygons P_t , Q_t , and R_t ; indeed, otherwise the line can be moved in Π_t while keeping the same supports.

We count first the isolated nongeneric tangent lines that contain two distinct points of tangency with two of the polygons P_t , Q_t , and R_t in Π_t for some t . Consider such a line ℓ tangent to, say, P_t and Q_t in Π_t . Line ℓ is nongeneric and thus properly intersects a face of \mathbf{S} or a face or an edge of \mathbf{R} lying in Π_t . If ℓ properly intersects a face of \mathbf{S} or a face or an edge of \mathbf{R} lying in Π_t but not entirely contained in l_e , then Π_t is one of the at most four planes tangent to \mathbf{R} or \mathbf{S} . There are $O(p+q)$ lines tangent to P_t and Q_t in two distinct points in each of these planes and thus $O(p+q)$ such lines in total. Otherwise, Π_t intersects each of \mathbf{R} and \mathbf{S} in an edge contained in l_e . The supports of ℓ are thus the union of a \mathbf{PQ} -tuple, and of, in each of \mathbf{R} and \mathbf{S} , the edge lying in l_e or one (or both) of its endpoint. It follows that at most a constant number of such isolated nongeneric tangent lines contain a given \mathbf{PQ} -tuple in its set of supports. Hence the number of such lines is at most the number of \mathbf{PQ} -tuples, which is in $O(p+q)$ by Corollary 48. It follows that there are at most $O(p+q+r)$ isolated nongeneric tangent lines that contain two distinct points of tangency with two of the polygons P_t , Q_t , and R_t in Π_t for some t . We obtain similarly that there are at most $O(p+q+r)$ isolated nongeneric tangent lines that contain two distinct points of tangency with only one the polygons P_t , Q_t , and R_t .

We now count the isolated nongeneric tangent lines that contain a unique vertex of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , or \mathbf{S} and a unique point of tangency with the polygons P_t , Q_t , and R_t in Π_t for some t . Each vertex v of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , or \mathbf{S} that does not lie on l_e is contained in a unique plane Π_t and there are, in that plane, at most six lines through v and tangent to P_t , Q_t , or R_t . There are thus $O(p+q+r)$ such lines in total. Consider now a line ℓ through a vertex v on l_e and tangent to P_t at $w \neq v$ in Π_t for some t . We can suppose that each of Q_t and R_t is either tangent to ℓ at w or is properly intersected by ℓ ; indeed otherwise ℓ is tangent to two polygons in two distinct points. If Q_t (or R_t) is a face of \mathbf{Q} (resp. \mathbf{R}) or an edge not contained in l_e then Π_t is one of the at most two planes tangent to \mathbf{Q} (resp. \mathbf{R}) and, in each of these planes, there are at most two lines through v and tangent to P_t . If Q_t (or R_t) is tangent to ℓ at w such that the support edges of ℓ in \mathbf{P} and in \mathbf{Q} (resp. \mathbf{R}) are not collinear then ℓ goes through a vertex of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , or \mathbf{S} that lies on l_e , and through a vertex of the intersection of two of these polytopes. There are at most eight vertices of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , and \mathbf{S} on l_e and $O(p+q+r)$ vertices on the intersection of two of these polytopes. There are thus $O(p+q+r)$ such lines in total. Otherwise, Q_t (and R_t) is an edge contained in l_e or is tangent to ℓ at w such that the support edges of ℓ in \mathbf{P} and in \mathbf{Q} (resp. \mathbf{R}) are collinear; then ℓ is not isolated.

We finally bound the number of isolated nongeneric tangent lines that contain no point of tangency with the polygons P_t , Q_t , and R_t in Π_t for any t (and thus contain at least two vertices of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , and \mathbf{S}). Consider such a line ℓ that lies in plane Π_t for some t . Line ℓ is tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} and thus properly intersect P_t , Q_t , and R_t in plane Π_t which is tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} . If plane Π_t is not tangent to \mathbf{S} , ℓ goes through an endpoint of e (since ℓ is tangent to \mathbf{S}) and there are $O(p+q+r)$ such lines ℓ that go through an endpoint of e and at least another vertex of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , or \mathbf{R} . If plane Π_t is tangent to \mathbf{S} , line ℓ lies in a plane Π_t tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , and \mathbf{S} , which concludes the proof. \square

Note that there can be $\Omega(n^2)$ isolated nongeneric tangent lines that lie in a plane tangent to all four polytopes. Consider, for instance, four polytopes that admit a common tangent plane containing edge e , an edge e' of \mathbf{P} , and two faces of \mathbf{Q} and \mathbf{R} of linear complexity such that all the lines through a vertex of each face intersect e and e' . All these lines are isolated nongeneric tangent lines.

7.2.6 Proof of the Main Lemma

Proposition 49, which handles the isolated generic tangent lines, and Proposition 57, which handles the isolated nongeneric tangent lines, directly yield the Main Lemma.

7.3 Upper bounds

We prove in this section the upper bounds of Theorems 40, 41, and 42. The lower bounds are proved in Section 7.4. Consider k pairwise distinct polytopes $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$ with n_1, \dots, n_k edges, respectively, and n edges in total.

Lemma 58. *For any edge e of \mathbf{P}_i , there are $O(n_j + n_l + n_m)$ sets of open edges, chosen from $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j, \mathbf{P}_l$, and \mathbf{P}_m , that admit an isolated transversal that intersects e and is tangent to these four polytopes.*

Démonstration. Any isolated transversal to a set of edges is isolated with respect to the set of all its supports. It is thus sufficient to bound the number of sets of open edges, chosen from $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j, \mathbf{P}_l$, and \mathbf{P}_m , that are intersected by an isolated line that intersects e and is tangent to these four polytopes. The Main Lemma states that there are $O(n_j + n_l + n_m)$ isolated lines intersecting e and tangent to $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j, \mathbf{P}_l$, and \mathbf{P}_m , excluding those that lie in planes that contain e and are tangent to all four polytopes. Any of these $O(n_j + n_l + n_m)$ isolated lines intersects at most two open edges in any polytope. Thus there are $O(n_j + n_l + n_m)$ sets of open edges (chosen from $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j, \mathbf{P}_l$, and \mathbf{P}_m) that are intersected by one of these isolated lines. Now consider any isolated line that lies in a plane that contains e and is tangent to all four polytopes. This plane contains all the open edges that are intersected by the isolated line. Thus these edges (and any subset of them) admit no isolated transversal. \square

Lemma 59. *A minimal set of open edges and vertices that admit an isolated transversal consists of (i) two vertices, (ii) one vertex and one or two edges, or (iii) two, three, or four edges.*

Démonstration. Consider a minimal set of open edges and vertices that admits an isolated transversal. The elements are necessarily distinct because the set is minimal. If the set contains two vertices, it contains no other element since the two vertices admit a unique transversal.

Suppose now that the set contains one vertex. None of the open edges contain the vertex because otherwise such an edge would be redundant. Thus, the vertex and any segment define either a line, and thus admit an isolated transversal, or they define a plane. If none of the other edges intersect that plane in a unique point, the vertex and all open edges admit zero or infinitely many common transversals, a contradiction. Thus there exists an edge that intersects the plane in a unique point. Hence, the vertex and two open edges admit a unique transversal, and the minimal set contains no other element.

Suppose finally that the set only contains open edges. The characterization of the transversals to a set of line segments [17] shows that either two, three or four of these line segments admit at most two transversals, or that the set of common transversals to all the open line segments can be parameterized by an open set of parameters in \mathbb{R}^2 , \mathbf{R} or $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. In the latter case, the edges admit no isolated transversal, a contradiction. Hence, the minimal set of edges consists of two, three or four edges. (Note that two or three edges may admit an isolated transversal if that transversal contains one or two of the edges.) \square

We can now prove the upper bound of Theorem 42.

Proposition 60. *There are $O(n^2k^2)$ minimal sets of open edges and vertices, chosen from some polytopes, that admit an isolated transversal that is tangent to these polytopes.*

Démonstration. We bound the number of minimal sets depending of their type according to Lemma 59. First, there are $O(n^2)$ pairs of vertices, pairs of edges, and sets of vertex and one edge.

Consider a minimal set of one vertex and two open edges, chosen from some polytopes, that admit an isolated transversal that is tangent to these polytopes. The open edges do not contain the vertex because otherwise they admit no isolated transversal. Thus the vertex and each edge define a plane. For each of the $O(n^2)$ planes defined by a vertex and an open edge not containing it, there are $O(k)$ lines in that plane that are tangent to one of the polytopes at some point other than the vertex. Hence there are $O(n^2k)$ sets of one vertex and two edges, chosen from some polytopes, that admit an isolated transversal that is tangent to these polytopes.

It is straightforward to show that three open edges admit an isolated transversal only if the line containing one of the edges intersects the two other edges. Since any line intersects at most two open edges in any of the k polytopes, there are $O(nk^2)$ sets of three open edges that admit an isolated transversal.

Consider now the case of four edges, chosen from at most three polytopes, that admit an isolated transversal that is tangent to these polytopes. The two edges chosen from the same polytope belong to the same face, and the isolated transversal lies in the plane containing that face. Each of the two other open edges intersects that plane in one point, because otherwise the four open edges admit zero or infinitely many transversals. For each of the $O(n)$ planes containing a face of one of the polytopes, and each of the $O(n)$ edges intersecting that plane in exactly one point, there are at most $2k$ lines in that plane that contain this point and are tangent to one of the k polytopes at some other point. Hence there are $O(n^2k)$ sets of four open edges, chosen from at most three polytopes, that admit an isolated transversal that is tangent to these polytopes.

We finally bound the number of sets of four edges, no two chosen from the same polytope. By Lemma 58 and by summing over all n edges e of the polytopes, the number T of sets of four open edges, chosen from four polytopes, that admits an isolated transversal that is tangent to these four polytopes satisfies

$$T \leq n \sum_{j < l < m} C(n_j + n_l + n_m),$$

where C is some constant. Since each n_i , $1 \leq i \leq k$, appears $\binom{k-1}{2}$ times in the sum, it follows that

$$T \leq C n \sum_{1 \leq i \leq k} n_i \binom{k-1}{2} = C n^2 \binom{k-1}{2}$$

so T is in $O(n^2k^2)$ as claimed. \square

The above result implies the following upper bounds and in particular those of Theorem 40.

Proposition 61. *There are $O(n^2k^2)$ connected components of maximal free line segments tangent to at least four of the polytopes. This bound also holds for connected components of possibly occluded lines tangent to at least four of the polytopes. Furthermore, the same bound holds for isolated such segments or lines.*

Démonstration. We prove the proposition for possibly occluded lines tangent to at least four of the polytopes; the proof is similar for maximal free line segments. By Proposition 60, there are

$O(n^2k^2)$ minimal sets of open edges and vertices, chosen from some polytopes, that admit an isolated transversal that is tangent to these polytopes. The bound on the number of connected components thus follows from the fact that any connected component of lines tangent to four polytopes contains an isolated line. Indeed, any non-isolated line can be moved while keeping the same set of supports until (at the limit) the line intersects a new edge or vertex. During the motion, the line remains tangent to all four polytopes since it keeps the same supports (except at the limit); if the line has more than one degree of freedom, this can be repeated until the line becomes isolated. \square

We now prove the upper bound of Theorem 41. We start by two preliminary lemmas.

Lemma 62. *Four possibly intersecting convex polygons in \mathbb{R}^2 admit at most a constant number of connected components of line transversals.*

Démonstration. Consider the usual geometric transform where a line in \mathbb{R}^2 with equation $y = ax + b$ is mapped to the point $(-a, b)$ in the dual space (see e.g. [85, §8.2.1]). The transversals to a convex polygon are mapped to a region bounded from above by a convex x -monotone curve and from below by a concave x -monotone curve; such a region is called stabbing region, and the curves are referred to as the upper and lower boundaries of the stabbing region. The transversals to four polygons are mapped to the intersection of four stabbing regions. There exists no transversal of a given slope if and only if the lower boundary of a stabbing region lies above the upper boundary of another stabbing region at that slope. Two such boundaries intersect in at most two points, and thus the transversals to four polygons form at most a constant number of connected components of transversals. \square

As in Section 7.2, let \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , and \mathbf{S} be four polytopes in \mathbb{R}^3 , with p , q , r , and $s \geq 1$ edges, respectively, and let e be a closed edge of \mathbf{S} .

Lemma 63. *There are $O(p + q + r)$ connected components of lines intersecting e and tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} .*

Démonstration. As in the proof of Proposition 61, any connected component of lines intersecting e and tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , and \mathbf{S} contains an isolated line. The Main Lemma thus yields that there are $O(p + q + r)$ connected components of lines intersecting e and tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} except for the components that only contain isolated lines that lie in planes that contain e and are tangent to all four polytopes.

We show that there are at most a constant number of connected components of lines intersecting e and tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} that lie in planes that contain e and are tangent to all four polytopes. There may be infinitely many such planes that intersect \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} only on l_e but all the lines tangent to the four polytopes in all these planes belong to the same connected component. Besides these planes there are at most two planes containing e and tangent to all four polytopes. In any such plane, the lines tangent to the four polytopes are the transversals to the four polygons that are the faces, edges, or vertices of \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , and \mathbf{S} lying in the plane. Lemma 62 thus yields the result. \square

We can now prove the upper bound of Theorem 41.

Proposition 64. *Given 3 polytopes with n edges in total and one polytope with m edges, there are $O(mn)$ connected components of lines tangent to the four polytopes.*

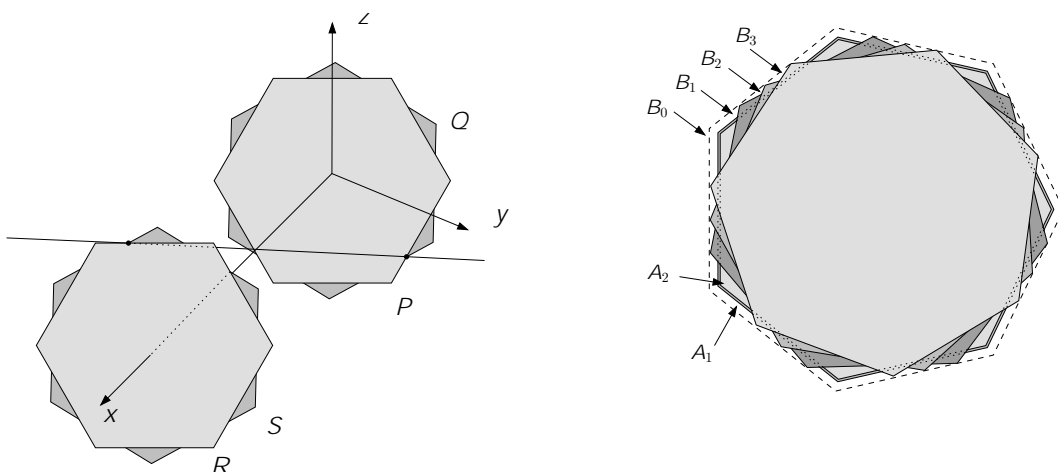


FIG. 7.10. Lower bound examples for Lemmas 65 and 66.

Démonstration. Let \mathbf{S} denote the polytope with m edges. First, if \mathbf{S} consists of a single point, it is straightforward to show that there are $O(n)$ connected components of lines tangent to the four polytopes. Otherwise, by summing over all the edges of \mathbf{S} , Proposition 63 yields that the number of connected components of lines tangent to the four polytopes is $O(mn)$. \square

7.4 Lower bounds

We provide in this section the lower-bound examples needed for Theorems 40, 41, and 42. The following proposition proves the lower bound of Theorem 41.

Lemma 65. *There exist four disjoint polytopes of complexity n such that the number of common tangent lines is finite and $\Omega(n^2)$. There also exist two polytopes of complexity n and two polytopes of complexity m such that the number of common tangent lines is finite and $\Omega(mn)$.*

Démonstration. We consider four planar regular polygons P , Q , R , and S , each with n vertices, embedded in \mathbb{R}^3 . P is centered at the origin and parallel to the yz -plane, Q is obtained from P by a rotation of angle $\frac{\pi}{n}$ about the x -axis, and R and S are obtained from P and Q , respectively, by a translation of length 1 in the positive x -direction (see Figure 7.10). We transform the polygons P and Q into the polytopes \mathbf{P} and \mathbf{Q} by adding a vertex at coordinates $(\varepsilon, 0, 0)$. Similarly, we transform the polygons R and S into the polytopes \mathbf{R} and \mathbf{S} by adding a vertex at coordinates $(1 + \varepsilon, 0, 0)$.

For ε sufficiently small, the lines tangent to \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{S} are the lines through a vertex of $P \cap Q$ and a vertex of $R \cap S$. Since $P \cap Q$ and $R \cap S$ have $2n$ vertices each, there are $4n^2$ tangent lines. Now, moving \mathbf{P} and \mathbf{S} by 2ε in the x direction ensures the disjointness of the polytopes while preserving the existence of the tangents if ε is small enough.

Replacing R and S in the above construction by regular polygons each with m vertices yields the $\Omega(mn)$ lower bound in the case of two polytopes of complexity n and two polytopes of complexity m . \square

We now prove the lower bounds of Theorems 40 and 42. The following proposition directly yields these bounds since the number of isolated tangents to any four of the polytopes is less or

equal to the number of sets of open edges and vertices in at most four polytopes that admit an isolated transversal that is tangent to these polytopes.

Lemma 66. *There exist k disjoint polytopes of total complexity n such that the number of free maximal line segments tangent to four of them is finite and $\Omega(n^2k^2)$. Moreover these segments lie in pairwise distinct lines.*

Démonstration. The lower bound example is similar to the one with four polyhedra. For simplicity suppose that n and k are such that $\frac{n}{k}$ and $\frac{k}{4}$ are integers. We first take a $\frac{n}{k}$ -regular polygon A_1 in the plane $x = 0$. Next we consider a copy, B_0 , of A_1 scaled by a factor of $(1 + \varepsilon)$, and on each edge of B_0 we place $\frac{k}{4}$ points. Polygon B_i , $1 \leq i \leq \frac{k}{4}$, is constructed by taking the i^{th} point on each edge of B_0 . If ε is small enough, the intersection points of A_1 and B_i are outside the other polygons B_j for $1 \leq j \leq \frac{k}{4}$ and $i \neq j$. Now the A_i , for $2 \leq i \leq \frac{k}{4}$, are constructed as copies of A_1 scaled by a factor $1 + \frac{i}{k}\varepsilon$ (see Figure 7.10). For the moment, all polygons lie in plane $x = 0$. We now construct 4 families of $\frac{k}{4}$ polygons each :

- P_i is a copy of A_i translated by $i\varepsilon$ in the negative x direction
- Q_i is a copy of B_i translated by $i\varepsilon$ in the positive x direction
- R_i is a copy of B_i translated by $1 - i\varepsilon$ in the positive x direction
- S_i is a copy of A_i translated by $1 + i\varepsilon$ in the positive x direction

Any choice of four polygons, one in each family P_i , Q_j , R_l and S_m , reproduces the quadratic example of Lemma 65 with polygons of size $\frac{n}{k}$ and thus with total number of tangents larger than $(\frac{k}{4})^4 4 (\frac{n}{k})^2 = \frac{n^2k^2}{4}$. Furthermore the lines tangent to P_i , Q_j , R_l and S_m are only occluded by $P_{i'}$ and $S_{m'}$ for $i' > i$ and $m' > m$, that is, beyond the portion of the tangents containing the contact points. The k polygons can be transformed into k convex polyhedra as in Lemma 65. \square

7.5 Conclusion

We have presented tight bounds on the number of lines and maximal free line segments that are tangent to any four among k possibly intersecting polytopes in arbitrary position. A problem that still remains is to bound the combinatorial complexity of the set of maximal free line segments among k polytopes ; this is equivalent to bounding the size of the three-dimensional visibility complex (see, for instance, [40]). Another problem is to transform our proofs into an algorithm for computing all the maximal free line segments that are tangent to four among k polytopes ;

Chapitre 8

Calcul du squelette de visibilité

Au chapitre 7, nous avons borné la taille du complexe de visibilité de polyèdres au moyen d'un argument de balayage. Nous transformons ici cet outil d'analyse en un algorithme de calcul du squelette de visibilité d'une famille de polyèdres disjoints de \mathbb{R}^3 .

Étant donné k polyèdres disjoints totalisant n arêtes, la complexité de notre algorithme dans le cas le pire est $O(n^2 k^2 \log n)$. Le Théorème 40 établi au Chapitre 7 indique que la taille de sa sortie¹⁸ est dans le cas le pire $\Theta(n^2 k^2)$. Notre algorithme est donc quasi-optimal.

Cet algorithme est robuste puisque nous en traitons explicitement les dégénérescences. En outre, il est suffisamment simple pour que son implantation soit envisageable et peut être étendu à des polyèdres non convexes s'intersectant.

8.1 Principe de l'algorithme

Nous considérons tour à tour chaque arête e de la scène et calculons les éléments du squelette 3D qu'elle engendre. Pour cela, nous balayons l'espace par un plan tournant autour de e , l'*arête de référence*. Ce plan intersecte la scène en une collection de polygones dont nous suivons les droites bitangentes. Un sommet ou arc du squelette 3D apparaît dans le plan de balayage comme un segment libre maximal qui intersecte e et contient une ou plusieurs bitangentes (voir Figure 8.1).

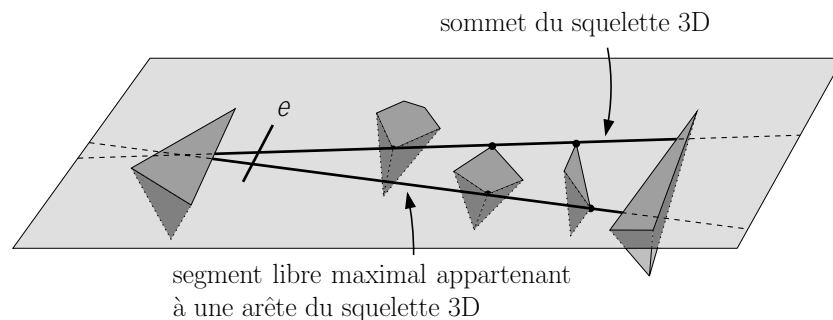


FIG. 8.1. Sommet et arête du squelette 3D apparaissant dans un plan de balayage.

¹⁸La complexité du squelette de visibilité est bornée par son nombre de sommets, lui-même borné par le théorème 40.

Dans le plan de balayage, entre leur apparition et leur disparition, les polygones se déforiment continûment. Par conséquent, les bitangentes à ces polygones évoluent elles-aussi continûment et leurs propriétés combinatoires ne changent qu'à certaines positions particulières du plan de balayage.

Au chapitre 7 nous avons borné le nombre de droites tangentes à trois polygones apparaissant dans le plan de balayage. Nous n'avons pas tenu compte du fait qu'une telle droite puisse ne pas contenir de segment *libre* tangent à ces trois polygones en raison d'occultations dues à d'autres polygones. Par ailleurs, nous n'avons pas restreint notre compte aux seules droites intersectant e , condition *sine qua none* pour définir un élément du squelette engendré par e . Cette simplification n'est plus possible pour calculer le squelette de visibilité faute de quoi nous en obtiendrions un sur-ensemble. Vérifier *a posteriori* qu'une droite tritangente d'un plan de balayage correspond effectivement à un sommet du squelette de visibilité 3D semble coûteux : il s'agit de déterminer si le segment correspondant intersecte une collection de polytopes. Pour garantir que les tritangentes contiennent bien un segment libre tritangent, nous ne maintenons que les segments bitangents libres du plan de balayage. De plus, pour détecter parmi ces tritangentes celles contenues dans un segment libre maximal *intersectant* e nous maintenons cette information pour chaque bitangente. Ainsi, nous détectons parmi les droites tangentes à deux ou trois polygones dans le plan de balayage celles qui correspondent à des sommets ou des arcs du squelette 3D.

Notre approche revient à maintenir le squelette de visibilité des polygones du plan de balayage. En effet, les sommets de ce squelette sont les bitangentes libres et ses arcs connectent les paires de bitangentes susceptibles de fusionner en une tritangente (nous le verrons en section 8.4.2).

Un élément du squelette 3D, sommet ou arc, a plusieurs générateurs et est donc susceptible d'être détecté dans plusieurs balayages. Les éléments que nous calculons lors du balayage autour d'une arête e sont les arcs du squelette qui ont l'*arête ouverte* e comme générateur et les sommets de ces arcs.

Comme les éléments du squelette 3D calculés dans un balayage correspondent à des segments tangents au polytope supportant l'arête de référence, on limite le plan de balayage aux seuls plans tangents à ce polytope (voir figure 8.2).

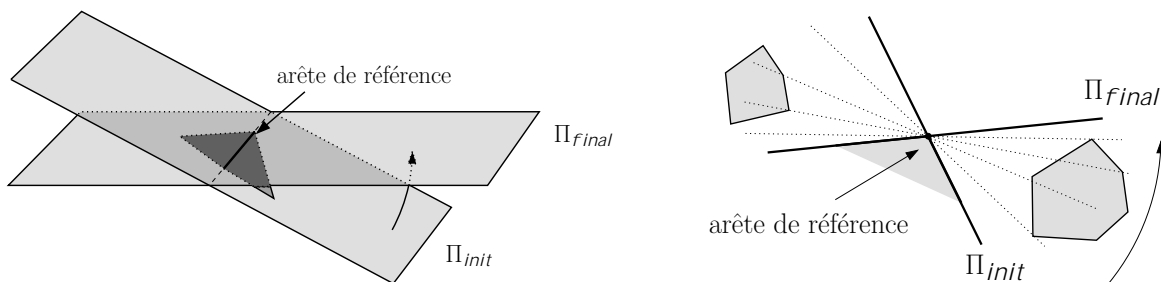


FIG. 8.2. Un balayage s'effectue entre les plans supportant les faces incidentes à l'arête de référence.

Dans les sections suivantes nous explicitons notre algorithme pour des polytopes disjoints en position générique (sections 8.2 à 8.5) puis examinons les dégénérescences écartées au premier abord (section 8.6). Nous analysons ensuite sa complexité (section 8.7) et discutons enfin ses extensions (section 8.8).

8.2 Préliminaires

Avant de présenter notre algorithme, nous précisons la terminologie que nous utilisons, et définissons les hypothèses de position générique dont nous nous servons pour simplifier la présentation. Nous clarifions ensuite notre représentation des squelettes 2D et 3D, et terminons ce préambule en traitant la question de la reconnaissance des éléments du squelette 3D déjà existants.

8.2.1 Terminologie

Nous renvoyons à la section 4.5 pour la définition des termes suivants : *polytope*, *arête ouverte*, *segment libre maximal*, segment libre maximal *tangent* à un polytope, *générateur* d'une droite ou d'un segment libre maximal, *complexe de visibilité 2D* et *squelette de visibilité 3D*.

Rappelons qu'un générateur d'un arc ou d'un sommet du squelette 3D est soit une arête ouverte, soit un sommet d'un polytope. Un sommet ou un arc engendré par e a donc l'arête ouverte de balayage comme support.

Afin d'éviter toute confusion entre arêtes de polytopes, polygones ou squelette de visibilité, nous réservons le terme *arête* pour les objets géométriques, arête de polytope ou polygone, et utilisons le terme *arc* pour désigner un élément 1D d'un squelette de visibilité.

Les plans de balayages sont notés Π_t , t variant dans un intervalle $[init, final]$ de \mathbb{R} . Les plans Π_{init} et Π_{final} sont donc les plans supportant les faces incidentes à l'arête de référence. Cette représentation n'est qu'une manière de désigner les différentes positions du plan de balayage, aussi nous ne précisons pas comment un tel intervalle est choisi.

Une *bitangente* est un segment libre (pour la collection de polytope en tant que segment de l'espace) qui est tangent à deux objets et ayant ses extrémités sur ces deux objets. Une bitangente n'est donc pas nécessairement maximale. De manière similaire, une *tritangente* est un segment libre tangent à trois objets ayant ses extrémités sur deux d'entre eux. Une *droite bitangente* (resp. *tritangente*) désigne la droite support d'une bitangente (resp. tritangente).

Une bitangente *voit* une arête (resp. un sommet) si et seulement si le segment libre maximal (en 3D) contenant cette bitangente intersecte l'arête ouverte (resp. le sommet) en question. Un segment libre maximal *voit* un objet s'il s'appuie dessus. Une bitangente qui voit l'arête de référence est dite *active*. L'*activité* d'une bitangente est la propriété qu'elle soit active ou non.

Le plan de balayage intersecte les polytopes en une collection de polygones convexes disjoints. Le *squelette de visibilité 2D* de ces polygones est le graphe des sommets et arcs de leur complexe de visibilité. Ses sommets sont donc les bitangentes contenues dans le plan et ses arcs connectent les paires de bitangentes qui apparaissent consécutivement autour d'un polygone.

Un *plan critique* est une position du plan de balayage à laquelle la combinatoire du squelette 2D subit une transformation ou à laquelle l'activité, un support ou les objets vus par une bitangente change. Un *événement* du balayage est le passage du plan de balayage par un plan critique associé à un changement particulier. Ainsi, plusieurs événements peuvent se produire dans un même plan critique.

8.2.2 Position générique

Pour simplifier la présentation de notre algorithme, nous le décrivons dans un premier temps en supposant les objets en *position générique*. Les dégénérescences exclues au premier abord sont traitées en section 8.6, une fois le principe de l'algorithme expliqué.

Nos hypothèses de position générique sont au nombre de trois. Nous supposons tout d'abord que deux événements se produisent toujours dans des plans critiques distincts. Ensuite, deux arêtes issues de polytopes distincts sont supposées non coplanaires. Enfin, l'ensemble des droites intersectant k arêtes ouvertes issues d'objets distincts est supposée soit vide, soit de dimension $4-k$. Cette dernière condition ajoute aux configurations proscrites celles comportant 4 segments, issus d'objets distincts, appartenant à un même ensemble de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe ou d'un parabololoïde de révolution.

8.2.3 Squelettes de visibilité

Nous précisons ici la manière dont nous représentons les squelettes de visibilité 2D et 3D.

Squelette 2D. Nous représentons un sommet d'un squelette 2D par les champs suivants.

Supports : les générateurs du segment libre maximal associé au sommet du squelette.

Incidences : des pointeurs vers les arcs incidents.

Active : un booléen indiquant si la bitangente est active.

Objets vus : les objets vus par le segment libre maximal correspondant au sommet.

Événements : des pointeurs vers les événements induits par cette bitangente.

Un arc est une paire de pointeurs vers les sommets qui lui sont incidents.

Squelette 3D. Remarquons tout d'abord qu'il peut exister plusieurs droites intersectant une famille de générateurs, par exemple s'il s'agit de 4 arêtes [18]. En fait, chaque générateur définit une surface dans l'espace des droites et ces surfaces s'intersectent en un nombre fini de points si les objets sont en position générique. Dans le cas où les générateurs sont des droites et des points, ces surfaces s'expriment algébriquement dans l'espace de Plücker (il s'agit en fait de l'intersection d'hyperplans avec la quadrique de Plücker). Une approche classique pour distinguer les solutions d'un système algébrique de codimension 0 est d'utiliser des intervalles d'isolation : on décrit le point comme l'unique solution du système algébrique dans un intervalle donné. Dans notre cas le système porte sur plusieurs indéterminées (les paramètres de la droite, par exemple ses coordonnées de Plücker), aussi nous parlons plutôt de *boîte englobante*.

Nous représentons un sommet d'un squelette 3D par les champs suivant :

Générateurs : les sommets et arêtes 3D qui l'engendrent.

Boîte englobante : une boîte englobante isolant la droite quadritangente parmi celles qui percent les générateurs.

Incidences : des pointeurs vers les arcs incidents.

Objets vus : les objets vus par le segment libre maximal correspondant au sommet.

Un arc est simplement une paire de pointeurs vers les sommets incidents.

8.2.4 Reconnaissance des éléments déjà créés

Un sommet ou un arc du squelette de visibilité 3D peut être détecté au cours de plusieurs balayages. Il faut donc, avant de créer un nouvel élément du squelette, nous assurer qu'il n'existe pas déjà, et si possible efficacement. Une approche courante pour ce type de problème consiste à définir un ordre total sur les éléments du squelette. On peut alors les organiser en une liste triée dans laquelle on peut faire une recherche (dichotomique) en temps logarithmique. La solution

que nous proposons, basée sur cette méthode, n'est pas *a priori* la plus efficace en pratique, mais a le mérite d'être simple et systématique.

Un sommet du squelette 3D est représenté exactement par ses générateurs et une boîte englobante. Il nous suffit donc de définir un ordre total sur ces données pour pouvoir stocker les sommets déjà construits dans une liste triée. Comme le nombre de sommets du squelette est $O(n^4)$, une recherche dans cet ensemble trié peut s'effectuer en temps $O(\log n)$.

Un arc est, lui, représenté par ses deux sommets incidents. Deux arcs ne peuvent pas être incidents aux deux mêmes sommets, aussi ce couple de sommets caractérise un arc.

Lemme 67. *Tout segment libre maximal engendré par e est contenu dans un plan de balayage.*

Démonstration. Un segment libre maximal engendré par e est tangent en l'arête ouverte e à son polytope. Il est donc contenu dans un des plans de balayage. \square

Cette propriété garantit donc que les arcs du squelette 3D engendrés par e sont balayés. Par continuité, les sommets de tels arcs apparaissent eux aussi dans un plan de balayage.

Nous allons donc stocker les arcs du squelette 3D dans une liste triée selon l'ordre des couples de sommets (en ordonnant les couples). Un arc du squelette 3D est stocké dans une structure temporaire tant que ses deux sommets n'ont pas été balayés. Déterminer si un arc existe déjà revient alors à une recherche dans une liste triée. Comme le nombre d'arcs du complexe est au plus $O(n^4)$, cette recherche se fait elle aussi en temps $O(\log n)$.

Lemme 68. *Tester si un élément du squelette 3D a déjà été calculé peut être fait en temps $O(\log n)$.*

8.3 Le plan initial

Nous expliquons maintenant comment initialiser un balayage, c'est à dire calculer le squelette 2D dans le plan Π_{init} et détecter les éléments du squelette 3D qu'il contient. Nous considérons le plan initial comme un plan critique, et supposons donc qu'il ne s'y produit aucun autre événement.

8.3.1 Calcul du squelette 2D

Le calcul du squelette de visibilité 2D dans le plan initial peut être effectué au moyen d'un des algorithmes existants pour le calcul du complexe 2D (voir l'état de l'art à ce propos en section 5.1). Ces méthodes prennent un temps $O(n \log n + |\mathcal{B}|)$ où $|\mathcal{B}|$ est le nombre de bitangentes. Ce calcul initial s'effectue donc en temps $O(n \log n + k^2)$.

Notons toutefois que l'algorithme de Pocchiola et Vegter, le seul dont une implantation soit disponible (cf chapitre 3), ne calcule pas les objets vus par les bitangentes¹⁹. Ce calcul peut être fait naïvement en lançant des rayons par une méthode simple (tester chaque arête de polygone à tour de rôle). Puisqu'il y a au plus k^2 bitangentes et $O(n)$ arêtes dans le plan initial, ce calcul supplémentaire est fait en temps $O(nk^2)$.

La dernière étape consiste à créer les événements pouvant apparaître dans le balayage.

¹⁹Il ne nous semble d'ailleurs pas évident que le calcul de ces informations puisse être fait dans l'algorithme de Pocchiola et Vegter sans augmenter sa complexité. La question de savoir si le complexe de visibilité 2D doit, par définition, encoder cette information nous semble intéressante.

8.3.2 Les éléments du squelette 3D apparaissant dans le plan initial

Après avoir calculé le squelette 2D du plan initial, nous devons déterminer les éléments du squelette 3D engendrés par e qui y apparaissent.

Lemme 69. *Il n'y a aucun arc du squelette 3D à reporter dans le plan initial.*

Démonstration. Tout segment libre maximal qui coupe l'arête ouverte de référence dans le plan de balayage coupe une autre arête de sa face incidente contenue dans ce plan. Par ailleurs, tout segment libre maximal qui coupe l'arête ouverte et une autre des arêtes de sa face incidente contenue dans le plan de balayage y est contenu. Comme tous les segments libres maximaux d'un arc ont les mêmes générateurs, tout arc ayant l'arête ouverte de référence comme générateur est soit contenu dans le plan de balayage initial, soit ne le rencontre pas.

Montrons, par l'absurde, qu'il n'existe aucun arc du squelette 3D engendré par e et contenu dans le plan initial. Soit A un tel arc. Comme les objets sont en position générique, le ce plan ne contient aucun sommet extrémal de polytope (qui induirait un événement). Par conséquent, A est de type E3. Notons e_2 et e_3 deux autres de ses générateurs, des arêtes ouvertes donc, sur d'autres polytopes. Observons que le plan initial contient une face incidente à e . Il s'en suit que si un segment libre maximal coupe l'arête ouverte e dans le plan initial, alors il coupe aussi une arête e' distincte de e appartenant à cette face.

Aucune des arêtes e_2 et e_3 n'est contenue dans le plan initial. A est donc réduit à au plus 4 segments libres maximaux et n'est pas un arc. \square

Lemme 70. *Les sommets du squelette 3D à reporter dans le plan initial sont les segments libres maximaux contenant une bitangente qui soit est active, soit voit une extrémité de e .*

Démonstration. Soit A un arc du squelette 3D engendré par e . Si A est de type EV alors il est entièrement contenu dans le plan défini par ses deux générateurs et, par continuité, ses sommets aussi. Ce plan ne peut être le plan initial sans quoi deux événements sont simultanés (le début du balayage et l'apparition ou la disparition d'un polytope). Les seuls sommets du squelette 3D à reporter sont donc ceux incidents à un arc engendré par e et de type E3.

Supposons que A est de type E3 et notons e_2 et e_3 deux autres de ses générateurs, des arêtes ouvertes. Observons que le plan initial contient une face incidente à e . Il s'en suit que si un segment libre maximal coupe l'arête ouverte e dans le plan initial, alors il coupe aussi une arête e' distincte de e appartenant à cette face. Enfin, notons que A contient une bitangente en e_2 et e_3 à deux polygones du plan initial. Ce plan ne peut donc contenir de sommet de e_2 ou e_3 qui y induirait un événement.

Finalement, les générateurs d'un sommet incident à A contiennent soit $\{e, e', e_2, e_3\}$, soit $\{v, e_2, e_3\}$ où v est un sommet de l'arête e . La bitangente en e_2 et e_3 est active dans le premier cas, et voit v dans le second. \square

Nous créons au plus un sommet du squelette 3D par bitangente du squelette 2D, soit $O(k^2)$ au total.

8.4 Les événements

À la section 8.2, nous avons défini un plan critique comme un plan de balayage où le squelette 2D de la section change, que ce soit sa combinatoire ou les caractéristiques d'une bitangente (support ou activité). Ces événements nous permettent de détecter tous les sommets du squelette 3D annoncés.

Lemme 71. *Tout sommet du squelette 3D incident à un arc engendré par e est associé à un segment libre maximal contenu dans un plan critique et contenant une bitangente changeant dans ce plan critique.*

Démonstration. Lors du balayage, un arc du squelette 3D engendré par e apparaît comme un segment libre maximal contenant une bitangente active (si c'est un E3) ou comme un ensemble de segments libres maximaux passant par e et un sommet extrémal d'un polytope (si c'est un EV).

Dans le premier cas, l'arc s'interrompt uniquement si la bitangente change de support, cesse de voir e ou fusionne en une tritangente. Le segment libre maximal associé au sommet correspondant est donc bien contenu dans un plan critique et contient effectivement une bitangente qui y change.

Dans le second cas, le plan correspond à l'apparition ou à la disparition d'un polytope, et est donc critique. Les extrémités de l'arc contiennent soit des bitangentes actives apparaissant ou disparaissant dans ce plan, soit des bitangentes entre le sommet et e (que nous prenons en compte afin de maintenir l'activité des bitangentes, cf. les R-events). \square

Comme les arcs engendrés par e sont complètement balayés (cf. lemme 67), il nous suffit de détecter leurs sommets. Ainsi, les événements que nous avons définis nous permettent de calculer tous les sommets du squelette 3D annoncés.

Dans cette section, nous passons en revue les différents types d'événements en signalant, pour chacun d'entre eux, comment le détecter et comment le traiter. Traiter un événement inclue la mise-à-jour du squelette 2D et la création de éléments du squelette 3D qui lui sont associés. Nous commençons cependant par décrire notre file d'événements.

8.4.1 La file d'événements

Un événement est représenté par la position du plan de balayage qui le contient et diverses informations relatives à son traitement (type d'événement, bitangentes concernées, etc...). Les événements prévus sont placés dans une liste triée par ordre d'apparition au cours du balayage. Cela suppose de pouvoir comparer deux plans pour cet ordre.

Les plans que nous comparons sont tous tangents en l'arête de référence à son polytope. Nous calculons pour chaque plan Π_t son vecteur normal unitaire \vec{n}_t orienté vers le demi-espace qui ne contient pas le polytope.

Comme tout vecteur \vec{n}_t fait un angle d'au plus π avec \vec{n}_{init} , nous pouvons comparer les positions des plans via les produits scalaires de leurs normales avec \vec{n}_{init} :

$$\Pi_t \text{ apparaît avant } \Pi_{t'} \iff (\vec{n}_t \cdot \vec{n}_{init}) > (\vec{n}_{t'} \cdot \vec{n}_{init})$$

En pratique, les plans sont décrits géométriquement au moyen de l'arête de référence et soit un sommet d'un polytope, soit une droite tritangente. L'utilisation des normales pour les comparer peut donc se faire sans problème, même si le degré des prédicats risque d'être élevé.

Dans la suite de ce chapitre, nous appelons l'ordre que nous venons de définir l'*ordre de balayage*.

8.4.2 Changement combinatoire dans le squelette

La structure du squelette 2D évolue à trois occasions :

- (i) quand le plan de balayage commence à intersecter un objet, i.e. un polygone apparaît,
- (ii) quand le plan de balayage cesse d'intersecter un objet, i.e. un polygone disparaît,

(iii) quand deux sommets du squelette 2D fusionnent, i.e. une tritangente apparaît.

Nous définissons donc trois types d'événements liés à un changement structurel du squelette 2D : (i) V-event initial, (ii) V-event terminal et (iii) T-event.

Apparition d'un polygone (V-event initial)

Nature. Un V-event initial est une position à laquelle le plan de balayage commence à intersecter un polytope (cf. figure 8.3). Le plan du V-event initial est donc tangent au polytope en question. Si la tangence se fait selon une arête ou une face, deux segments issus d'objets distincts sont coplanaires. Notre hypothèse de généricité garantit donc que le nouveau polygone apparaît comme un point dans le plan de balayage.

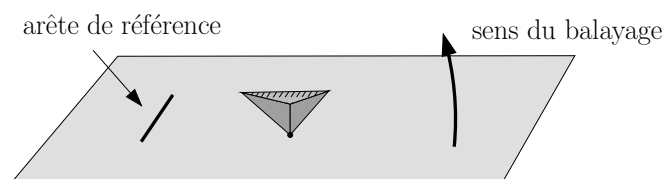


FIG. 8.3. Un V-event initial.

Détection. Tous les V-events initiaux apparaissant dans un balayage sont pré-calculés avant son commencement, ce qui peut se faire de manière simple en temps $O(n)$. D'autres techniques plus efficaces sont envisageables, par exemple une marche sur le polytope, mais cela n'a aucun impact sur la complexité théorique de l'algorithme.

Traitement. Considérons un V-event initial Π_{t_0} où le plan de balayage devient tangent à un polytope P en un de ses sommets v . Dans le plan Π_{t_0} , plusieurs bitangentes libres apparaissent entre v et les autres polygones. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le plan $\Pi_{t_0+\epsilon}$ intersecte P en un polygone $P(\epsilon)$ d'intérieur non vide ; ce polygone a la même structure que l'étoile de P en v .

En supposant que deux événements du balayage se produisent à des positions différentes, ce qui est discuté section 8.6.1, il existe une valeur de $\epsilon > 0$ telle que l'intervalle $]t_0, t_0 + \epsilon]$ ne contienne aucun événements. Supposons que ϵ est une telle valeur. Chaque bitangente b entre v et un polygone de Π_{t_0} se divise en deux bitangentes libres tangentes à $P(\epsilon)$ et de générateurs différents (cf. figure 8.4). Notons ces arêtes $b^+(\epsilon)$ et $b^-(\epsilon)$.

Soit b une bitangente du plan Π_{t_0} s'appuyant sur v et sur un polygone autre que l'arête de référence. Si b voit l'arête de référence, alors c'est aussi le cas de $b^+(\epsilon)$ et $b^-(\epsilon)$. Ces deux bitangentes correspondent donc à des arcs du squelette 3D, et b correspond à un sommet qui leur est incident. Notons que si b voit un sommet de l'arête de référence, alors on est dans le cas d'événements simultanés, un V-event initial et un T-event (cf. section 8.6.1).

Déterminer explicitement une telle valeur ϵ est délicat, puisqu'immédiatement après le passage par le V-event initial les nouvelles bitangentes créent des événements qu'il faudrait prendre en compte. Cependant, la définition des bitangentes $b^+(\epsilon)$ et $b^-(\epsilon)$ ne dépend pas d'une quelconque valeur de ϵ , mais de la combinatoire dans le plan Π_t pour t dans un voisinage à droite de t_0 . Nous effectuons donc nos calculs pour déterminer cette combinatoire sans avoir recours à une valeur particulière de ϵ .

Nous traitons un V-event initial en quatre étapes.

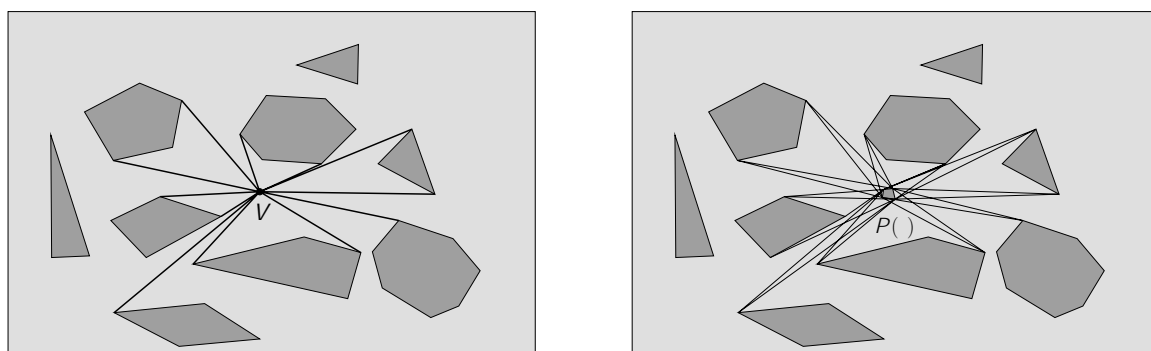


FIG. 8.4. Un V-event initial crée de nouvelles bitangentes entre le point et les polygones (à gauche). Juste après le V-event initial, les bitangentes se répartissent entre les arêtes incidentes au sommet (à droite).

1. Nous calculons les bitangentes libres entre le sommet v et les autres polygones (dont l'arête de référence), suivant une méthode décrite en section 8.5.
2. Nous créons les sommet du squelette 3D pour les nouvelles bitangentes qui voient l'arête de référence.

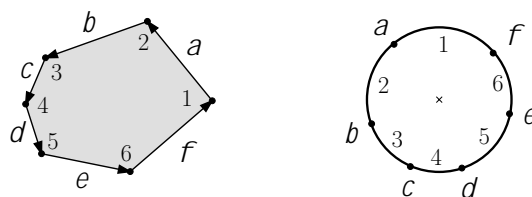


FIG. 8.5. La subdivision du cercle des directions associée à un polygone convexe.

3. Nous séparons les nouvelles bitangentes pour obtenir le squelette 2D dans le plan $\Pi_{t_0+\epsilon}$. Pour cela, considérons un polygone convexe dont on a orienté le bord dans le sens trigonométrique (par exemple). Les directions des cotés subdivisent le cercle des directions en arcs (cf. figure 8.5). Comme les bords d'un arc sont les directions de cotés consécutifs du polygone, chaque arc est naturellement associé à un sommet du polygone. La subdivision du cercle des directions obtenue est donc duale au polygone.

Pour déterminer sur quel sommet 2D s'appuie une droite ℓ , il suffit de l'orienter en $\vec{\ell}$ de façon à ce qu'elle laisse l'objet à sa gauche (si le polygone a été orienté dans le sens trigonométrique). Le sommet du polygone associé à la région du cercle qui contient la direction de $\vec{\ell}$ est celui qui supporte ℓ (cf. figure 8.6).

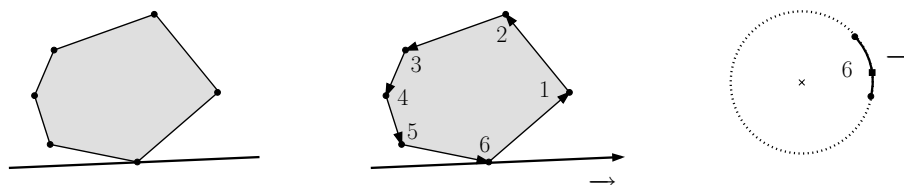


FIG. 8.6. Recherche du support d'une bitangente sur un polygone au moyen de son dual.

La direction d'un côté C de $P(\epsilon)$ au voisinage à droite de $\epsilon = 0$ s'obtient comme la direction, dans Π_{t_0} , de la trace du plan de la face support de C . Nous pouvons ainsi construire le dual de $P(\epsilon)$ pour $\epsilon > 0$ arbitrairement proche de 0. Nous dupliquons ensuite chacune des bitangentes du plan Π_{t_0} issues de v en deux droites d'orientations opposées, puis nous trions la collection de droites orientées obtenue (ce tri étant en fait une simple concaténation des ordres sur les droites non-orientées). Nous terminons cette étape en localisant la direction de chacune de ces droites sur le cercle des directions, ce qui revient, après localisation de la première direction, à un parcours en parallèle de deux listes triées.

4. Nous créons les arcs du squelette 3D pour les bitangentes issues de bitangentes de Π_{t_0} voyant e , et les connectons au sommet du squelette correspondant (ce sont des arcs de type VE).

Par conséquent, la séparation des bitangentes se fait en temps $O(d + k)$ où d est le degré du sommet qui déclenche le V-event initial. Le nombre d'éléments du squelette 3D créés est borné pour chaque nouvelle bitangente, soit $O(k)$ au total.

Disparition d'un polygone (V-event terminal)

Nature. Un V-event terminal est une position à laquelle le plan de balayage est tangent à un objet déjà balayé. Le plan cesse alors d'intersecter l'objet en question et un polygone disparaît de la section (cf. figure 8.7).

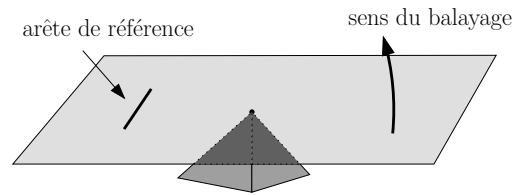


FIG. 8.7. Un V-event terminal.

Détection. Les V-events terminaux sont détectés en même temps que les V-events initiaux, avant le début du balayage.

Traitement. Traiter un V-event terminal revient à supprimer du squelette 2D la partie qu'il engendre. Pour chaque bitangente active, l'arc du squelette 3D correspondant est terminé par un sommet. Les bitangentes actives s'organisent par paires, de manière symétrique à la situation d'un V-event initial, chaque paire partageant un sommet.

Pré-calculer les V-events terminaux n'est en fait pas nécessaire : ils apparaissent naturellement comme des événements calculés en ligne (T-events et V-events, cf. section 8.4.3). Il s'avère d'ailleurs moins coûteux, globalement, de ne pas les pré-calculer. Observons enfin que le nombre d'éléments à ajouter au squelette 3D est borné par le nombre de bitangentes qui disparaissent, soit $O(k)$ au total.

Fusion de deux bitangentes (T-event)

Nature. Un T-event se produit lorsque deux bitangentes deviennent alignées en donnant lieu à une tritangente (cf. figure 8.8).

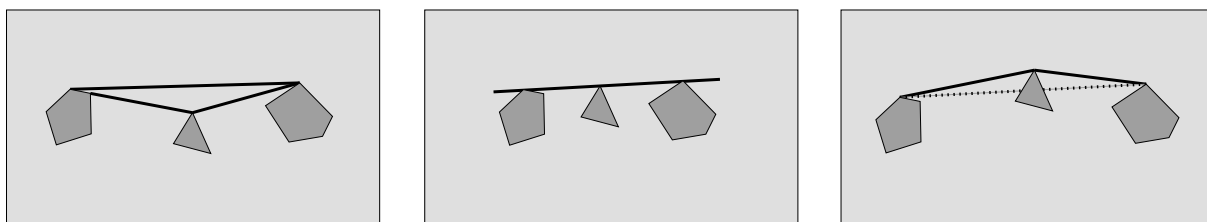


FIG. 8.8. Un exemple de T-event.

Deux bitangentes peuvent toutefois devenir alignées sans former de tritangente (*cf.* figure 8.9). Immédiatement avant de fusionner en une tritangente, deux bitangentes doivent être consécutives autour d'un support qu'elles ont en commun. A tout moment dans le balayage, les seules paires de bitangentes susceptibles de fusionner en une tritangente sont donc celles qui sont connectées par un arc dans le squelette 2D.

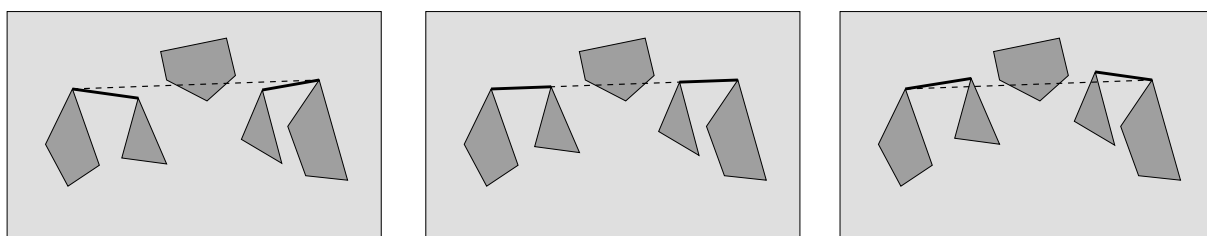


FIG. 8.9. Deux bitangentes qui deviennent alignées sans générer de T-event.

Il existe deux types de T-event, suivant que 2 ou 3 bitangentes deviennent alignées. Ces deux types apparaissent sur la figure 8.8 en considérant les trois situations de gauche à droite (fusion de 3 bitangentes libres) ou de droite à gauche (fusion de 2 bitangentes libres).

Détection. Ces événements sont détectés au cours du balayage. Pour chaque arc du squelette 2D, on considère l'ensemble constitué de l'arête de référence et des arêtes 3D qui engendrent les bitangentes incidentes à cet arc. L'ensemble obtenu contient au moins 4 segments et notre hypothèse de position générique assure qu'au plus 4 droites les intersectent tous. Les plans Π_t contenant ces droites sont les T-events associés à l'arc considéré. Lorsqu'une droite perçante passe par un sommet commun à deux des arêtes support, il faut tester si le T-event associé est également un V-event terminal et traiter l'événement en fonction.

Si une bitangente disparaît ou change d'arêtes support, alors les T-events qu'elle contribue à définir et qui n'ont pas encore été traités doivent être supprimés ou réactualisés. Aussi, en créant un T-event, nous établissons un lien entre les bitangentes qui fusionnent et le T-event placé dans la liste d'événements.

Le plan correspondant au T-event est donné via la droite perçant la famille d'arêtes support. Cette droite est spécifiée exactement par les différents segments de la famille et un intervalle d'isolation.

Traitement. Un T-event demande de mettre-à-jour le squelette 2D (*cf.* figure 8.10). Si certaines des bitangentes qui fusionnent voient l'arête de référence, il faut créer un sommet du squelette 3D pour la tritangente puis terminer et créer une ou plusieurs des arêtes du squelette 3D.

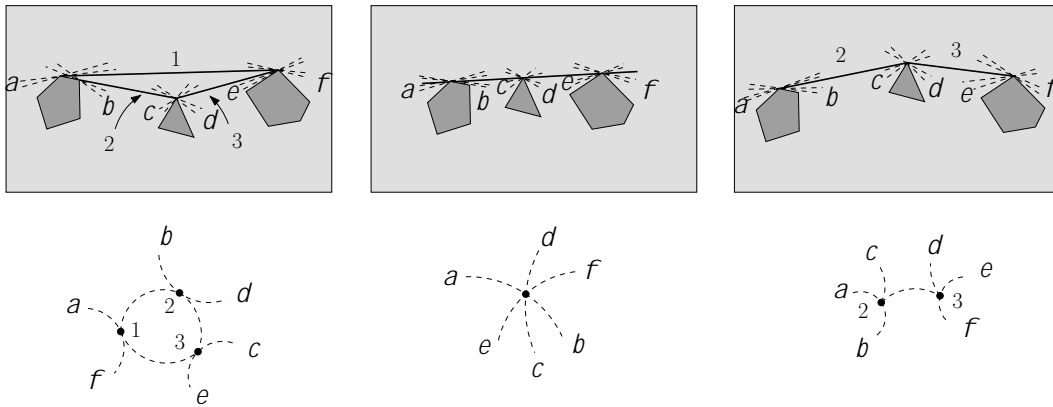


FIG. 8.10. Mise-à-jour du squelette 2D au passage par un T-event : les arcs a, \dots, f incidents aux bitangentes avant la fusion se redistribuent entre les bitangentes après la fusion. Les ensembles de droites pointillées représentent les arcs du squelette 2D incidents aux bitangentes.

Considérons un T-event dans lequel un ensemble \mathcal{F} de bitangentes fusionnent. Si les objets sont en position générique alors $|\mathcal{F}| = 2$ ou 3 , deux cas qui se traitent différemment.

Si $|\mathcal{F}| = 3$, nous déterminons tout d'abord la bitangente qui disparaît : c'est celle dont les supports réalisent les points de contact extrémaux de la tritangente. Des 4 arcs du squelette incidents à ce sommet, deux disparaissent (ceux qui la relient aux deux autres bitangentes de \mathcal{F}) et les deux autres sont raccrochées aux bitangentes issues de la fusion. Pour mettre-à-jour l'information «être active» nous distinguons deux cas. Si aucune des bitangentes de \mathcal{F} ne voit e , alors aucune des 2 bitangentes issues de la fusion ne voit e . Si au moins 2 des bitangentes de \mathcal{F} voient e , alors les 2 bitangentes issues de la fusion voient e . Les objets vus par les deux bitangentes obtenues après la fusion doivent eux aussi être mis-à-jour.

Si $|\mathcal{F}| = 2$ une bitangente libre est créée entre les supports que celles de \mathcal{F} n'ont pas en commun. Cette bitangente est connectée à celles de \mathcal{F} , et récupère un arc de chacune d'entre elles. Pour mettre-à-jour l'activité nous distinguons deux cas. Soit aucune des bitangentes de \mathcal{F} ne voit l'arête de référence, et alors il en va de même pour les trois bitangentes issues de la fusion. Soit les deux bitangentes de \mathcal{F} voient l'arête de référence et alors la nouvelle bitangente voit l'arête e . Si cette nouvelle bitangente intersecte e alors les deux autres bitangentes continuent à voir e . Sinon, alors seule la bitangente incidente au sommet le plus proche de e la voit.

8.4.3 Évolution d'une bitangente

Les caractéristiques d'une bitangente sont ses générateurs, les objets qu'elle voit et le fait qu'elle voit l'arête de référence ou non. Nous définissons des événements de façons à prendre en compte les changements dans ces informations pour toute bitangente.

Les supports d'une bitangente peuvent changer à deux occasions : quand le plan de balayage passe par un sommet incident à l'un d'entre eux (l'arête 3D correspondante cesse d'être balayée) ou quand la bitangente tourne autour d'un des polygones auxquels elle est tangente (cf. figure 8.13). Nous nommons un événement du premier type un *V-event*, et un événement du second type un *F-event*.

Nous signalons un changement dans la visibilité entre une bitangente et l'arête de référence par un événement de type *R-event*.

Dans la mesure où les objets vus par une bitangente ne changent que si elle devient tangente à

un troisième objet, ces changements sont pris en compte par les T-events définis précédemment.

Fin d'une arête support (V-event)

Nature. Un V-event a lieu lorsque le plan de balayage passe par un sommet incident à une arête support d'une bitangente (cf. figure 8.11).

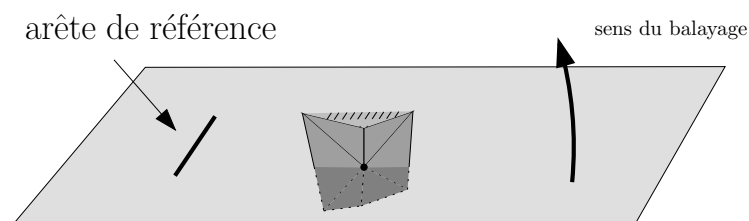


FIG. 8.11. Un exemple de V-event.

Détection. Pour chaque bitangente, on introduit les V-events associés aux extrémités de ses support. Ces événements peuvent être des V-events extrémaux ou de simples V-events, ce qu'il nous faut détecter.

Traitement. Au passage par un sommet 3D, le plan de balayage cesse d'intersecter certaines d'arêtes pour en intersecter de nouvelles. Au V-event, les sommets 2D correspondant à l'ensemble \mathcal{F}_d des arêtes qui cessent d'être intersectées fusionnent avant de se diviser ensuite en sommets associés aux arêtes qui commencent à être intersectées, qui constituent l'ensemble \mathcal{F}_a . Les bitangentes s'appuyant sur une arête de \mathcal{F}_d changent donc de support au passage du V-event, leur nouveau support étant une arête de \mathcal{F}_a . Le traitement d'un V-event consiste à opérer ces changements de support (cf. figure 8.12). De plus, pour chacune des bitangentes concernées qui voit l'arête de référence nous devons terminer l'arête du squelette 3D correspondant par un sommet VEE, puis créer une nouvelle arête du squelette 3D après le changement de support.

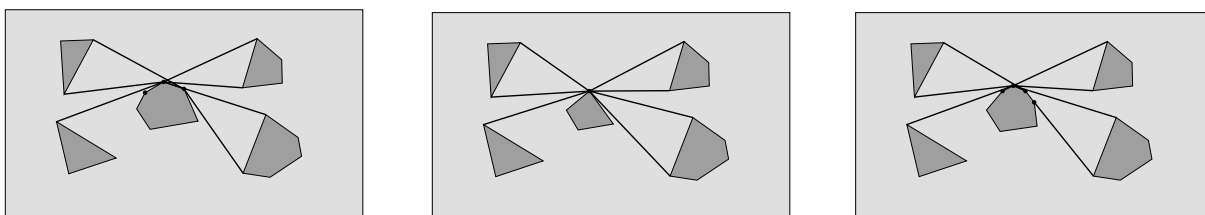


FIG. 8.12. Traitement d'un V-event : des sommets 2D fusionnent (ici $|\mathcal{F}_d| = 3$) puis le sommet obtenu dans le plan du V-event se sépare en plusieurs nouveaux sommets (ici $|\mathcal{F}_a| = 4$). Les bitangentes qui s'appuyaient sur les sommets disparus se répartissent entre les nouveaux sommets.

Changement d'arête support (F-event)

Nature. Un F-event traduit le fait qu'une bitangente "roule" autour d'un polygone dans le plan de balayage, auquel cas l'arête 3D qui la supporte change (cf. figure 8.13).

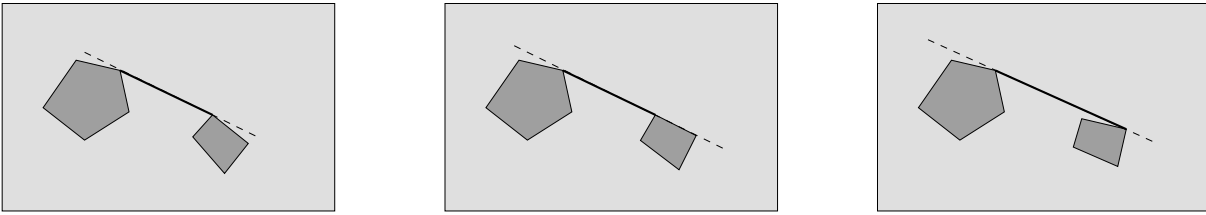


FIG. 8.13. Un exemple de F-event.

Détection. la bitangente en question est une droite passant par une face, tangente à un polytope et intersectant la droite support de e (cf. figure 8.14). On détecte ces événements en examinant les faces incidentes à l'arête support de chaque bitangente.

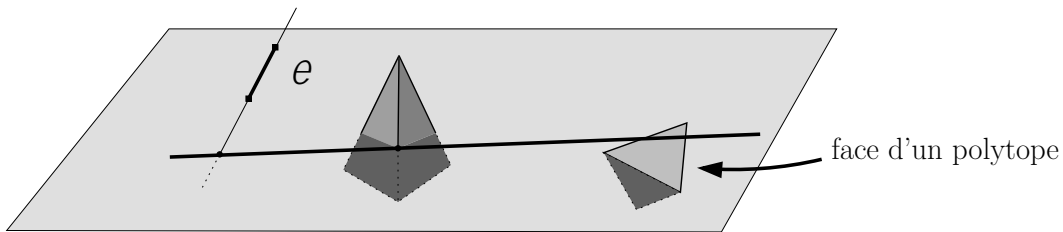


FIG. 8.14. La droite caractéristique signalant un F-event.

Traitement. Si la bitangente voit l'arête de référence au passage d'un F-event associé, on doit terminer l'arête du squelette 3D correspondant par un sommet et créer une nouvelle arête du squelette 3D. Ensuite, il faut mettre à jour un des supports de la bitangente et les événements qui en dépendent (un V-event et les T-event).

Changement de visibilité de l'arête de référence (R-event)

Nature. Un R-event traduit le fait qu'une bitangente commence ou cesse de voir l'arête de référence (cf. figure 8.15).

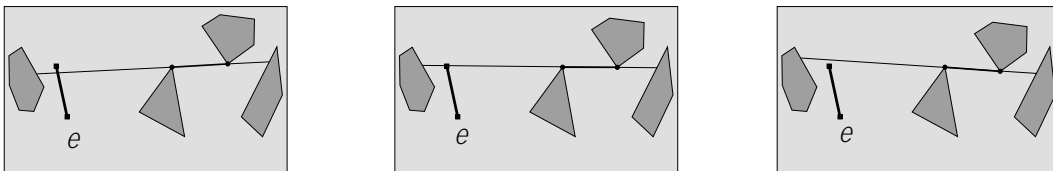


FIG. 8.15. Un exemple de R-event.

Détection. Afin de gérer ces événements, nous ajoutons tout simplement l'arête de référence e à la liste des polygones contenus dans le plan de balayage. Un R-event apparaît alors comme la fusion de la bitangente pour laquelle la visibilité change avec une bitangente issue de e , i.e. un cas particulier de T-event.

Traitement. L'ajout de e à la famille des objets crée un type de T-event particulier, à savoir quand au moins une des bitangentes qui fusionnent s'appuie sur e . Lorsqu'un tel événement se produit, une seule des deux ou trois bitangentes qui fusionnent ne s'appuie pas sur e : c'est elle qu'il faut mettre-à-jour, ce qui se fait en inversant tout simplement l'information "voir e ". Du point de vue du squelette 3D, la bitangente en question correspond à un sommet du type VEE (passant par un sommet de e) qui commence ou termine un arc du squelette 3D (suivant que la bitangente commence ou cesse de voir e).

8.4.4 Événements associés à une bitangente

Nous associons à une bitangente plusieurs événements traduisant un changement de ses propriétés : deux V-events (un pour chacune de ses arêtes support), jusqu'à 4 T-events (dont certains peuvent être des R-event) et jusqu'à 4 F-event. La position du plan dans lequel se déroule un tel événement dépend des supports de la bitangente et doit donc être recalculée si ceux-ci changent. Aussi, nous établissons un lien entre une bitangente et ses événements associés.

Par ailleurs, plusieurs de ces événements indiquent un changement dans un support de la bitangente. Il est inutile de maintenir dans la liste des événements ceux qui lui sont postérieurs et dépendent du support qui doit changer. Nous pouvons ainsi réduire la liste des événements associés à une bitangente à un événement pour chacun de ses générateurs (de type V ou F) et jusqu'à 4 T-events antérieurs à ces V- et F-event.

8.5 Vue d'un point

Lors du traitement d'un V-event initial, nous commençons par calculer les bitangentes entre le sommet v causant l'événement et les polygones du plan de balayage. La première étape consiste à calculer les polygones du plan de balayage, puisque ceux-ci ne sont pas maintenus. Ensuite, le calcul de la vue d'un point dans une collection de polygones convexes disjoints se ramène²⁰ de manière classique à un calcul d'enveloppe inférieure d'une famille de segments.

Détaillons cette première étape. Pour chaque polygone, nous calculons les 2 droites passant par v qui lui sont tangentes. Nous associons à ce polygone le segment joignant les sommets supportant ces tangentes. Nous considérons ensuite cet ensemble d'au plus k segments dans le repère polaire (θ, r) centré en v . Les sommets de l'enveloppe inférieure de la collection de segments ainsi obtenue représentent les sommets des polygones supportant une bitangente avec v (*cf.* figure 8.16).

De plus, les objets vus par le segment libre maximal supportant une bitangente d'angle θ sont les objets réalisant l'enveloppe inférieure aux positions $\theta + \pi$ et immédiatement à droite ou à gauche de θ (suivant les cas). De même, déterminer les bitangentes actives peut être fait en considérant les interactions de cette enveloppe inférieure avec l'arête de balayage.

La complexité de cette étape est dominée par le temps de calcul de l'enveloppe inférieure d'une famille de segments du plan, soit $O(n \log n)$ (*cf.* Agarwal et Sharir [4] ou Sharir [86]).

8.6 Gestion des dégénérescences

Afin que notre algorithme prenne en entrée des polytopes disjoints en position arbitraire, nous devons traiter correctement les événements simultanés et les familles d'objets admettant

²⁰Dans le cas où les polygones sont disjoints, un simple balayage suffit, mais nous présentons cette variante afin de couvrir aussi le cas de polygones s'intersectant.

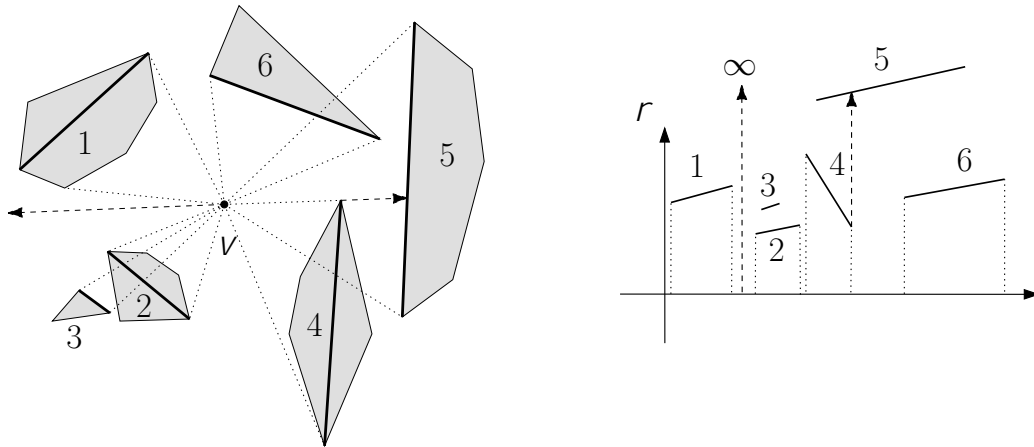


FIG. 8.16. Calcul de la vue d'un point dans une collection de polygones convexes disjoints ramené à un calcul d'enveloppe inférieure d'une famille de segments.

un ensemble de droites tangentes communes de dimension non-générique. Ces deux types de dégénérescence, l'un induit par notre algorithme et l'autre inhérent au calcul du squelette de visibilité, sont décrites en sections 8.6.1 et 8.6.2, respectivement.

8.6.1 Événements simultanés

Voyons tout d'abord comment gérer correctement des événements simultanés, c'est-à-dire qui se produisent dans un même plan critique. Traiter un événement c'est maintenir le squelette 2D et mettre-à-jour le squelette 3D. Considérons ces deux tâches à tour de rôle.

Maintient du squelette 2D. Chaque événement du balayage peut être vu comme un changement se produisant dans le squelette 2D. Un V-event initial correspond à l'ajout d'un ensemble d'arcs et de bitangentes. Un V-event terminal correspond à la suppression d'un ensemble d'arcs et de bitangentes. Un F-event et un V-event correspondent à un changement de générateur des bitangentes concernées. Un T-event, enfin, correspond à l'apparition ou la disparition d'une bitangente et la mise-à-jour des informations des bitangentes voisines (incidences, être active, objets vus).

Notre approche pour maintenir le squelette 2D consiste à définir un ordre sur les événements tel qu'en les traitant indépendamment selon cet ordre on aboutisse au résultat correct.

Avant toute chose, nous traitons le plan initial s'il y a lieu. Nous traitons ensuite les V-events initiaux afin que les bitangentes qu'ils créent soit prises en compte lors des événements suivants susceptibles de les modifier (changement de générateur, T-event avec une extrémité de l'arête support...).

Les bitangentes concernées par un V-event terminal sont appelées à disparaître dans le plan de balayage courant. Il est donc inutile de les maintenir, et nous continuons en traitant les V-events terminaux.

Ensuite, nous traitons les T-events dans un ordre arbitraire. Des T-events qui ne correspondent pas, dans le plan critique, à un même segment libre maximal sont indépendants. Pour des T-events qui correspondent à un même segment libre maximal, cela revient à effectuer une perturbation symbolique sur les polygones au voisinage de leur position d'alignement.

Enfin, nous traitons les V-events et les F-events, afin de mettre-à-jour les générateurs des bitangentes restantes. Ces événements sont indépendants et peuvent donc être traités dans un ordre arbitraire.

En traitant chacun de ces événements, nous éliminons certains événements de la liste (ceux dépendants d'arcs ou de sommets du squelette 2D modifiés) et en créons de nouveaux. Lors du traitement des tritangentes, nous devons prendre garde à ce que les nouveaux événements créés soient effectivement à traiter. Si nous traitons un T-event correspondant à l'apparition d'une nouvelle bitangente, tout T-event impliquant les 3 bitangentes concernées doit être ignoré, car il a déjà été traité. Si l'on n'y prend pas garde, on peut aboutir à un cycle.

Le maintien du squelette 2D lors d'événements simultanés peut donc se faire en traitant les événements indépendamment si l'on respecte un ordre global sur les types d'événements et qu'on prend soin de ne traiter chaque événement qu'une seule fois. L'ordre que nous proposons sur les types d'événements est le suivant :

V-event initial < V-event terminal < T-event (sans répétition) < F-event et V-event.

Mise-à-jour du squelette 3D. Voyons maintenant comment ajuster la construction du squelette 3D à la procédure adoptée pour maintenir le squelette 2D. Le passage par un plan critique correspond, du point de vue du squelette 3D, à trois opérations : terminer certains arcs, créer des sommets et commencer de nouveaux arcs.

Nous commençons par identifier les familles de bitangentes qui induisent des sommets du squelette 3D distincts, engendrés par e et contenus dans le plan de balayage. Les générateurs de ces sommets, pris initialement comme les supports des bitangentes, doivent éventuellement être ajustés si certains d'entre eux changent dans le plan critique. Aussi, les sommets que nous créons sont tout d'abord temporaires ; ils ne sont effectivement ajoutés au squelette qu'une fois leurs générateurs complètement déterminés. Pour faire tout cela efficacement, nous procédons en plusieurs étapes.

1. Immédiatement après le traitement des V-events initiaux dans la mise-à-jour du squelette 2D, nous identifions les sommets induits par des T-events. Pour cela, nous considérons le sous-graphe du squelette 2D formé des arcs qui induisent un T-event dans le plan critique et de leurs sommets. Les sommets d'une composante connexe de ce graphe est un ensemble de bitangentes fusionnant dans un même segment libre maximal. Pour ces familles comptant au moins une bitangente active, nous créons un sommet du squelette 3D temporaire ayant pour générateurs les générateurs des bitangentes. Nous associons les bitangentes d'une telle famille au sommet temporaire créé.
2. Si parmi les événements simultanés se trouve le plan de balayage initial (ou final), toute bitangente active induit un sommet du squelette 3D que nous devons reporter.
3. Pour chaque F-event associé à une bitangente active, nous vérifions si cette bitangente est associée à un sommet temporaire. Si c'est le cas, nous mettons-à-jour les générateurs du sommet en y ajoutant une arête. Sinon, c'est que le F-event induit un sommet du squelette 3D qui n'a pas encore été détecté, et nous le créons.
4. Pour chaque V-event, nous remplaçons dans la liste des générateurs des sommets (du squelette) temporaires les arêtes qui se terminent par leur sommet. Ensuite, pour chaque bitangente active concernée par cet événement, nous vérifions qu'elle est associée à un sommet temporaire et si ce n'est pas le cas, nous en créons un nouveau. Nous procédons de même pour les V-events terminaux et les V-events initiaux.

Une fois cela fait, nous avons la liste des sommets du squelette 3D engendrés par l'arête de référence dans le plan critique. De plus, nous connaissons pour chacun d'entre eux la liste complète de ses générateurs. Nous pouvons alors insérer ces sommets dans le squelette 3D. Au cours de cette étape, pour chaque bitangente active induisant un sommet du squelette 3D nous mettons en place un pointeur vers ce sommet.

Pour mettre-à-jour la liste des arcs balayés au passage par le plan critique, nous devons prendre garde à ne pas créer d'arcs nuls, par exemple un arc induit par une bitangente active apparaissant comme intermédiaire lors de la fusion d'au moins 4 bitangentes au sein d'un même segment libre maximal.

La liste des arcs en cours de balayage est connue : il y en a un par bitangente active. Nous dressons une liste de ces arcs en les étiquetant comme «normal». Nous continuons alors le traitement des événements afin de maintenir le squelette 2D : les V-events initiaux ayant été traités, nous passons aux V-events terminaux, puis les T-events pour finir avec les F-events et V-event. Lors du traitement de ces événements, à chaque fois qu'un arc est créé il est étiqueté comme «temporaire». À chaque fois qu'un arc se termine, nous consultons son étiquette. Soit l'étiquette est «normal» et nous le terminons et l'ajoutons au squelette 3D, soit l'étiquette est «temporaire» et alors nous l'effaçons sans l'ajouter au squelette 3D. Au passage, notons que quand une bitangente active est créée, nous pouvons identifier le nouveau sommet du squelette à laquelle elle correspond, et auquel est connecté l'arc temporaire qu'elle induit.

Une fois tous les événements du plan critique considéré traités, les arcs «potentiellement nuls» qui n'ont pas été effacés sont validés et forment les arcs que le plan de balayage commence à parcourir.

Le traitement d'événements simultanés peut donc se faire sans trop de peine. D'une part, on ordonne ces événements en fonction de leur type pour garantir que le squelette 2D est correctement maintenu. D'autre part, on détecte les sommets du squelette 3D, engendrés par e , qui apparaissent dans le plan de balayage et les arcs qui s'y terminent par de simples manipulations combinatoires. Le seul point délicat consiste, lors du traitement des événements, à ne pas créer d'arc vide dans le squelette 3D.

8.6.2 Autres positions non-génériques

Les positions non-génériques restantes sont dues soit au fait que des arêtes issues de polytopes distincts sont coplanaires, soit au fait que l'ensemble des droites intersectant k arêtes ouvertes issues d'objets distincts n'est ni vide ni de dimension $4-k$. Ces positions remettent en cause deux propriétés que nous avons utilisé jusqu'à présent. D'une part, un V-event initial ou terminal peut correspondre à un plan tangent à un polytope le long d'une arête ou d'une face, et il nous faut ajuster leur traitement en conséquence. D'autre part, un segment libre maximal supportant une bitangente du plan de balayage peut être tangent à un nombre arbitraire de polygones, même entre deux positions critiques.

Le calcul du squelette de visibilité 2D dans le plan initial doit supporter des alignements arbitraire de polygones, ce qui est par exemple le cas²¹ de l'implantation d'Angelier [7]. Une fois ce squelette initial calculé, pour chaque sommet du squelette 2D tangent à plus d'un objet il nous faut déterminer si cela est dû au fait que le plan de balayage initial contient un événement, par exemple un F-event, ou à un alignement de faces de polytopes. Dans le premier cas, nous

²¹ En fait, l'implantation d'Angelier ne fusionne pas les bitangentes alignées, ce qui requiert donc un traitement ultérieur. Elle calcule cependant de manière robuste et certifiée le complexe 2D d'une scène de polygones disjoints arbitraires.

traitons l'événement en question normalement. Dans le second cas, nous associons plus de deux générateurs à la «bitangente» ; les droites extrémales d'une composante connexe de droites intersectant une famille de segments passent par un sommet de l'un d'entre eux (*cf.* [18]), aussi les supports de cette «bitangente» ne changeront pas avant le prochain événement au sens usuel.

Au passage par un V-event initial où la tangence se fait en une arête ou une face, nous calculons les bitangentes qui s'appuient sur le nouveau polygone et déterminons les arêtes qui les supportent. Observons que nous n'avons pas à éclater chaque bitangente en deux. Il faut cependant, au préalable, détecter toutes les bitangentes actives qui voient le polygone qui vient d'apparaître. En effet, ces bitangentes donnent lieu à un sommet du squelette 3D car, dans le plan critique, elles viennent en contact avec un nouveau polytope. Déterminer si une bitangente voit le polygone peut se faire en temps $O(|P| + \log n)$ où $|P|$ est la taille du polygone en question. Un polygone intervient ainsi au plus une fois par balayage, ce qui fait un coup total $O(kn)$ pour l'ensemble d'un balayage. Le traitement d'un V-event final suit la même règle.

Un T-event correspond toujours à une apparition ou disparition d'un sommet du squelette 2D. Les ensembles de supports des «bitangentes» existant avant et après un T-event sont invariants, sauf cas d'événements simultanés bien sûr. Dans le cas d'une apparition de «bitangente», il faut déterminer soigneusement ses supports.

Le traitement d'un V-event ou d'un F-event n'est quasiment pas affecté.

8.7 Analyse de complexité

Nous allons maintenant analyser la complexité de notre algorithme. Dans la mesure où la complexité des différentes opérations ont été donné au fur et à mesure de la description, nous nous bornons ici à en faire le total. Pour plus de simplicité, nous étudions d'abord la complexité de l'algorithme sur des objets en position générique., puis analysons l'impact du traitement des dégénérescences.

Position générique. Le tableau 8.1 résume la complexité de chacune des étapes de notre algorithme, totalisée sur l'ensemble des balayages. Explicitons quelque peu le calcul de chacune de ces complexités.

Rappelons tout d'abord qu'ajouter un élément au squelette 3D prend un temps $O(\log n)$. Par ailleurs, le nombre d'événements associés à une bitangente à un instant donné est borné. Comme il y a $O(k)$ autres événements dans la liste d'événements, les V-events initiaux et éventuellement finaux, la liste d'événements est de taille $O(k + |\mathcal{B}|)$, où \mathcal{B} est l'ensemble des bitangentes du squelette 2D. Par conséquent, la taille de la queue de priorité est $O(k^2)$.

Pré-calculer les V-events initiaux intervenant dans un balayage peut être fait en temps $O(n \log k)$ (*cf.* section 8.4.2). Pour les n balayages, ce pré-calcul prend donc un temps $O(n^2 \log k)$.

Pour traiter la situation dans le plan initial d'un balayage, nous commençons par calculer les polygones qu'il contient, ce qui peut se faire en temps $O(n)$. Ensuite, calculer le squelette de visibilité 2D et déterminer, pour chaque bitangente, si elle est active et ses objets vus peut être fait en temps $O(n \log n + k^2)$ et $O(nk^2)$, respectivement (*cf.* section 8.3). Pour chaque bitangente, nous calculons les événements associés à prendre en compte dans le balayage, ce qui au total prend un temps $O(k^2 \log k)$. Enfin, il y a au plus k^2 éléments à calculer et ajouter au squelette 3D, ce qui se fait en temps $O(k^2 \log n)$. La complexité de cette opération est dominée par $O(n \log n + nk^2)$, ce qui conduit à $O(n^2 k^2 + n^2 \log n)$ pour l'ensemble des balayages.

Le traitement d'un V-event initial commence par le calcul de la vue d'un point, que l'on peut faire en temps $O(n \log n)$ (*cf.* section 8.5). Tester si une bitangente est active et calculer

Opération	Complexité
Pré-calcul des V-events initiaux	$O(n^2 \log k)$
Traitement du plan initial	$O(n^2 k^2)$
- calcul des polygones	$O(n)$
- calcul du squelette 2D	$O(n \log n + k^2)$
- activité et objets vus	$O(nk^2)$
- calcul des événements associés au squelette 2D	$O(k^2 \log k)$
- éléments du squelette 3D	$O(k^2 \log n)$
Traitement des V-events initiaux	$O(n^2 k \log n)$
- calcul de la vue du point	$O(n \log n)$
- explosion des bitangentes	$O(k + d)$
- éléments du squelette 3D	$O(k \log n)$
Traitement des V-events finaux	$O(nk^2 \log n)$
- éléments du squelette 3D	$O(k \log n)$
- effacer les bitangentes	$O(k)$
Traitement des V-events	$O(n^2 k \log n)$
- mise-à-jour des bitangentes concernées	$O(k(d + \log n))$
- mise-à-jour du polygone	$O(d)$
Traitement des T-events	$O(n^2 k^2 \log n)$
- mise-à-jour des bitangentes concernées	$O(\log k)$
- éléments du squelette 3D	$O(\log n)$
Traitement des F-events	$O(nk^2 \log n)$
- mise-à-jour de la bitangente concernée	$O(\log k)$
- éléments du squelette 3D	$O(\log n)$
Total	$O(n^2 k^2 \log n)$

TAB. 8.1. Complexité dans le cas le pire des différentes étapes de notre algorithme. Le détail du calcul est fait pour un balayage dans un cas (traitement du plan initial), et pour un événement dans les autres.

les objets qu'elle voit peut être fait dans le même temps (*cf.* section 8.5). Transformer chaque bitangente passant par le sommet en deux bitangentes passant par des arêtes prend un temps $O(k + d)$, où d est le degré du sommet. Notons que la somme des degrés des sommets de la scène est deux fois le nombre d'arêtes, soit $O(n)$. Enfin, chaque nouvelle bitangente induit un nombre constant de nouveaux éléments du squelette 3D, qui y sont ajoutés en temps $O(k \log n)$. Le coût du traitement des V-events initiaux est $O(nk \log n)$ pour un balayage et donc $O(n^2 k \log n)$ pour l'ensemble des balayages.

Le traitement d'un V-event final consiste simplement à effacer $O(k)$ bitangentes, en temps $O(k)$, et ajouter $O(k)$ éléments au squelette 3D, en temps $O(k \log n)$. Cela se fait donc en temps $O(k^2 \log n)$ pour un balayage et $O(nk^2 \log n)$ pour tous les balayages.

Le traitement d'un V-event lié à un sommet de degré d consiste à mettre-à-jour les bitangentes concernées, en temps $O(k(d + \log n))$ (*cf.* section 8.4.3). Le coût du traitement des V-events est $O(nk \log n)$ pour un balayage et donc $O(n^2 k \log n)$ pour l'ensemble des balayages.

Un T-event implique un nombre constant de bitangentes. Le traitement d'un T-event se fait en temps constant sauf en ce qui concerne la mise-à-jour des événements liés aux bitangentes concernés, qui se fait en temps $O(\log k)$, et l'ajout d'éléments au squelette 3D, qui se fait en

temps $O(\log n)$. Chaque T-event peut être chargé sur une droite tangente à 4 polytopes, et chaque droite se retrouve ainsi chargée au plus 4 fois. Comme, en position générique, il y a $O(n^2k^2)$ telles droites (cf. théorème 40, en section 7.1), il y a $O(n^2k^2)$ T-event, ce qui fait un temps de traitement total, pour l'ensemble des balayages, de $O(n^2k^2 \log n)$.

De même que pour les T-events, un F-event est traité en temps $O(\log n)$. Le nombre total de F-events, sur l'ensemble des balayages, est $O(nk^2)$ (cf. lemme 44, en section 7.2). Le traitement des F-events pour l'ensemble des balayages est donc $O(nk^2)$.

Nous aboutissons finalement au résultat suivant.

Lemme 72. *Notre algorithme calcule le squelette de visibilité de polytopes 3D disjoints en position générique en temps $O(n^2k^2 \log n)$.*

Dégénérescences. Le coût de notre algorithme sur des polytopes disjoints en position générale reste en fait inchangé dans le cas le pire.

Théorème 73. *Notre algorithme calcule le squelette de visibilité de polytopes 3D disjoints en temps $O(n^2k^2 \log n)$.*

Démonstration. Considérons en premier lieu les événements simultanés. Deux facteurs peuvent affecter le coût du maintien du squelette 2D : le nombre de T-events intermédiaires introduits et la vérification, pour chacun d'entre eux, qu'il n'a pas déjà été traité. Le nombre total de T-events reste borné un $O(n^2k^2)$ dans tout cas dégénéré (cf. théorème 40, en section 7.1), et les T-events intermédiaires ne sont traité qu'une seule fois, et dans un seul plan de balayage. Aussi ils n'introduisent aucun sur-coût. Par ailleurs, vérifier qu'un T-event n'a pas été déjà traité peut être fait au moyen d'une liste triée en temps $O(\log n)$. Comme le traitement d'un T-event se fait en temps $O(\log n)$ même en supposant les polytopes en position générique, le coût total ne s'en trouve donc pas affecté. Lors du report des éléments du squelette 3D, la seule opération supplémentaire consiste à grouper les arcs induisant des T-events en composantes connexes ; cela peut se faire naïvement en temps linéaire en le nombre de T-events, et ne change donc pas la complexité de l'algorithme sur l'ensemble.

Les autres dégénérescences sont elles aussi sans impact sur le temps d'exécution de l'algorithme, comme nous l'avons déjà souligné en section 8.6.2. \square

8.8 Extensions

Nous discutons ici l'extension de notre algorithme à des classes de polyèdres plus larges.

Polytopes tangents

Nous avons décrit notre algorithme pour des polytopes disjoints. L'extension la plus simple consiste à autoriser les tangences entre objets. Cela demande tout d'abord de clarifier la notion de segment *libre* et de tangence, comme nous l'avons signalé au chapitre 4.

Une fois ces définitions choisies, il suffit d'établir un catalogue des cas particuliers qui se présentent. Leur prise en compte par notre algorithme ne doit *a priori* pas poser de difficulté autre qu'un ajustement, au cas par cas, des prédicats impliquant la tangence ou la liberté d'un segment.

Signalons au passage que le code d'Angelier [7] de calcul du complexe de visibilité 2D admet en entrée une collection de polygones éventuellement dégénérés. Pour des définitions de segment libre et segment tangent compatibles, ce code peut donc calculer le squelette de visibilité 2D dans le cas de polygones tangents.

Polytopes s'intersectant

La définition du squelette de visibilité de polytopes s'intersectant demande elle aussi à être précisée. Néanmoins, comme l'indique l'étude effectuée au chapitre 7 notre approche reste valable pour calculer les droites tangentes. Notre algorithme peut donc vraisemblablement être ajusté pour autoriser les intersections entre polytopes.

Le premier aménagement à faire concerne le calcul du squelette 2D dans le plan de balayage initial. Aucun des algorithmes existants de calcul du complexe de visibilité 2D n'admet des polygones d'intérieurs non disjoints en entrée.

Ensuite, nous proposons d'introduire de nouveaux événements afin de détecter les changements dans la manière donc les polygones du plan de balayage s'intersectent : quand un sommet de l'un franchit une arête de l'autre. Le nombre de tels événements peut être quadratique dans chaque balayage, mais reste $O(n^2k^2)$ sur l'ensemble des balayages : c'est, en substance, ce que nous avons prouvé en établissant le théorème 40 au chapitre 7.

Notons que le traitement d'un changement dans la manière dont deux polygones s'intersectent peut être coûteux. Par exemple, si un polygone entièrement contenu dans un autre en sort, le sommet qui franchit une arête définit de nouvelles bitangentes. Calculer ces bitangentes en partant de zéro conduirait à un algorithme de complexité $O(n^3k^2 \log n)$. Il nous semble donc que si notre approche reste valide, gérer efficacement les intersection demande une étude spécifique.

Une alternative *a priori* moins efficace consiste à décomposer les polytopes s'intersectant en une famille de polytopes d'intérieurs disjoints.

Polyèdres

Tout polyèdre peut se décomposer en une union de polytopes d'intérieurs disjoints. Par conséquent, pour des définitions de segment libre et de tangence adaptées, une implantation de notre algorithme admettant des polytopes tangents peut traiter des polyèdres quelconques. Toutefois, décomposer un polyèdre en union de polytopes convexes d'intérieurs disjoints n'est *a priori* pas simple. Par ailleurs, le nombre de polytopes d'intérieurs disjoints nécessaire à la décomposition d'un polyèdre peut être linéaire en son nombre d'arête. Dans certains cas, il est possible de réduire le nombre de polytopes utilisés dans la décomposition si l'on autorise les intersections.

Quatrième partie

Complexe de visibilité d'objets courbes

Chapitre 9

Représentation du complexe de visibilité dans l'espace des droites

Ce chapitre traite de la représentation effective des cellules du complexe de visibilité 3D. Cette tâche est généralement malaisée, en partie du fait que l'espace des segments libres maximaux n'est pas simple à décrire. C'est pourtant une question préalable à tout calcul du complexe puisqu'elle conditionne l'objet même à calculer.

Nous donnons une méthode de représentation exacte des faces du complexe de visibilité 3D de convexes bornés disjoints et explicitons cette représentation dans le cas où les objets sont en outre à bord algébrique. Notre approche s'inspire à la fois de l'arrangement dual introduit par Durand et al. [36, 40] et des travaux de Pellegrini [69]. Nous proposons ensuite une manière de grouper les faces du complexe en *clusters* afin de les représenter plus efficacement. Ces clusters présentent de plus des propriétés structurelles intéressantes qui facilitent leur calcul.

Nous étudions tout d'abord quelques questions préliminaires en section 9.1. Nous abordons ensuite la représentation d'une ou de plusieurs faces de dimension 3 ou moins du complexe de visibilité, en section 9.2. Nous discutons enfin l'extension de notre méthode à des cellules de dimension 4 et à des classes d'objets plus générales en section 9.3. Les résultats de ce chapitre trouvent une application directe au chapitre 10 qui propose un algorithme de construction du complexe de visibilité d'objets courbes.

9.1 Préliminaires

Nous rappelons tout d'abord la notion d'arrangement dual d'une collection d'objets de \mathbb{R}^3 introduite par Durand et al. [36, 40] qui permet, dans une certaine mesure, d'exprimer les questions de visibilité dans l'espace des droites. Nous discutons ensuite de la prise en compte des phénomènes d'occultation, ce qui nous amène naturellement à aborder les questions de permutations géométriques. Nous examinons enfin comment exprimer, quand les objets sont donnés sous forme algébrique, les hypersurfaces de l'arrangement dual et plus généralement décrire les interactions entre une droite et un objet.

9.1.1 Arrangement dual

Une droite est tangente à un objet si elle intersecte son bord en un point p sans intersecter son intérieur au voisinage de p (pour une définition complète, notamment pour des objets d'intérieur

vide, nous renvoyons au chapitre 4). L'ensemble des droites tangentes à un objet convexe borné²² forme une hypersurface dans l'espace des droites que nous appelons *hypersurface des tangentes* de l'objet. Étant donnée une collection d'objets de \mathbb{R}^3 , leurs hypersurfaces de tangentes forment un arrangement de l'espace des droites que Durand et al. [36, 40] ont nommé *arrangement dual*.

Le terme d'«arrangement dual» nous semble un peu inadéquat puisqu'il suggère que l'hypersurface des tangentes d'un objet lui est dual. La notion classique de dualité dans un espace vectoriel consiste à considérer ses formes linéaires, c'est-à-dire ses hyperplans. L'arrangement dual n'exhibe aucune des propriétés de la dualité au sens classique et constitue plutôt une représentation des objets de l'espace 3D dans l'espace 4D des droites. Nous conservons néanmoins le terme d'«arrangement dual» afin de ne pas multiplier les définitions.

Pour manipuler les droites de \mathbb{R}^3 , il convient de choisir un plongement de l'espace des droites, c'est-à-dire une paramétrisation. Nous adoptons pour cela les coordonnées de Plücker, que nous rappelons en Annexe A. Autrement dit, les droites de \mathbb{R}^3 sont représentées²³ par l'ensemble des points de la Grassmannienne $G(2, 4)$, plongée dans $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ en une quadrique appelée *quadrique* (ou *hypersurface*) *de Plücker*. Les coordonnées de Plücker peuvent sembler moins intuitives que le paramétrage via $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ proposé par Durand et al. [40]. Ces coordonnées ont cependant de remarquables propriétés algébriques comme nous le verrons en section 9.1.3. Dans la suite de ce chapitre, nous abrégeons $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, l'espace projectif réel de dimension n , en \mathbb{P}^n .

Intuitivement, une droite passant par un point A et de vecteur directeur \vec{v} est représentée par le point $(\vec{v}, \overrightarrow{OA} \times \vec{v})$ de \mathbb{P}^5 , où O désigne l'origine du repère de l'espace 3D. Comme les vecteurs \vec{v} et $\overrightarrow{OA} \times \vec{v}$ sont orthogonaux, seuls les points se trouvant sur la quadrique

$$\Gamma = \{(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}) \in \mathbb{P}^5 \mid p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0\}$$

représentent des droites de \mathbb{R}^3 ; Γ est la quadrique de Plücker.

Nous notons T_A l'hypersurface des tangentes à un objet A . Le plongement d'une hypersurface de l'espace des droites via les coordonnées de Plücker s'obtient généralement comme l'intersection d'une hypersurface de \mathbb{P}^5 avec la quadrique Γ . Par exemple, l'ensemble des droites qui intersectent la droite ℓ de coordonnées de Plücker $(\ell_{01}, \ell_{02}, \ell_{03}, \ell_{23}, \ell_{31}, \ell_{12})$ est l'intersection de Γ avec l'hyperplan :

$$H_a = \{(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}) \in \mathbb{P}^5 \mid \ell_{01}p_{23} + \ell_{02}p_{31} + \ell_{03}p_{12} + \ell_{23}p_{01} + \ell_{31}p_{02} + \ell_{12}p_{03} = 0\}$$

Dans de nombreux cas, il est pratique de manipuler une hypersurface de l'espace des droites comme une hypersurface de \mathbb{P}^5 , sans expliciter systématiquement l'opération d'intersection avec Γ . Nous effectuons cet abus de langage et parlons à l'occasion de «l'hyperplan des droites intersectant la droite ℓ » plutôt que de «l'ensemble des droites intersectant la droite ℓ qui est l'intersection d'un hyperplan avec Γ ». Il faut cependant garder à l'esprit qu'il n'y a *a priori* pas une unique hypersurface de \mathbb{P}^5 qui intersecte Γ en une hypersurface de tangentes donnée.

Considérons une droite qui se déplace continûment dans \mathbb{R}^3 de sorte que le point qui lui est associé sur la quadrique de Plücker reste à l'intérieur d'une face de l'arrangement dual. Chacun des segments libres maximaux qu'elle supporte se déplace continûment en restant à l'intérieur d'une face du complexe de visibilité. Cependant, si la droite change de face dans l'arrangement des tangentes, certains de ses segments libres maximaux peuvent ne pas changer de face dans le complexe de visibilité (*cf.* figure 9.1). L'arrangement dual est la *projection* du complexe de

²²Nous nous limitons au cas des convexes *bornés* pour éviter le cas d'un demi-espace dont l'ensemble des tangentes affines est de dimension 2.

²³En fait les coordonnées de Plücker représentent les droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Dans la mesure où nous supposons les objets bornés cela ne fait aucune différence.

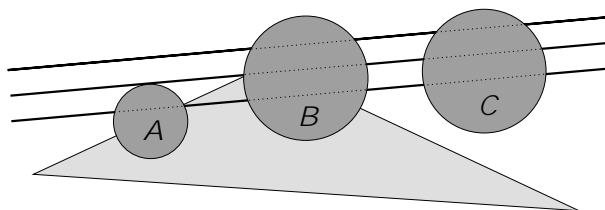


FIG. 9.1. L'arrangement dual traduit des phénomènes qui ne sont pas locaux à une face du complexe : le fait qu'une droite commence à intersecter l'objet A n'affecte en rien le segment libre maximal qui se trouve entre les objets B et C .

visibilité de l'espace des segments libres maximaux dans l'espace des droites (par l'application associant à un segment libre maximal sa droite support). Il permet donc de décrire les faces du complexe puisque, essentiellement, leurs bords s'y trouvent représentés. Cependant, la projection d'une face du complexe peut être constituée d'un grand nombre de faces de l'arrangement dual car il ne prend pas en compte les occultations, et manque donc de localité.

Notre approche consiste à décrire les faces du complexe via leur projection dans l'espace des droites. La description de cette projection peut se faire directement au moyen de l'arrangement dual, mais nous allons dans un premier temps le simplifier en ne retenant que les hypersurfaces pertinentes pour la description d'une face.

9.1.2 Occultations et permutations géométriques

Pour décrire les phénomènes d'occultation dans l'espace des droites, il est nécessaire de tenir compte de l'ordre dans lequel les droites rencontrent les objets. Un objet B *occulte* la visibilité entre les objets A et C selon une droite ℓ si celle-ci intersecte B entre A et C . Nous notons $Oc(A, B, C)$ l'ensemble des droites selon lesquelles B occulte la visibilité entre A et C . Nous considérons des droites non orientées, et les ensembles $Oc(A, B, C)$ et $Oc(C, B, A)$ sont donc identiques.

Pour décrire efficacement les projections des faces du complexe, nous étudions d'abord la description d'un ensemble $Oc(A, B, C)$. Des objets convexes bornés et disjoints peuvent être intersectés par des droites selon plusieurs ordres (cf. figure 9.2). Dans notre exemple, l'ensemble des droites qui intersectent A , B et C se répartit en trois ensembles : $Oc(A, B, C)$, $Oc(B, C, A)$ et $Oc(C, A, B)$.

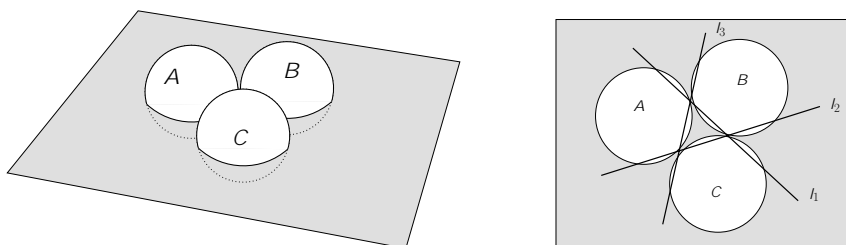


FIG. 9.2. Trois sphères disjointes et de même rayon intersectées par trois droites selon trois ordres distincts.

Une droite qui intersecte une famille d'objets convexes disjoints définit deux ordres sur ces objets, un par orientation. Ces deux ordres étant symétriques, on les identifie en une même *permutation géométrique* des objets (cf. Goodman et al. [47] et Wenger [94] pour une synthèse

sur les permutations géométriques). L'étude des permutations géométriques d'objets simples en dimension 3 et plus est encore un sujet de recherche actif. Nous avons d'ailleurs récemment établi [22, 23] que le nombre maximal de permutations géométriques d'une famille de n sphères disjointes de même rayon est au plus deux si $n \geq 9$ (borne atteinte), et ce en toute dimension, et au plus trois sinon (borne que l'on conjecture non atteinte pour les familles de taille $4, \dots, 8$).

Les permutations géométriques de trois objets convexes disjoints ont une structure simple, comme l'indique le résultat suivant.

Lemme 74. *Soit A, B et C trois objets convexes disjoints. L'ensemble $Oc(A, B, C)$ est une composante connexe des droites intersectant A, B et C .*

Démonstration. Un objet convexe intersecte une droite en un intervalle. Lorsque cette droite se déplace continûment, cet intervalle évolue continûment sur la droite. Considérons une droite qui se déplace tout en intersectant une famille d'objets. Pour que l'ordre des intervalles d'intersection change, deux d'entre eux doivent se croiser ce qui est impossible si les objets sont disjoints. Les droites d'une composante connexe de droites intersectant une famille d'objets les rencontrent donc dans le même ordre.

Montrons maintenant que $Oc(A, B, C)$ est connexe par arc. Soit d_1 et d_2 deux droites qui intersectent A, B et C dans cet ordre. Pour chaque objet, nous considérons un segment joignant un de ses points sur d_1 à un de ses points sur d_2 ; nous désignons ces segments par s_A, s_B et s_C . Si un de ces segments est réduit à un point, d_1 et d_2 sont concourantes et l'une peut être amenée en l'autre par une simple rotation. Si deux segments sont coplanaires, d_1 peut être déplacée en d_2 par une simple rotation tout en intersectant ces trois segments dans le même ordre. Nous supposons donc qu'aucun de ces segments n'est réduit à un point et que leurs droites supports sont affinement indépendantes. Nous notons ces droites d_A, d_B et d_C respectivement.

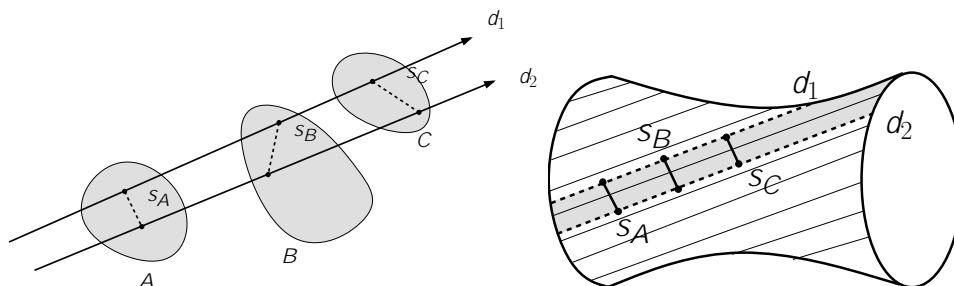


FIG. 9.3. Deux droites intersectant trois objets convexes (à gauche) apparaissent connectées sur une quadrique réglée, ici un hyperboloïde à une nappe (à droite).

Comme d_A, d_B et d_C sont deux-à-deux affinement indépendantes, les droites qui les intersectent forment une famille de réglages d'une quadrique qui est un paraboloid hyperbolique ou un hyperboloïde à une nappe [78, §3] (cf. figure 9.3). Cet ensemble de droite décrit une courbe Ψ dans l'espace des droites qui est ouverte si la quadrique est un paraboloid hyperbolique et fermée si c'est un hyperboloïde à une nappe. Les droites intersectant les segments s_A, s_B et s_C forment un ou plusieurs arcs de Ψ (cf. Brönnimann et al. [18]).

Supposons Ψ fermée. Deux chemins relient alors d_1 à d_2 le long de cette courbe (cf. figure 9.4). Déplacer d_1 en d_2 le long d'un de ces chemins revient à balayer, dans l'espace 3D, les droites support des segments s_A, s_B et s_C entre leurs extrémités. Chaque segment s_X est balayé lors du parcours d'un arc joignant d_1 à d_2 sur Ψ ; le parcours du complémentaire de cet arc sur Ψ revient à balayer le complémentaire de s_X sur d_X .

Considérons le balayage du complémentaire de s_A sur sa droite support. La droite en mouvement passe par une position parallèle à d_A , que l'on note d'_A , quand leur point d'intersection se trouve à l'infini. De même, Ψ contient exactement une droite parallèle à d_B (d'_B) et à d_C (d'_C) et ces trois points coupent Ψ en trois parties. L'ordre dans lequel les droites supportant les segments sont rencontrées est différent sur chacun de ces morceaux : au passage par d'_X , la position de la droite d_X dans la permutation géométrique change (selon une permutation circulaire). Comme d_1 et d_2 réalisent la même permutation géométrique des trois segments, et donc de leurs droites support, ils appartiennent à la même portion de Ψ et on peut les relier par un chemin ne contenant aucun des d'_X . Chacune des droites de ce chemin intersecte donc les segments s_A , s_B et s_C et ce suivant le même ordre que d_1 et d_2 .

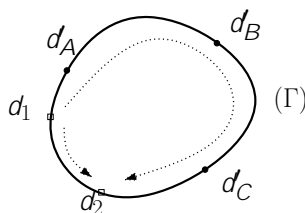


FIG. 9.4. Une famille de réglages d'une quadrique vue comme courbe dans l'espace des droites.

Si la courbe Ψ est ouverte, alors la surface engendrée par les droites de Ψ ne contient aucune droite parallèle à d_A , d_B ou d_C (c'est un paraboloidé hyperbolique). Par conséquent, les droites de l'unique chemin reliant d_1 à d_2 intersectent les segments s_A , s_B et s_C , et ce suivant le même ordre que d_1 et d_2 . \square

Décrire des occultations au sein d'objets convexes disjoints revient donc à séparer les composantes connexes de droites intersectant des triplets d'objets. Un *plan séparateur* d'une paire d'objets est un plan qui définit deux demi-espaces dont les fermetures contiennent chacune un des objets. Soit A , B et C trois objets convexes disjoints. Considérons H et H' des plans séparateurs de A et B et de B et C respectivement, \vec{n} une normale à H orientée vers le demi-espace contenant B et \vec{n}' une normale à H' orientée vers le demi-espace contenant C (cf. figure 9.5). Alors toute droite qui rencontre B entre A et C est dans l'ensemble

$$\left\{ (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}) \in \Gamma \mid ((p_{01}, p_{02}, p_{03}) \cdot \vec{n})((p_{01}, p_{02}, p_{03}) \cdot \vec{n}') \geq 0 \right\}.$$

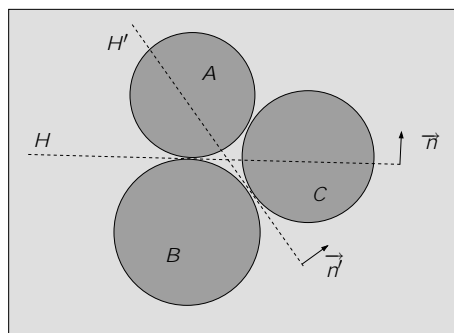


FIG. 9.5. Plans séparateurs permettant de définir un entonnoir de séparation d'un triplet de sphères (A, B, C).

Nous appelons un tel ensemble un *entonnoir de séparation* du triplet (A, B, C) . Notons que la contrainte que nous imposons s'exprime pour des droites non-orientées. Un entonnoir de séparation est l'intersection de deux demi-espaces de \mathbb{P}^5 avec la quadrique de Plücker.

Lemme 75. *L'ensemble $Oc(A, B, C)$ est l'ensemble des droites intersectant A, B et C contenues dans un entonnoir de séparation de (A, B, C) .*

Démonstration. Évident. □

9.1.3 Traduction algébrique grâce aux coordonnées de Plücker

Nous n'avons pour l'instant fait aucune hypothèse sur la manière dont sont donnés les objets courbes considérés. Nous nous intéressons ici au cas d'objets décrits par des équations polynomiales.

Rappelons tout d'abord quelques définitions. Un *ensemble algébrique* est l'ensemble des points satisfaisant une formule booléenne ayant pour opérandes un nombre fini d'égalités polynomiales. Un *ensemble semi-algébrique* est l'ensemble des points satisfaisant une formule booléenne ayant pour opérandes un nombre fini d'égalités ou inégalités polynomiales.

Nous définissons un *objet algébrique* comme un ensemble semi-algébrique défini par une unique inégalité polynomiale $P \leq 0$. Nous considérons les objets comme étant fermés et l'inégalité est donc large. Le *bord* d'un objet algébrique est l'ensemble des points satisfaisant $P = 0$, et est donc un ensemble algébrique. L'*intérieur* d'un objet algébrique est l'ensemble des points satisfaisant $P < 0$.

L'ensemble des droites tangentes à un objet algébrique convexe borné de degré d est, dans l'espace des droites, une hypersurface algébrique et de degré $d(d-1)$ (cf. Pottmann et Wallner [78, Chapitre 7]). Le lemme suivant décrit explicitement cet ensemble sur Γ , la quadrique de Plücker.

Lemme 76. *Soit A un objet algébrique convexe borné défini par un polynôme de degré d . Il existe un polynôme homogène Q_A de degré au plus $d(d-1)$ tel que le signe de Q_A en un point $(p_{ij}) \in \Gamma$ indique si la droite correspondante intersecte l'intérieur de A (si $Q_A(p_{ij}) < 0$), est tangente à A (si $Q_A(p_{ij}) = 0$) ou n'intersecte pas A (si $Q_A(p_{ij}) > 0$).*

Démonstration. Soit $E \leq 0$ l'objet A . Soit L une droite réelle de direction \vec{s} et passant par un point b tel que $\vec{Ob} \cdot \vec{s} = 0$, où O désigne l'origine du repère de \mathbb{R}^3 . L est paramétrée par

$$\left\{ \vec{Ob} + t\vec{s} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cette paramétrisation s'exprime entièrement au moyen des coordonnées de Plücker de L :

$$(\vec{s}, \vec{Ob} \times \vec{s}) = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12})$$

car $\|\vec{s}\|^2 \vec{Ob} = \vec{s} \times (\vec{Ob} \times \vec{s})$.

Le bord ∂A de A est la surface d'équation $E = 0$. En injectant la paramétrisation de L dans E , on obtient un polynôme $N(t) = 0$ de degré d . Les coefficients de N sont des fractions rationnelles en les p_{ij} et ses solutions réelles, en la variable t , correspondent à des intersections réelles entre L et ∂A . Ainsi, la droite L est tangente à la surface ∂A si et seulement si le polynôme N a au moins une racine réelle multiple.

Pour caractériser les droites tangentes, on peut simplement calculer le discriminant de N (i.e. le résultant de N et N' à une constante près) ; son numérateur, un polynôme de degré $d(d-1)$ en les p_{ij} , est l'équation R d'une hypersurface algébrique de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$. Les droites réelles tangentes

à ∂A sont celles dont les coordonnées de Plücker annulent R . Autrement dit, c'est l'intersection de Γ avec l'hypersurface de \mathbb{P}^5 d'équation $R = 0$.

L'hypersurface d'équation $R = 0$ partitionne Γ en deux composantes connexes, l'une correspondant aux droites intersectant l'intérieur de A et l'autre aux droites n'intersectant pas A du tout. Quitte à changer R en $-R$, on peut s'assurer que ces ensembles sont les intersections de Γ avec, respectivement, les ensembles $R < 0$ et $R > 0$. Nous prenons donc $Q_A = R$. \square

Notons qu'un polynôme satisfaisant les propriétés du lemme 76 n'est pas unique. En particulier, si Q convient alors tout élément de l'idéal engendré par Q et l'équation de la quadrique de Plücker convient. Notre procédé de construction de Q_A est simple et aboutit à un polynôme de degré au plus $d(d-1)$. Dans la mesure où le degré de tout plongement de cet ensemble de droites est au minimum $d(d-1)$, le degré de notre construction est au plus deux fois l'optimal. Si A est une sphère de centre (a, b, c) et de rayon r , Q_A est donné par la formule suivante :

$$Q_A = (p_{23} + p_{02}c - p_{03}b)^2 + (p_{31} + p_{03}a - p_{01}c)^2 + (p_{12} - p_{02}a + p_{01}b)^2 - r^2(p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2).$$

Le lemme 76 généralise donc la notion de *side-operator* (cf. annexe A). En effet, la propriété du *side-operator* permet de voir l'ensemble des droites intersectant une droite donnée comme la trace sur Γ d'un hyperplan. Ainsi, l'hypersurface des tangentes à un triangle est un sous-ensemble de la trace de trois hyperplans de \mathbb{P}^5 sur Γ . De même, l'arrangement dual d'une famille de triangles est un sous-ensemble de la trace sur Γ de l'arrangement des hyperplans associés aux droites support de leurs côtés. Pellegrini [69] a proposé une structure de lancer de rayons sur des triangles en 3D basée sur cette observation. Le lemme 76 permet d'étendre cette approche à des objets non-linéaires, en explicitant l'arrangement dual comme la trace sur Γ d'un arrangement d'hypersurfaces algébriques.

Par ailleurs, nous pouvons expliciter $Oc(A, B, C)$ dans le cas d'objets algébriques.

Lemme 77. *Soit A, B et C trois objets algébriques convexes, disjoints et bornés et $H_{A,B,C}$ un de leurs entonnoirs de séparation. L'ensemble $Oc(A, B, C)$ est :*

$$Oc(A, B, C) = \{Q_A \leq 0\} \cap \{Q_B \leq 0\} \cap \{Q_C \leq 0\} \cap H_{A,B,C}.$$

Démonstration. Nous injectons simplement les polynômes Q dans l'ensemble obtenu par le lemme 75. \square

9.2 Représentation des faces du complexe

Notre approche consiste à décrire une face du complexe par sa projection dans l'espace des droites qui est, comme nous l'avons déjà souligné, l'union de plusieurs faces de l'arrangement dual. La complexité de l'arrangement dual complet est *a priori* sans rapport avec la complexité d'une face particulière du complexe de visibilité. Nous voyons ici comment ne retenir de l'arrangement dual que les hypersurfaces de tangentes utiles à la représentation d'une face donnée.

Nous supposons toujours que nos objets sont convexes, bornés et disjoints. Dans le cas où il s'agit d'objets algébriques, nous explicitons notre représentation sous la forme d'un ensemble semi-algébrique. Nous considérons dans cette section les faces du complexe de dimension 3 ou moins, les cellules de dimension 4 étant traitées à part en section 9.3

Nous commençons par traiter le cas d'une face en section 9.2.1. Nous présentons ensuite, en section 9.2.2, une méthode pour grouper les faces en paquets qui se projettent en faces d'un même arrangement. Ces paquets présentent une structure hiérarchique qui simplifie le calcul de leurs représentations ; nous la détaillons en section 9.2.3.

9.2.1 Arrangement associé à une face

Introduisons tout d'abord un peu de terminologie. Les supports d'un segment libre maximal sont les objets supportant ses extrémités, éventuellement l'infini ; nous considérons pour simplifier la rédaction que l'infini est un objet noté ∞ . Les *supports* d'une cellule sont les objets supportant les extrémités de ses segments. Un objet est un *générateur* d'une face s'il est tangent à tous ses segments libres maximaux. Un objet est un *bloqueur* d'une face s'il est un générateur d'une face de son bord. Étant donnée une face \mathcal{K} du complexe, nous notons $S(\mathcal{K})$ ses supports, $G(\mathcal{K})$ ses générateurs et $B(\mathcal{K})$ ses bloqueurs. La définition de «générateur» concorde avec celle proposée au chapitre 4 dans le cas de convexes généraux. Un sommet du complexe n'a aucun bloqueur et un arc a au plus deux bloqueurs. Une face de dimension k a au moins $4 - k$ générateurs, et exactement $4 - k$ si les objets sont en position générique.

Il est possible de visualiser les faces du complexe de visibilité dans l'espace des droites, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 78. *La projection dans l'espace des droites induit une bijection entre toute face du complexe de visibilité de dimension au plus 3 et son ensemble de droites support.*

Démonstration. Tout segment libre maximal d'une face de dimension au plus 3 est tangent à au moins un objet. Toute droite tangente à cet objet supporte exactement un segment libre maximal contenant les points de tangence. La projection est donc injective, et elle est évidemment surjective sur son image. \square

La projection d'une face du complexe correspond à l'union de faces de l'arrangement dual, comme nous l'avons signalé en section 9.1.1. Cependant, certaines hypersurfaces de tangentes peuvent intervenir dans cette projection sans que l'objet associé ne soit significatif (cf. figure 9.1). Nous associons donc à toute face du complexe de visibilité un sous-arrangement de l'arrangement dual obtenu en ne retenant que certaines de ses hypersurfaces.

Soit \mathcal{K} une face du complexe de visibilité de convexes disjoints. L'*arrangement associé* à \mathcal{K} est l'arrangement induit par les hypersurfaces de tangentes des objets de $B(\mathcal{K})$ sur l'intersection des hypersurfaces de tangentes des objets de $G(\mathcal{K})$. Comme l'indique le lemme suivant, l'arrangement associé d'une face suffit à décrire sa projection dans l'espace des droites.

Lemme 79. *La projection d'une face du complexe de visibilité est l'union de plusieurs faces de son arrangement associé.*

Démonstration. Soit \mathcal{K} une cellule du complexe de visibilité. La droite supportant un segment libre maximal de \mathcal{K} est tangente à chacun des objets de $G(\mathcal{K})$, et est donc sur l'intersection de leurs hypersurfaces de tangentes. Un segment libre maximal qui se déplace à l'intérieur de \mathcal{K} atteint son bord quand il devient tangent à un bloqueur. Aussi le bord de \mathcal{K} est projeté en des faces de son arrangement associé, et le lemme s'ensuit. \square

Dans le cas où les objets sont algébriques, nous pouvons exprimer la projection d'une face \mathcal{K} comme un ensemble semi-algébrique.

Lemme 80. *Une face \mathcal{K} du complexe de visibilité se projette en une composante connexe de l'ensemble*

$$\bigcap_{A \in G(\mathcal{K})} \{Q_A = 0\} \cap \bigcap_{A \in S(\mathcal{K})} \{Q_A < 0\} \setminus \bigcup_{A \in B(\mathcal{K}), S(\mathcal{K}) = \{S_1, S_2\}} Oc(S_1, A, S_2).$$

Démonstration. Nous traduisons simplement le résultat du lemme 79 au moyen du lemme 76. \square

Pour obtenir une représentation exacte d'une face il nous faut «filtrer» les composantes connexes indésirables. Toutefois, une composante connexe d'un ensemble semi-algébrique est un ensemble semi-algébrique et il existe des méthodes constructives générales permettant d'en obtenir une description semi-algébrique (voir par exemple Basu et al. [10]). Un tel filtrage nous semble inévitable si l'on n'introduit aucune hypersurface autre que les hypersurfaces de tangentes. Nous avons d'ailleurs été confrontés à ce problème lors de la description des sommets du squelette de visibilité 3D de polytopes, au chapitre 8. La donnée des générateurs (arêtes ouvertes ou sommets) peut être vue comme la donnée des hypersurfaces de tangentes, et nous avons eu recours à des «boîtes englobantes» pour isoler la composante connexe qui nous intéressait.

9.2.2 Les clusters

Les lemmes 79 et 80 décrivent les faces du complexe de visibilité en utilisant des arrangements différents pour chacune d'entre elles. Nous proposons ici de considérer des groupes de faces sur lesquels la projection dans l'espace des droites reste bijective. Nous décrivons alors les faces d'un groupe au moyen d'un même sous-arrangement de l'arrangement dual.

Le *cluster* de générateurs \mathcal{G} est l'union des faces ayant \mathcal{G} pour ensemble de générateurs. Comme l'injectivité dans le lemme 78 est garantie par le fait que les segments d'une face sont tangentes à un même objet, il est naturel de grouper ensemble les faces de mêmes générateurs si l'on souhaite que la projection reste injective. Les faces de mêmes générateurs sont de même dimension ; nous définissons donc naturellement la *dimension* d'un cluster comme celle de ses faces. Un k -cluster désigne un cluster de dimension k .

Les *bloqueurs* d'un cluster sont les objets qui apparaissent entre deux de ses générateurs dans au moins une permutation géométrique réalisée par les droites tangentes à tous les générateurs. On notera que l'ensemble des bloqueurs d'un cluster n'est pas simplement l'union des bloqueurs des faces dont il est l'union. La figure 9.6 montre un exemple de cluster ayant des bloqueurs n'apparaissant pas comme bloqueurs des faces qui le composent : si l'objet B est omis comme bloqueur, la visibilité entre A et F devient possible le long de ℓ .

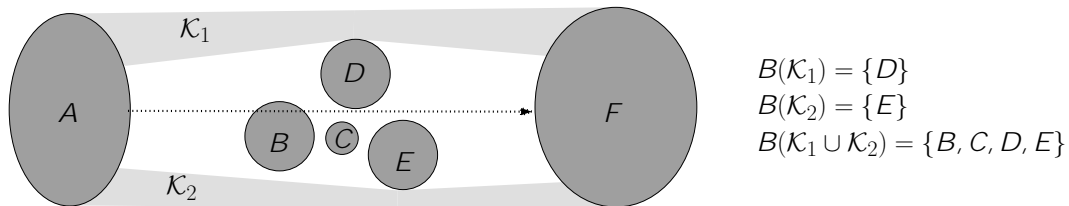


FIG. 9.6. Les bloqueurs d'un cluster ne sont pas seulement ceux des faces qui le composent.

L'*arrangement associé* à un cluster \mathcal{K} est l'arrangement induit par les hypersurfaces de tangentes associées aux objets de $B(\mathcal{K})$ sur l'intersection des hypersurfaces de tangentes associées aux objets de $G(\mathcal{K})$. Cet arrangement permet de décrire la projection du cluster dans l'espace des droites et, mieux encore, celles des faces du complexe qui le composent.

Lemme 81. *Un cluster \mathcal{K} se projette en un ensemble de faces de son arrangement associé. Les faces du complexe qui composent \mathcal{K} se projettent en les composantes connexes de cet ensemble de faces.*

Démonstration. Le raisonnement est le même que pour le lemme 79. □

Si les objets sont algébriques, nous pouvons donner une description explicite de la projection d'un cluster de dimension 2 ou moins (et de ses faces) comme ensemble semi-algébrique.

Lemme 82. *Un cluster \mathcal{C} de dimension 2 ou moins se projette en l'ensemble*

$$\bigcap_{A \in G(\mathcal{C})} \{Q_A = 0\} \setminus \bigcup_{A \in B(\mathcal{C}), \{G_1, G_2\} \in G(\mathcal{C})} Oc(G_1, A, G_2)$$

et les faces du complexe qui le composent se projettent en les composantes connexes de cet ensemble.

Démonstration. Nous traduisons simplement le résultat du lemme 81 au moyen du lemme 76. \square

Nous pouvons donc décrire un cluster sans avoir à filtrer des composantes connexes «indésirables». Cependant, si nous souhaitons décrire une face individuellement, il nous faut isoler la composante connexe qui lui correspond.

Certains bloqueurs sont “cachés” par d'autres. Dans l'exemple de la figure 9.6, on peut omettre l'objet C car il ne voit ni A , ni F . Dans l'espace des droites, l'ensemble des droites rencontrant un bloqueur entre les générateurs est obtenu comme union des paquets de droites interceptés par chaque objet. Certains de ces paquets de droites sont recouverts par l'union des autres, et leur contribution peut donc être omise car elle est redondante. La recherche d'une famille *minimale* de bloqueurs au sens de l'inclusion est relativement simple : il suffit de considérer les bloqueurs tour à tour et de les éliminer s'ils sont couverts par les bloqueurs restants. La recherche d'une famille *optimale*, c'est-à-dire ayant un nombre minimum d'objets, semble plus difficile, aussi nous nous contentons de familles minimales.

9.2.3 Clusters voisins

Le bord d'un cluster représente le bord des faces qui le composent. Pour traduire cette observation en propriété sur les clusters, introduisons une nouvelle notion : deux clusters A et B sont *voisins* s'ils sont de même dimension et si les générateurs de l'un, par exemple A , sont obtenus en remplaçant un générateur de B par un de ses bloqueurs. Les paires de clusters voisins permettent en fait de calculer les clusters de dimension inférieure.

Lemme 83. *Pour $k = 1, 2$, les projections des $(k - 1)$ -cluster dans l'espace des droites sont les intersections des clôtures des projections des paires de k -clusters voisins.*

Démonstration. Soit A et B deux k -clusters voisins. Soit ℓ une droite de l'intersection des clôtures de leurs projections ; ℓ est tangente aux objets de $G(A) \cup G(B)$ et supporte un segment libre entre ses points de tangence sur les générateurs de A , et un segment libre entre ses points de tangence sur les générateurs de B . Comme A et B ont au moins un générateur en commun, cela implique que ℓ supporte un segment libre maximal tangent aux objets de $G(A) \cup G(B)$. Donc ℓ est dans la projection du $(k - 1)$ -cluster de générateurs $G(A) \cup G(B)$.

Réciproquement, considérons un segment libre maximal d'une cellule de générateurs $G(A) \cup G(B)$. La projection de ce segment est une droite ℓ qui est tangente aux générateurs de A et contient un segment libre entre les points de tangence. Par conséquent, ℓ est dans la clôture de la projection de A . De même, ℓ est dans la clôture de la projection de B .

Nous obtenons finalement que les clôtures des projections de deux k -clusters voisins est un $(k - 1)$ -cluster. \square

Si les objets sont en position générique au sens où l'ensemble des droites tangentes à k d'entre eux est soit vide soit de dimension $4 - k$, le lemme 83 indique en outre qu'un $(k - 1)$ -cluster est l'intersection de toute paire de k -clusters qui lui sont incidents (et ces k -clusters sont voisins).

9.3 Extensions

Nous généralisons dans cette section notre méthode de représentation des faces du complexe aux cellules de dimension 4, en section 9.3.1. Nous indiquons ensuite comment décrire les cellules et paquets de cellules comme ensembles semi-algébriques quand les objets sont eux-mêmes donnés sous la forme d'ensembles semi-algébriques, en section 9.3.2. Nous discutons enfin l'extension de cette approche à des objets non convexes ou non disjoints en section 9.3.3.

9.3.1 Cellules de dimension 4

La description des cellules du complexe de dimension 4 demande quelques adaptations de notre méthode. La principale difficulté provient du fait que la projection d'une cellule de dimension 4 sur l'espace des droites peut ne pas être injective (*cf.* les segments étiquetés f et f' de la figure 9.7). Les cellules pour lesquelles la projection n'est pas injective ont dans leurs supports une seule copie de ∞ . Nous désignons ces cellules sous le nom de *cellules frontières*, et suggérons trois approches pour les gérer.

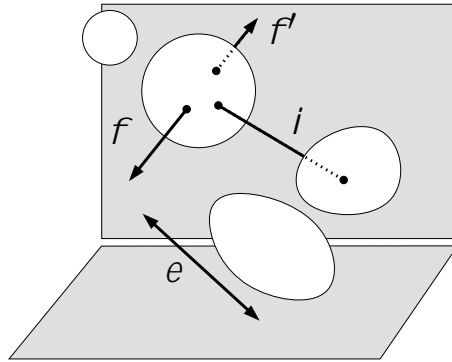


FIG. 9.7. Les types de 4-cellules du complexe de visibilité : intérieure (i), frontière (f et f') et extérieure (e).

La première solution est de considérer le *complexe de visibilité projectif*, autrement dit autoriser la visibilité «par l'infini». Cela revient à fusionner, dans une cellule frontière, les paires de demi-droites libres supportées par la même droite en un seul segment libre maximal. L'inconvénient de cette approche est qu'en autorisant la visibilité «par l'infini», on peut introduire de nouvelles subdivisions dans le complexe. Pire encore, les tailles des complexes de visibilité projectif et affine d'une même scène peuvent être sans rapport (*cf.* figure 9.8).

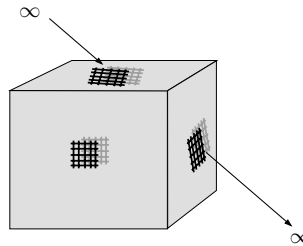


FIG. 9.8. Une scène pour laquelle la taille du complexe projectif (d'ordre quartique) est bien plus grande que celle du complexe affine (d'ordre quadratique).

Une seconde solution consiste à remplacer ∞ par plusieurs objets, typiquement les faces d'un cube englobant. Cela subdivise les cellules supportées par l'infini au changement de face du cube, et cette subdivision garantit l'injectivité de la projection. L'inconvénient de cette méthode est que les subdivisions introduites affectent aussi les faces de dimension 3 et moins.

La troisième solution, que nous adoptons par exemple dans l'algorithme du chapitre 10, est de recourir à l'espace des droites orientées. Pour décrire une cellule de dimension 4 entre les objets A et ∞ , nous considérons tout segment libre maximal comme orienté de A vers ∞ et le projetons sur sa droite support de même orientation. L'espace des droites orientées est paramétré par les coordonnées de Plücker considérées dans \mathbb{P}_+^5 , espace projectif orienté de dimension 5 qui représente les vecteurs de \mathbb{R}^6 à multiplication par un scalaire *positif* près.

Sous réserve d'utiliser les droites orientées pour décrire les cellules frontières, les résultats de la section 9.2.1 s'étendent immédiatement aux cellules de dimension 4. En particulier, les lemmes 79 et 80 permettent de les représenter.

Nous définissons un 4-cluster de générateurs \mathcal{G} comme l'union des cellules de dimension 4 dont les supports sont les objets de \mathcal{G} . Les générateurs d'un 4-cluster \mathcal{K} , c'est-à-dire les supports communs à ses cellules, sont notés $G(\mathcal{K})$ et les *bloqueurs* sont définis de manière similaire au cas des k -clusters avec $k \leq 3$. L'*arrangement associé* à un 4-cluster \mathcal{K} est l'arrangement des hypersurfaces de tangentes associées à ses générateurs et ses bloqueurs. Les lemmes 81 et 82 se traduisent alors de la manière suivante.

Lemme 84. *Un 4-cluster \mathcal{K} se projette en un ensemble de cellules de son arrangement associé. Les cellules du complexe qui composent \mathcal{K} se projettent en les composantes connexes de cet ensemble de cellules.*

Démonstration. Analogue à la preuve du lemme 79. □

Si les objets sont algébriques, nous pouvons donner une description explicite de la projection d'un 4-cluster (et de ses cellules) comme ensemble semi-algébrique.

Lemme 85. *Un 4-cluster \mathcal{C} se projette en l'ensemble*

$$\bigcap_{A \in G(\mathcal{C})} \{Q_A < 0\} \setminus \bigcup_{A \in B(\mathcal{C}), G(\mathcal{C}) = \{S_1, S_2\}} Oc(S_1, A, S_2)$$

et les faces du complexe qui le composent se projettent en les composantes connexes de cet ensemble.

Démonstration. Analogue à la preuve du lemme 80. □

9.3.2 Objets semi-algébriques

Si les objets sont des ensembles semi-algébriques, tout en restant convexes, disjoints et bornés, il est possible de donner une description semi-algébrique de la projection des faces du complexe de visibilité et des clusters.

Un ensemble semi-algébrique A s'obtient par unions, intersections et complémentaires d'objets algébriques. La construction du lemme 76 permet donc d'obtenir explicitement pour chacun de ces objets une hypersurface de l'espace des droites, même si les objets ne sont ni convexes ni bornés. L'ensemble des droites qui intersectent, sont tangentes ou n'intersectent pas A correspond à l'union de cellules de l'arrangement de ces hypersurfaces. Ce sont donc des ensembles semi-algébriques qu'il est possible (mais compliqué) d'expliciter. Ces ensembles peuvent remplacer les expressions $Q_A < 0$, $Q_A = 0$ et $Q_A > 0$ dans les lemmes 80 et 82. Notre démarche permet

donc de traiter les objets donnés comme ensembles semi-algébriques mais cela peut donner lieu à des expressions compliquées.

9.3.3 Objets non convexes ou s'intersectant

Objets non convexes. La convexité des objets intervient, dans notre approche, pour garantir l'injectivité de la projection sur l'espace des droites. Notons que la convexité des objets est exactement la propriété requise (que toute droite intersecte un objet en un seul segment) et pas une condition plus forte garantissant que tout se passe bien.

Il nous semble envisageable d'étendre notre raisonnement à des objets non-convexes de deux manières. On peut d'une part exprimer les objets non-convexes comme union d'objets convexes d'intérieurs disjoints, ce qui permet d'utiliser l'approche que l'on vient de décrire. Le problème est bien évidemment de calculer une telle décomposition. L'alternative est de décomposer les faces du complexe de manière à préserver la bijection. Pour cela, Durand et al. [40] suggèrent l'utilisation d'outils standard comme la décomposition cylindrique algébrique (CAD), ce qui est conceptuellement simple, mais coûteux.

Un examen attentif du lemme 76 indique que l'arrangement dual fournit en fait une décomposition adaptée des faces du complexe. Chacune d'entre elles se projette, dans l'espace des droites, en une ou plusieurs faces de l'arrangement dual. Comme une face de cet arrangement représente un ensemble de droites qui intersectent les objets de la scène de la même manière, le cardinal de la fibre de la projection est constant. Les images des faces de l'arrangement par la réciproque de la projection partitionnent donc la face du complexe en morceaux sur lesquels la projection est injective.

La décomposition des objets en union de convexes induit une partition des faces du complexe qui est en fait un raffinement de celle obtenue en considérant l'espace des droites.

Intersections. La gestion des objets d'intérieurs non disjoints soulève principalement une difficulté : manipuler les points d'intersection entre droites et objets.

D'une part, si les intérieurs des objets peuvent s'intersecter la correspondance entre composantes connexes de droites et permutations géométriques du lemme 74 n'est plus valide. La description des ensembles de droites bloquées ne peut donc se ramener à un simple examen des composantes connexes, mais fait plutôt intervenir des conditions comparant les points d'intersection de la droite avec les objets considérés.

D'autre part, la simple description de l'ensemble des droites contenant un segment libre maximal tangent à un objet A pose la même difficulté : il faut s'assurer que le point de tangence n'est intérieur à aucun des objets qui intersectent A .

Des conditions portant sur les points d'intersection d'une droite avec les objets de la scène peuvent s'exprimer algébriquement en terme des coordonnées de Plücker de la droite, sous réserve que les objets soient semi-algébriques. Cependant, ces points d'intersections apparaissent comme les solutions d'un système d'équations algébriques dont les coefficients sont déterminés par la droite et les objets. On peut donc s'attendre à ce que toute condition portant sur ces points, comme par exemple leur comparaison le long de la droite, soit de degré élevé.

Chapitre 10

Algorithme de calcul du complexe et du squelette de visibilité

Afin d'étudier le squelette et le complexe de visibilité, il est souhaitable de disposer d'outils permettant de les calculer, ne serait-ce que sur des scènes simples. Le seul algorithme existant de calcul du complexe de visibilité est dû à Durand et al. [40]. Leur méthode est conceptuellement compliquée, il s'agit d'un double balayage d'un espace de dimension 4, et difficile à mettre en œuvre en pratique. Ce chapitre propose des algorithmes de calcul du squelette et du complexe de visibilité d'objets courbes qui sont conceptuellement simples et que nous espérons implantables pour des classes d'objets particuliers, notamment les sphères.

Nos algorithmes suivent la démarche suggérée au chapitre 9 : représenter les faces du complexe par leurs projections dans l'espace des droites, et calculer ces projections par clusters. Ils admettent en entrée des objets algébriques convexes disjoints, et fournissent en sortie le *treillis des faces*, aussi appelé *graphe d'incidence* [50], du complexe ou du squelette. Chaque face est donnée sous forme implicite, comme ensemble semi-algébrique, avec ses incidences.

Nous présentons tout d'abord nos algorithmes en section 10.1 et détaillons les opérations algébriques qu'ils utilisent en section 10.2. Nous établissons ensuite leurs complexités, en section 10.3, puis les comparons à l'algorithme de balayage proposé par Durand et al. [40] en section 10.4. Pour ne pas alourdir la présentation, nous identifions quand le contexte le permet un cluster (ou une cellule) et sa représentation, c'est-à-dire sa projection dans l'espace des droites.

10.1 Les algorithmes

Nous calculons les 2-clusters par énumération des triplets d'objets (en section 10.1.1) puis en déduisons les autres clusters (en section 10.1.2). Nous séparons ensuite les clusters en cellules et retrouvons leurs incidences (en section 10.1.3). Nous supposons dans un premier temps que les objets sont en position générique, c'est-à-dire que l'ensemble des droites tangentes à k objets est soit vide, soit de dimension $4 - k$, puis revenons sur le traitement des cas dégénérés en section 10.1.4.

10.1.1 Calcul des 2-clusters

Le calcul des 2-clusters revient à déterminer les paires d'objets tangentiellement visibles et leurs bloqueurs. Cela revient donc à calculer un *graphe de visibilité tangentielle* généralisé à l'espace 3D.

Nous effectuons ce calcul par une triple boucle. Nous examinons chaque paire d'objets et déterminons ses bloqueurs par simple énumération. Une fois les bloqueurs identifiés, nous testons si l'ensemble semi-algébrique représentant le 2-cluster potentiel est non vide et, le cas échéant, le reportons (*cf.* algorithme 1).

Algorithme 1 Calcul des 2-clusters.

```

for toute paire d'objets  $A_1, A_2$  do
   $U = \{Q_{A_1} = 0\} \cap \{Q_{A_2} = 0\}$ ,  $B(U) = \emptyset$ ,  $G(U) = \{A_1, A_2\}$ 
  for tout objet  $A_3$  distinct de  $A_1, A_2$  do
    if  $Oc(A_1, A_3, A_2) \neq \emptyset$  then
       $U = U \setminus Oc(A_1, A_3, A_2)$ 
      Ajouter  $A_3$  à  $B(U)$ .
    end if
  end for
  if  $U \neq \emptyset$  then
    Ajouter  $U$  aux 2-clusters
  end if
end for

```

Notons que la liste de bloqueur que nous calculons n'est ni optimale, ni même minimale. Il en va donc de même pour la description semi-algébrique du cluster. Notre objectif est d'obtenir un algorithme conceptuellement simple aussi nous n'optimisons pas cette liste de bloqueurs.

10.1.2 Calcul des autres clusters

Les 3-clusters sont au nombre d'un par objet. Le 3-cluster de générateur A s'obtient en ôtant de l'ensemble des droites tangentes à A celles qui sont dans l'adhérence d'un 2-cluster ayant A comme générateur (*cf.* algorithme 2).

Algorithme 2 Calcul des 3-clusters.

```

for tout objet  $A$  do
   $U = \{Q_A = 0\}$ ,  $B(U) = \emptyset$ ,  $G(U) = \{A\}$ 
  for tout objet  $B$  distinct de  $A$  do
    if il existe un 2-cluster  $V$  de générateurs  $\{A, B\}$  then
       $U = U \setminus \overline{V}$ .
      Ajouter  $B$  à  $B(U)$ .
      Marquer  $U$  et  $V$  comme incidents.
    end if
  end for
  Ajouter  $U$  aux 3-clusters.
end for

```

Les 1-clusters sont calculés en exploitant la propriété hiérarchique établie au lemme 83. Nous énumérons donc simplement les paires de clusters voisins, et les intersectons afin d'obtenir les 1-clusters (*cf.* algorithme 3).

Les 0-clusters s'obtiennent à partir des 1-clusters via le lemme 83, de manière similaire à l'algorithme 3. Ici aussi, une certaine redondance apparaît.

Nous déterminons les 4-cluster n'ayant pas ∞ comme générateur par une boucle similaire à l'algorithme 1, l'ensemble U étant simplement initialisé à $\{Q_{A_1} < 0\} \cap \{Q_{A_2} < 0\}$. Les 4-clusters

Algorithme 3 Calcul des 1-clusters.

```

for tout 2-cluster  $U$  de générateurs  $A_1, A_2$  do
  for tout objet  $A_3 \in B(U)$  do
    for tout 2-cluster  $V$  de générateurs  $(A_1, A_3)$  ou  $(A_2, A_3)$  do
       $Z = (\overline{U} \cap \overline{V})$ 
      if  $Z \neq \emptyset$  then
         $B(Z) = B(U) \cup B(V)$ .
         $G(Z) = \{A_1, A_2, A_3\}$ 
        if  $Z$  n'existe pas déjà then
          Ajouter  $Z$  aux 1-clusters.
        end if
        Marquer  $Z$  comme incident à  $U$  et  $V$ .
      end if
    end for
  end for
end for

```

frontières sont obtenus en ôtant de l'ensemble des droites orientées intersectant leur générateur autre que ∞ les autres 4-clusters dont ils sont générateurs ; avant d'effectuer la différence il convient de décrire ces autres 4-clusters par des droites orientées. Le 4-cluster correspondant aux droites libres est obtenu comme le complémentaire, dans l'espace des droites orientées, de l'union des 4-clusters frontière ; une fois ce complémentaire calculé, nous pouvons l'exprimer par des droites non orientées.

10.1.3 Des clusters aux cellules

Passer des clusters aux cellules suppose de séparer leurs composantes connexes et de déterminer les incidences entre cellules à partir des incidences entre clusters. Il s'agit en fait de calculer les cellules des arrangement associés aux 3-clusters, pour le complexe, ou aux 1-clusters, pour le squelette. Le calcul pratique d'arrangements d'hypersurfaces algébriques est un problème difficile, sa mise en oeuvre en dimension 3 pour des surfaces de degré 2 étant un sujet de recherche actuel. Nous proposons donc une méthode ici encore conceptuellement simple à base d'outils de géométrie algébrique réelle.

Deux faces du complexe sont incidentes si et seulement si leurs clusters sont incidents et la projection d'une des faces est contenue dans le bord de la projection de l'autre. Nous éclatons chaque cluster en l'ensemble de ses composantes connexes, qui représentent les cellules dont il est formé. Nous effectuons ensuite les appariement entres composantes connexes de clusters incidents en ayant calculé au préalable un point de chacun d'entre eux. L'ensemble de la démarche est résumée dans l'algorithme 4.

10.1.4 Configurations dégénérées

Nous avons exposé notre algorithme en supposant que l'ensemble des tangentes à k objets est soit vide soit de dimension $4 - k$. Les configurations exclue s'obtiennent en combinant les trois cas de base suivants :

- (i) trois objets avec un ensemble de tangentes de dimension 2,
- (ii) trois objets avec un ensemble fini de tangentes et

Algorithme 4 Extraction des cellules et de leurs incidences.

```

for tout cluster  $U$  do
    Calculer un point par composante connexe de  $U$ .
    Calculer  $CC(U)$ , l'ensemble de ses composantes connexes (avec leur point associé).
end for
for tout cluster  $U$  do
    for tout cluster  $V$  incident do
        Déterminer les éléments de  $CC(U) \times CC(V)$  incidents.
    end for
end for

```

(iii) 4 objets avec un ensemble de tangentes de dimension 1.

Le traitement de ces dégénérescences dépend en partie du type d'objets considéré. Nous proposons une esquisse de traitement général, puis détaillons plus spécifiquement le cas où les objets sont des sphères.

De manière générale, les cas (i) et (iii) se traitent en dissociant la dimension d'un cluster de son nombre de générateurs. Autrement dit, le k -cluster de famille de générateurs \mathcal{G} est l'union des cellules de dimension k ayant \mathcal{G} comme ensemble de générateurs. Observons que deux clusters de dimension différentes peuvent avoir le même ensemble de générateurs. Le cas (ii) quant-à-lui correspond à des sommets qui ne sont pas de degré 6. Le lemme 83 peut ne plus être valide pour les 0-clusters et leur construction hiérarchique doit éventuellement être ajustée. Une solution simple consiste à construire chaque $(k - 1)$ -cluster comme l'union des intersections de paires de k -clusters qui lui sont incidents et non plus comme l'intersection d'une seule de ces paires. Certaines faces peuvent ne pas être incidentes à deux faces de générateurs distincts, et ainsi ne pas apparaître dans ces intersections ; l'utilité de telles faces peut être discutée, et leur traitement ajusté au cas par cas.

Dans le cas où les objets sont des sphères, l'étude que nous effectuons au chapitre 11 simplifie grandement le traitement des dégénérescences. Tout d'abord, une étude dans le même esprit que le lemme 97 montre qu'il n'existe pas de dégénérescence de type (i). Ensuite, le lemme 97 et le théorème 88 impliquent que si 4 sphères admettent un ensemble de tangentes communes de dimension 1, alors cet ensemble est exactement l'ensemble des tangentes à 3 des sphères (n'importe lesquelles). Cela signifie que notre algorithme peut traiter de tels quadruplets en "oubliant" un des générateurs sans que l'ensemble des droites considéré ne s'en trouve altéré. Enfin, les dégénérescences de type (ii) sont simples à caractériser : il s'agit des triplets de sphères telles que chacune est tangente à un des cônes de tangentes dans des plans bitangents aux deux autres sphères (éventuellement un cylindre).

10.2 Les opérations algébriques

L'algorithme exposé en section 10.1 utilise un nombre restreint d'opérations algébriques non triviales que nous passons ici en revue. Nous montrons que chacune de ces opérations concerne une question classique au centre de recherches actives de nos jours et indiquons des algorithmes théoriques existant pour chacune d'entre elle. Nous soulignons les cas où une implantation est disponible et donnons, pour les autres, des arguments suggérant que pour des classes d'objets particuliers, notamment les sphères, il est possible de considérablement simplifier ces méthodes.

10.2.1 Calcul d'un plan séparateur

Le calcul des ensembles $Oc()$ dans l'algorithme 1 demande d'explicitier des entonnoirs de séparation (*cf.* section 9.1.2), c'est-à-dire de séparer les objets. La séparation d'objets convexes par un hyperplan est un problème classique qui a surtout été étudié dans le plan. Dans le cas d'objets algébriques en dimension 3, ce problème se ramène, par dualité, à trouver un point (*i.e.* un hyperplan) dans l'intersection de deux objets algébriques (au sens où nous l'avons défini : ensembles semi-algébriques caractérisés par une unique inégalité). Dans de nombreux cas il existe des solutions *ad hoc* plus simples et plus efficaces ; par exemple, pour séparer deux sphères il suffit de prendre un plan orthogonal à l'axe de leur centre en le barycentre de centres pondérés par les inverses des rayons. Dans tous les cas, cette opération ne fait intervenir qu'un nombre borné de primitives et se traite donc en temps $O(1)$.

10.2.2 Trouver un point par composante connexe

Notre algorithme demande par ailleurs de pouvoir trouver un point par composante connexe d'un ensemble semi-algébrique réel. Plusieurs algorithmes réalisant cette opération ont été proposés, notamment par Basu et al. [11] et par Safey et Schost [34]. Leur complexité est $O(p^{d+1})$ dans le cas le pire où p désigne la taille de l'ensemble semi-algébrique, c'est-à-dire le nombre d'égalités et inégalités intervenant, et d la dimension, c'est-à-dire le nombre d'indéterminées. Une implantation de l'algorithme de Safey et Schost est disponible au sein de la bibliothèque RAG'Lib [33]. Cette opération permet en particulier de tester si un ensemble semi-algébrique est vide.

10.2.3 Séparer les composantes connexes

Nous passons des clusters aux cellules qui les composent par séparation des composantes connexes. Cette opération est en fait cruciale dès que l'on souhaite décrire un objet obtenu automatiquement à partir d'ensembles semi-algébriques. L'algorithme de Basu et al. [10] effectue cette opération en temps $O(p^{d+1})$, où p et d ont le même sens que précédemment. À notre connaissance, aucune implantation n'est cependant disponible.

10.3 Complexité des algorithmes

Nous étudions maintenant la complexité de nos algorithmes. Nous commençons par calculer leur complexité asymptotique dans le cas le pire, puis donnons quelques arguments suggérant un comportement pratique bien en-deçà.

10.3.1 Cas le pire

Soit C_i le nombre de i -clusters et k_i la complexité totale des faces de dimension i de la sortie. Nous désignons par α une borne sur la complexité dans le cas le pire des opérations sur les ensembles semi-algébriques réels. Comme signalé en section 10.2, α est $O(n^5)$ car chaque ensemble semi-algébrique comporte au plus $O(n)$ équations ou inéquations et il y a au plus 4 variables libres. Nous exprimons la complexité de nos algorithmes en fonction de n (le nombre d'objets), des C_i , des k_i et de α (*cf.* tableau 10.1). Nous supposons notamment que le degré des objets, c'est-à-dire de l'équation définissant leur bord, est borné.

Opération	Complexité
Expression des 2-clusters	$O(n^3 + n^2\alpha)$
Calcul des 1-clusters	$O(k_2\alpha \log n + k_1)$
Calcul des 0-clusters	$O(k_1\alpha \log n + k_0)$
Extraction des incidences (squelette)	$O((C_0 + C_1)\alpha + k_1\alpha)$
Calcul du squelette de visibilité	$O(n^3 + (n^2 + C_0)\alpha + (k_2 + k_1)\alpha \log n)$
Déduction des 3-clusters	$O(k_2)$
Calcul des 4-clusters	$O(n^3 + n^2\alpha + k_4)$
Extraction des incidences (complexe)	$O((k_4k_3 + k_3k_2 + k_2k_1)\alpha)$
Calcul du complexe de visibilité	$O(n^3 + (k_4k_3 + k_3k_2 + k_2k_1)\alpha)$

TAB. 10.1. Complexité dans le cas le pire des différentes étapes de nos algorithmes.

Le calcul des 2-clusters comporte une énumération des triplets d'objets construisant les clusters potentiels, de complexité $O(n^3)$, suivi pour chacun d'entre eux d'un test vérifiant qu'il est non vide, de complexité $O(n^2\alpha)$.

Le nombre de fois qu'un 2-cluster est utilisé comme premier terme d'une intersection dans le calcul des 1-clusters est borné par son nombre de bloqueur et donc par sa complexité. Le coût du calcul des 1-clusters est donc $O(k_2\alpha \log n + k_1)$, le terme logarithmique provenant de la vérification de l'existence d'un cluster. Par le même argument, le coût du calcul des 0-clusters est $O(k_1\alpha \log n + k_0)$.

L'extraction des cellules de dimension i est faite en temps $O(C_i\alpha)$. La recherche de leurs incidences vers les cellules de dimension $i - 1$ est effectuée en temps $O(k_i d_{i-1}\alpha)$ où d_i désigne le nombre maximal de cellules dans un i -cluster. Comme le degré des objets est borné, le nombre de sommets dans un 0-cluster est lui aussi borné : il suffit d'appliquer le théorème de Bezout au système formé par les équations des hypersurfaces de tangentes des générateurs du cluster et de l'hypersurface de Plücker. Par conséquent, d_0 est $O(1)$ et la complexité du calcul des incidences au sein du squelette se fait en temps $O(k_1\alpha)$.

Nous aboutissons finalement au résultat suivant.

Lemme 86. *Notre algorithme calcule le squelette de visibilité de n objets algébriques de degré borné en temps $O(n^3 + n^2\alpha + |sortie|\alpha \log n)$, où $\alpha = O(n^5)$ désigne la complexité des opérations séparer les composantes connexes et calculer un point par composante connexe d'un ensemble semi-algébrique.*

Observons que pour obtenir le squelette tel que nous l'avons défini au chapitre 4 il convient de calculer aussi les arcs et sommets liés à des contacts d'ordre 2 : les T++T. Pour cela, il suffit de définir, pour chaque 2-cluster de générateurs $\{A, B\}$, un 1-cluster formé des cellules de dimension 1 dont les segments sont tangents à A et B dans un de leurs plans bitangents. La condition qu'une droite soit tangente à deux objets dans un plan bitangent peut elle aussi s'exprimer de manière algébrique. Le calcul de ces clusters n'augmente pas la complexité que nous donnons.

Le calcul des 3-clusters se fait en temps $O(k_2)$, chaque 2-cluster étant pris en compte au plus deux fois.

Le calcul des 4-clusters n'ayant pas ∞ dans leurs générateurs se fait en temps $O(n^3 + n^2\alpha)$, de même que le calcul des 2-clusters. Le calcul des 4-clusters frontières, c'est-à-dire entre un objet

et ∞ , se fait en temps $O(k_4 + n\alpha)$, de manière analogue au calcul des 3-clusters. Le calcul du 4-cluster ayant ∞ pour seul générateur se fait en temps $O(k_4)$.

Par le même argument que précédemment, les cellules de dimension i sont extraites en temps $O(C_i\alpha)$ et leurs incidences vers les cellules de dimension $i - 1$ sont trouvées en temps $O(k_i d_{i-1})\alpha$. La borne triviale sur les d_i pour $i = 1, \dots, 3$ est $O(k_i)$, les phénomènes d'occultations pouvant subdiviser une composante connexe de tangentes en de nombreux morceaux. L'extraction des cellules et de leurs incidences, pour le calcul du complexe, prend donc un temps $O((k_4 k_3 + k_3 k_2 + k_2 k_1)\alpha)$.

Nous aboutissons finalement au résultat suivant.

Lemme 87. *Notre algorithme calcule le complexe de visibilité de n objets algébriques de degré borné en temps $O(n^3 + |\text{sortie}|^2\alpha)$, où $\alpha = O(n^5)$ désigne la complexité des opérations séparer les composantes connexes et calculer un point par composante connexe d'un ensemble semi-algébrique.*

10.3.2 Considérations pratiques

Le comportement pratique de nos algorithmes n'est pas nécessairement reflété par leur complexité dans le cas le pire. Les travaux exposés en partie II indiquent notamment que pour les modèles probabilistes étudiés, le nombre d'objets intersectant l'enveloppe convexe de deux objets mutuellement visibles est borné. Une telle hypothèse implique que le nombre p d'hypersurfaces intervenant dans les expressions des clusters est lui aussi borné et donc $\alpha = O(1)$. Par ailleurs, cette hypothèse permet aussi de borner le nombre de cellules d'un cluster par une constante. La complexité du calcul du squelette ou du complexe devient alors $O(n^3 + |\text{sortie}| \log n)$.

10.4 Comparaison avec l'algorithme de Durand et al.

Nous comparons ici notre algorithme de calcul du complexe de visibilité d'objets courbes au seul autre existant, celui de Durand et al. [40]. Ces deux algorithmes ont été proposés dans des perspectives différentes. Celui de Durand et al. a pour but de borner la complexité théorique de la construction du complexe de visibilité. Notre algorithme propose une approche conceptuellement plus simple pour mener à bien ce calcul, en visant une mise en œuvre dans quelques cas particuliers.

Du point de vue de la complexité asymptotique dans le cas le pire, la borne que nous donnons pour notre algorithme est substantiellement moins bonne que la borne en $O(n^3 \log n + |\text{sortie}| \log n)$ que garantissent Durand et al. ; néanmoins, nous avons signalé que pour certains modèles probabilistes de scènes (étudiés à la partie II) la complexité de notre algorithme devient similaires à celle de l'algorithme de Durand et al. (qui reste, elle, inchangée sous cette hypothèse).

Outre la simplicité de son principe, notre algorithme présente comme avantage une grande clarté sur les constructions algébriques requises. Ces opérations sont peu nombreuses et de portée générale, comme le prouve leur étude intensive dans la communauté de géométrie algébrique réelle effective. Par comparaison, les opérations utilisées dans l'algorithme de Durand et al. sont spécifiques au problème du calcul du complexe de visibilité 3D et demanderaient une étude spécifique.

Notre approche relie le calcul du complexe de visibilité à des problèmes d'intérêt plus large, lui permettant de bénéficier d'éventuelles avancées dans ces domaines. D'une part, nous ramenons le calcul du complexe à celui d'arrangements de quadriques de \mathbb{P}^5 . Le calcul d'un arrangement de quadriques dans \mathbb{R}^3 est un problème qui fait aujourd'hui l'objet de plusieurs travaux, et les

méthodes obtenues peuvent s'avérer généralisables en dimension supérieure. D'autre part, des trois opérations algébriques que nous utilisons une seule n'est actuellement pas implantée (la séparation des composantes connexes). Il n'est pas exclu que cela change, par exemple dans des cas particuliers d'intérêt pratique.

Enfin, notre méthode peut permettre de traiter les dégénérescences de manière élégante, comme le montre le cas des dégénérescences au sein d'une famille de sphères développé en section 10.1.4.

Chapitre 11

Positions dégénérées pour un ensemble de sphères

Nous avons vu à l'état de l'art du chapitre 5 que déterminer à quelle condition 4 sphères de rayons arbitraires admettent une infinité de droites tangentes communes est resté un problème ouvert ces dernières années en dépit des efforts qui y ont été consacrés. Nous présentons dans ce chapitre une caractérisation de ces configurations. Nous terminons aussi la description des dégénérescences de ce type pour les ensembles de sphères en montrant par ailleurs que si trois sphères admettent un ensemble de droites tangentes de dimension strictement supérieure à 1, alors deux d'entre elles sont confondues.

La version présentée²⁴ ici est une transcription d'un article [14] actuellement soumis à la conférence *European Symposium on Algorithms*. Ce travail est le fruit d'une collaboration avec Ciprian Borcea, et se prolonge par une étude plus générale [13] des ensembles de droites tangentes à plusieurs quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ et balayant une quadrique.

Préambule

Rappelons tout d'abord quelques notions de géométrie des courbes et surfaces algébriques.

Pour étudier l'ensemble des droites tangentes à une famille d'objets, on commence en général par le reformuler au moyen d'une paramétrisation des droites de \mathbb{R}^3 . Dans l'espace des paramètres, les droites tangentes à un objet forment une hypersurface définie par une équation. En général, la paramétrisation est choisie pour que cette équation soit algébrique. Les tangentes communes à une famille d'objets apparaissent alors comme les zéros communs à une famille de polynômes, ou encore comme l'intersection d'une famille d'hypersurfaces algébriques. Une configuration dégénérée correspond alors à une collection de polynômes ayant une infinité de zéros communs, ou encore à une collection d'hypersurface s'intersectant en autre chose qu'un ensemble fini de points, par exemple une courbe.

Un problème assez proche de la caractérisation des configurations dégénérées est l'étude du nombre maximal de tangentes communes de familles d'objets en position générique. Cette question est généralement étudiée en exprimant les tangentes communes comme zéro d'un système, puis en appliquant le théorème de Bezout qui, pour les systèmes algébriques admettant un nombre fini de solutions, borne ce nombre par le produit des degrés des polynômes. En pratique, ces deux problèmes étudient souvent des propriétés distinctes des mêmes systèmes algébriques.

²⁴La version finale de cette thèse comprendra une traduction complète de cet article.

La branche des mathématiques qui étudie les zéros de systèmes algébriques est la *géométrie algébrique*. Il est fréquent, dans cette discipline, de considérer les solutions des polynômes sur un espace projectif complexe, plus régulier d'un point de vue algébrique (algébriquement clôt notamment). Par exemple, le théorème de Bezout borne le nombre de solutions *complexes* et éventuellement à *l'infini* d'un système. Cette borne reste valide pour le nombre de solutions *affines réelles*, mais peut ne jamais être atteinte.

Considérons un exemple simple de ce contraste. Les points d'intersection de deux ellipses du plan peuvent être obtenus comme les zéros communs de leurs équations cartésiennes, deux polynômes de degré 2. Le théorème de Bezout indique donc que ces points sont au maximum au nombre de 4, borne qui peut être atteinte. Si l'on cherche à décrire les intersections de deux cercles, on aboutit naturellement à la même borne de 4 puisque l'équation cartésienne d'un cercle est de degré 2. Pourtant, deux cercles distincts ont au plus deux points d'intersections réels. Pour comprendre cette disparité, considérons les équations de deux cercles dans le plan projectif (x, y, w) :

$$\begin{aligned}(x - aw)^2 + (y - bw)^2 - r^2w^2 &= 0, \\ (x - Aw)^2 + (y - Bw)^2 - R^2w^2 &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on fixe $w = 0$ pour ne considérer que les solutions à *l'infini*, le système devient :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 0.\end{aligned}$$

Nos deux cercles s'intersectent donc en un point complexe à l'infini de coordonnées projectives $(1, i, 0)$.

Ce problème apparaît aussi lorsque l'on cherche à caractériser les configurations dégénérées. Un système algébrique peut en effet avoir un nombre fini de zéros affines réels mais une infinité de zéros complexes et/ou à l'infini. Par exemple, par le même raisonnement que précédemment on peut s'assurer que *toute* sphère de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ contient la courbe

$$\{w = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}.$$

Par conséquent, l'intersection de toute famille de sphères projectives complexes en dimension 3 contient cette conique complexe à l'infini. Il en résulte que toute famille de sphères projectives complexes admet au moins un ensemble de dimension 1 de droites tangentes communes : les tangente (complexes et à l'infini) à cette conique. L'étude des zéros réels des systèmes algébriques est l'objet de la branche des mathématiques appelée *géométrie algébrique réelle*.

11.1 Introduction

A major issue in geometric computing is to handle degenerate inputs properly in order to design robust algorithms. This often requires recognizing such an input to begin with. In 3D visibility problems, which are ubiquitous in computer graphics and image synthesis, objects with a set of common tangents of improper dimension constitute degenerate configurations, as detailed in the survey of Durand [37]. In this paper, we determine all degenerate configurations of four distinct spheres, that is all configurations of four spheres with infinitely many common tangents.

The study of real lines tangent to basic geometric objects has been very active in recent years. This topic includes two closely related directions of research, namely the characterization of

degenerate configurations and the enumeration of lines satisfying geometric constraints. Usually, these problems are approached by studying the degeneracies and counting the number of solutions of some specific polynomial system. The difficulty often resides in eliminating imaginary solutions, solutions at infinity, and components of positive dimension of solutions in order to retain only real affine solutions.

The case of lines tangent to spheres has been persistently investigated. Macdonald *et al.* [59] proved that four unit spheres have at most 12 common tangents in general, and infinitely many common tangents if and only if the centers are aligned. The bound of 12 was independently obtained by Devillers *et al.* [31]. Examples show that, in the finite case, this bound is tight [31, 59], yet, according to Megyesi [61], it drops to 8 in the case of unit spheres with coplanar but non-collinear centers. However, the upper bound of 12 remains valid when the spheres have arbitrary radii. Sottile and Theobald [88] proved that there are $3 \cdot 2^{n-1}$ complex common tangent lines to $2n - 2$ general spheres in \mathbb{R}^n , and that there exists a choice of spheres with all common tangents real.

Recently, progress has also been made in understanding the varieties of common tangents to spheres and transversals to lines. Theobald [93] described the configurations of three lines and a sphere having infinitely many common tangents/transversals. Next, Megyesi *et al.* [63] characterized the families of two lines and two quadrics of $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ with infinitely many tangents/transversals, and applied their results to the case of two lines and two spheres of \mathbb{R}^3 . Last, Megyesi and Sottile [62] classified the families of one line and three spheres of \mathbb{R}^3 with infinitely many tangents/transversals.

The question of characterizing the positions of four spheres of various radii with infinitely many common tangents remained open. Quoting Theobald [93] : “*We conjecture that there does not exist any configuration with four balls of arbitrary radii, non-collinear centers and infinitely many common tangent lines.*” In this paper, we confirm this expectation and prove

Theorem 88. *Four distinct spheres in \mathbb{R}^3 have infinitely many real common tangent lines if and only if they have aligned centers and at least one real common tangent.*

More precisely we prove that four spheres with infinitely many common real tangents either intersect in a circle, possibly degenerating to a point, or each sphere has a circle of tangency with one and the same quadric of revolution with symmetry axis the line through all centers (see Figure 11.1); such a quadric is *unique* and can be a cone, a cylinder or a hyperboloid of one sheet. Furthermore, the common tangents to the four spheres are exactly the common tangents to any three of them.

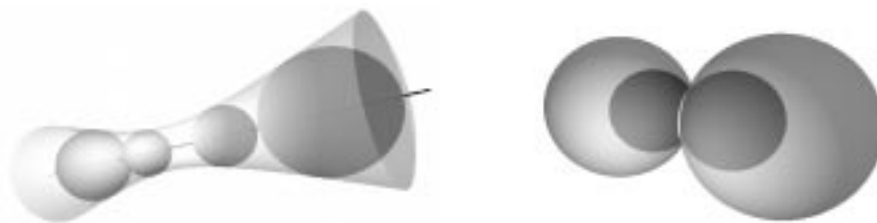


FIG. 11.1. Two examples of quadruples of spheres with infinitely many common tangents.

After introducing some notations and preliminaries in Section 11.2, we treat the case of four spheres with affinely independent centers in Section 11.3. Next, we handle in Section 11.4 the more intricate case of spheres with coplanar centers, no three aligned. Section 11.5 ends the proof

of Theorem 88 with the case of three aligned centers. We obtain, at the same time, the algebraic and semi-algebraic conditions on radii and mutual distances between centers, which characterize four spheres with infinitely many common real tangents.

11.2 Preliminaries

Notations.

Our proofs use points and vectors from \mathbb{R}^n and from the real and complex projective spaces of dimension n , $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ and $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. We make no distinction between a point p and the vector from the origin of the frame to p . For more clarity, we denote an element of \mathbb{R}^n by (a_1, \dots, a_n) , and an element of $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ or $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ by $(a_1 : \dots : a_{n+1})$.

For any two vectors a, b of \mathbb{R}^n , $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, or $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, we denote by $a \cdot b$ their dot product, by $a \times b$ their cross product, and by $|a|^2$ the dot product $a \cdot a$ (note that $|a|^2$ is not the square of the norm of a when a has imaginary coordinates).

Let \mathcal{S}_i denote the sphere of \mathbb{R}^3 with center c_i and radius $r_i > 0$, for $i = 1, \dots, 4$, and (e_1, e_2, e_3) be an orthonormal frame of \mathbb{R}^3 . Without loss of generality, **we assume that c_1 is the origin of our frame**. The *axis* of a set of spheres with aligned centers is the line going through these centers.

Tangents to four spheres.

We begin by reviewing the description of the common tangent lines to four spheres as solutions of a polynomial system, as in [59]. We represent a line in \mathbb{R}^3 by its closest point to the origin $p \in \mathbb{R}^3$ and its direction vector $v \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Let M denote the matrix $[c_2, c_3, c_4]^T$ and Φ_0 and $\Phi_2(v)$ be the vectors

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} |c_2|^2 + r_1^2 - r_2^2 \\ |c_3|^2 + r_1^2 - r_3^2 \\ |c_4|^2 + r_1^2 - r_4^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(v) = - \begin{pmatrix} (c_2 \cdot v)^2 \\ (c_3 \cdot v)^2 \\ (c_4 \cdot v)^2 \end{pmatrix}.$$

Lemma 89. *The lines tangent to the four spheres $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ are the common solutions (p, v) in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ of the equations*

$$p \cdot v = 0, \tag{11.1}$$

$$|p|^2 = r_1^2, \tag{11.2}$$

$$2|v|^2 M p = \Phi_2(v) + |v|^2 \Phi_0. \tag{11.3}$$

Démonstration. A couple $(p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ represents a line if and only if Equation (11.1) is satisfied. A line (p, v) is tangent to sphere \mathcal{S}_i if and only if its squared distance to c_i is r_i^2 that is, if and only if

$$|(c_i - p) \times v|^2 = r_i^2 |v|^2.$$

Expanding this equation yields

$$|c_i \times v|^2 + |p \times v|^2 - 2(c_i \times v) \cdot (p \times v) = r_i^2 |v|^2. \tag{11.4}$$

Applying to $(c_i \times v) \cdot (p \times v)$ the scalar triple product identity $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a)$, then the vector triple product identity $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ and finally using Equation (11.1) we get

$$(p \times v) \cdot (c_i \times v) = c_i \cdot (v \times (p \times v)) = c_i \cdot ((v \cdot v)p - (v \cdot p)v) = |v|^2 c_i \cdot p.$$

Since p and v are orthogonal, $|p \times v|^2 = |p|^2|v|^2$ and thus Equation (11.4) becomes

$$2|v|^2 c_i \cdot p = |c_i \times v|^2 + |v|^2(|p|^2 - r_i^2).$$

As $|c_i \times v|^2 + (c_i \cdot v)^2 = |c_i|^2|v|^2$, we finally get that

$$2|v|^2 c_i \cdot p = -(c_i \cdot v)^2 + |v|^2(|c_i|^2 + |p|^2 - r_i^2). \quad (11.5)$$

Equation (11.5) for $i = 1$ is equivalent to Equation (11.2) since c_1 is the origin of the frame. It follows that the four equations (11.5) for $i = 1, \dots, 4$ are equivalent to the two equations (11.2) and (11.3). \square

The approach used to show that infinitely many tangent lines to spheres can only happen when the centers of the spheres are aligned is as follows. We eliminate p among the equations (11.1)-(11.3), giving two curves¹ in the 2D projective space of directions, whose intersection contains all directions along which a common tangent line to the four spheres is observed. We then prove that, when the centers are non-collinear, the two curves intersect in a finite number of points.

The key idea behind the proofs of Section 11.3 (affinely independent centers) and Section 11.4 (coplanar centers) is that if the two curves, envisaged as complex projective curves, had a common component of positive dimension, this component would intersect the imaginary conic $|v|^2 = 0$ and we show that this is not the case. Intersecting the curve with $|v|^2 = 0$ is inspired by the relation of the Grassmannian of lines in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ with the (p, v) coordinate system, well adapted to the representation of lines in the affine part $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

It should be stressed that any solution to the problem of characterizing sets of four spheres with infinitely many tangent lines must be computational to some extent, because while we are interested in real lines, the “native” system of equations is over \mathbb{C} . Any understanding of the system should involve sensitivity to complex degeneracies. In our proof, computations flow towards revealing such complex degeneracies, but are short-circuited by use of reality assumptions.

11.3 Affinely independent centers

We first investigate the case of spheres with affinely independent centers.

Proposition 90. *Four spheres with affinely independent centers have at most twelve common tangent lines.*

Démonstration. First note that matrix M is invertible since the spheres have affinely independent centers. Considering (p, v) in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, we have $|v|^2 \neq 0$ and thus Equations (11.1)-(11.3) are equivalent to the three equations

$$p = M^{-1} \left(\frac{\Phi_2(v)}{2|v|^2} + \frac{1}{2}\Phi_0 \right), \quad (11.6)$$

$$(M^{-1}(\Phi_2(v) + |v|^2\Phi_0)) \cdot v = 0, \quad (11.7)$$

$$|M^{-1}(\Phi_2(v) + |v|^2\Phi_0)|^2 = 4r_1^2|v|^4. \quad (11.8)$$

¹A cubic and a quartic when the centers are affinely independent, a conic and a sextic when the centers are coplanar with no three aligned.

Equation (11.6) expresses the point p in terms of the direction vector v , proving that there is at most one line tangent to the four spheres with a given direction. The remaining equations are a cubic (11.7) and a quartic (11.8) in v , and their intersection represents the directions $v \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ along which there is a tangent to the four spheres. We want to prove that the cubic and the quartic intersect in at most 12 points in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. For that purpose we prove this property in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, by contradiction.

If the cubic and the quartic have in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ a common component of positive dimension, this component intersects the conic $|v|^2 = 0$; this is a property of any two curves in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ which does not dispute the fact that the real solutions of Equations (11.6)-(11.8) satisfy $|v|^2 \neq 0$. We now prove that the intersection in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ of the cubic (11.7), the quartic (11.8) and the conic $|v|^2 = 0$ is empty. This system simplifies to

$$\begin{cases} |v|^2 = 0, \\ (M^{-1}\Phi_2(v)) \cdot v = 0, \\ |M^{-1}\Phi_2(v)|^2 = 0. \end{cases}$$

The first two equations express the fact that $M^{-1}\Phi_2(v)$ is on the tangent at v to the smooth conic $|v|^2 = 0$, and the last that $M^{-1}\Phi_2(v)$ is itself on that conic. It follows that $M^{-1}\Phi_2(v)$ and v are one and the same projective point. Thus there exists $\mu \neq 0$ in \mathbb{C} such that

$$M^{-1}\Phi_2(v) = \mu v, \text{ that is } \Phi_2(v) = \mu Mv.$$

Expanding this last equality yields $-(c_i \cdot v)^2 = \mu c_i \cdot v$, for $i = 2, \dots, 4$, which implies that every term $c_i \cdot v$ is 0 or $-\mu$. This leads to

$$Mv = -\mu \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \tag{11.9}$$

where each a_i is equal to 0 or 1. Let a denote the vector of the a_i . Plugging $v = \mu M^{-1}a$ in the equation of the conic $|v|^2 = 0$ yields

$$\mu^2 |M^{-1}a|^2 = 0.$$

The vector $M^{-1}a$ is real, thus $\mu = 0$ or $a = 0$. In both cases, Equation (11.9) implies $v = 0$. Thus there is no common solution in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ for the system of the conic, the cubic and the quartic, hence the cubic (11.7) and quartic (11.8) cannot intersect in a curve. By Bezout's Theorem, they intersect in at most 12 points, and since there is at most one line tangent to the four spheres with a given direction by Equation (11.6), this completes the proof. \square

11.4 Coplanar centers

We now treat the more intricate case of four spheres whose centers are coplanar but such that no three centers are aligned.

Proposition 91. *Four spheres with coplanar centers, no three aligned, have at most twelve common tangents.*

Let $(p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ represent a line tangent to the four spheres $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$. By Lemma 89, (p, v) is solution of Equations (11.1)-(11.3). As in Section 11.3, we start by extracting from these equations two equations in v .

Without loss of generality, we may assume that the sphere centers span the plane (e_1, e_2) :

$$M = \begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & 0 \end{pmatrix}.$$

Let M_{12} be the 2×2 upper left sub-matrix of M , which is invertible since no three centers are aligned. For any vector a , let a_{12} be the vector that consists of the first two rows of a and a_3 be its third row.

Let us first assume that $v_3 \neq 0$. It follows from $p \cdot v = 0$ that

$$p_3 = -\frac{p_{12} \cdot v_{12}}{v_3}, \quad (11.10)$$

and p_{12} is characterized using Equation (11.3) :

$$2|v|^2 p_{12} = M_{12}^{-1} ((\Phi_2(v))_{12} + |v|^2 (\Phi_0)_{12}).$$

Let $\Psi_2(v) = M_{12}^{-1} (\Phi_2(v))_{12}$ and $\Psi_0 = M_{12}^{-1} (\Phi_0)_{12}$. As $\Phi_2(v)$ and $\Psi_2(v)$ do not depend on v_3 , we may write them as $\Phi_2(v_{12})$ and $\Psi_2(v_{12})$. Then

$$2|v|^2 p_{12} = \Psi_2(v_{12}) + |v|^2 \Psi_0. \quad (11.11)$$

Substituting the expression of p_3 from Equation (11.10) in Equation (11.2) gives

$$|p_{12}|^2 + \left(\frac{p_{12} \cdot v_{12}}{v_3} \right)^2 - r_1^2 = 0.$$

Then multiplying by $4|v|^4 v_3^2$ and substituting $2|v|^2 p_{12}$ by its expression from Equation (11.11) gives the following sextic equation in v :

$$v_3^2 |\Psi_2(v_{12}) + |v|^2 \Psi_0|^2 + ((\Psi_2(v_{12}) + |v|^2 \Psi_0) \cdot v_{12})^2 - 4|v|^4 v_3^2 r_1^2 = 0. \quad (11.12)$$

For any p, q in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, we have, by transposition :

$$(Mp) \cdot q = p \cdot (M^T q).$$

Let ω be a non-zero kernel vector of M^T . Then $(Mp) \cdot \omega = p \cdot (M^T \omega) = 0$. Substituting the expression of Mp from Equation (11.3), we obtain that v must be on the following conic :

$$\Phi_2(v_{12}) \cdot \omega + |v|^2 \Phi_0 \cdot \omega = 0. \quad (11.13)$$

Notice that Equations (11.12) and (11.13), obtained for $v_3 \neq 0$, are still valid for $v_3 = 0$ by continuity. We thus get the following lemma.

Lemma 92. *The direction $v \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ of a line tangent to the four spheres $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ satisfies the sextic (11.12) and the conic (11.13).*

Lemma 93. *If the sextic (11.12) and the conic (11.13) admit a component of positive dimension of common solutions in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, then it intersects the conic $|v|^2 = 0$ and any point v in the intersection satisfies*

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \quad \Psi_2(v_{12}) = \lambda v_{12} \quad (11.14)$$

$$\Phi_2(v_{12}) \cdot \omega = 0. \quad (11.15)$$

Démonstration. If Equations (11.12) and (11.13) share a component of positive dimension in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, then this component, seen as a curve of $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, intersects the conic $|v|^2 = 0$. Let $v \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ be in this intersection. Then Equation (11.13) becomes Equation (11.15). Now, it follows from $|v|^2 = 0$ that $v_3^2 = -|v_{12}|^2$, and thus Equation (11.12) becomes

$$-|v_{12}|^2 |\Psi_2(v_{12})|^2 + (\Psi_2(v_{12}) \cdot v_{12})^2 = 0.$$

Since $|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2 = \det(x, y)^2$ for any $x, y \in \mathbb{C}^2$, the equation is equivalent to

$$\det(v_{12}, \Psi_2(v_{12})) = 0$$

which is equivalent to Equation (11.14) (v is on $|v|^2 = 0$ so we cannot have $v_{12} = 0$). \square

In the following we consider the centers $c_1 = 0, c_2, c_3, c_4$ as 2D points (i.e., we forget the third coordinate, which is 0). For any vector $x \in \mathbb{R}^2$ we denote by x^\perp its orthogonal vector obtained by a rotation of angle $\pi/2$.

Lemma 94. *If Equations (11.14) and (11.15) have a common solution v_{12} in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, it must satisfy $v_{12} = c_i^\perp$ and $v_{12} \cdot (c_j - c_k) = 0$, with $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$ (which implies that c_1, c_2, c_3, c_4 are the vertices of a trapezoid).*

Démonstration. From $M^T \omega = 0$ we get

$$M^T \omega = \begin{pmatrix} M_{12}^T & c_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{12} \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{12}^T \omega_{12} + \omega_3 c_4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Thus $\omega_{12} = -\omega_3 (M_{12}^T)^{-1} c_4$ and $\omega_3 \neq 0$ (otherwise, $\omega_{12} = 0$ thus $\omega = 0$ contradicting its definition). Now, we can write Equation (11.15) as $(\Phi_2(v_{12}))_{12} \cdot \omega_{12} - (c_4 \cdot v_{12})^2 \omega_3 = 0$, and substituting our expression of ω_{12} yields

$$-\omega_3 (\Phi_2(v_{12}))_{12} \cdot ((M_{12}^T)^{-1} c_4) - (c_4 \cdot v_{12})^2 \omega_3 = 0,$$

which simplifies, by transposition, into

$$(M_{12}^{-1} (\Phi_2(v_{12}))_{12}) \cdot c_4 + (c_4 \cdot v_{12})^2 = 0.$$

Hence, an equivalent expression for Equation (11.15) is :

$$\Psi_2(v_{12}) \cdot c_4 + (c_4 \cdot v_{12})^2 = 0. \tag{11.16}$$

Substituting $\Psi_2(v_{12}) = \lambda v_{12}$ from Equation (11.14) into (11.16) leads to

$$(c_4 \cdot v_{12})^2 = -\lambda c_4 \cdot v_{12}.$$

By a similar reasoning, we can express the conic (11.15) using c_2 or c_3 in expressions similar to Equation (11.16), and the above argument yields that :

$$(c_i \cdot v_{12})^2 = -\lambda c_i \cdot v_{12}, \quad i = 2, 3, 4. \tag{11.17}$$

If $c_i \cdot v_{12} \neq 0$ for $i = 2, 3$, and 4 then $(c_2 - c_3) \cdot v_{12} = (c_2 - c_4) \cdot v_{12} = 0$ and, since c_2, c_3 and c_4 are not aligned, $v_{12} = 0$ contradicting $v_{12} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Hence, v_{12} must be orthogonal to some c_i , $i \in \{2, 3, 4\}$. Since $v_{12} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, we can assume that $v_{12} = c_i^\perp$. Since no three centers are aligned, v_{12} is orthogonal to neither c_j nor c_k , with $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$. Thus Equation (11.17) yields

$$-\lambda = c_j \cdot c_i^\perp = c_k \cdot c_i^\perp, \quad \text{and so} \quad c_i^\perp \cdot (c_j - c_k) = 0.$$

This means that the segments $c_1 c_i$ and $c_j c_k$ are parallel and thus the centers of the spheres are the vertices of a trapezoid. \square

Lemma 95. *If the sextic (11.12) and the conic (11.13) have a common component of positive dimension in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, Equations (11.14) and (11.15) have at least two distinct solutions in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Assume that the sextic (11.12) and the conic (11.13) share a component of positive dimension. Then by Lemmas 93 and 94, Equations (11.14) and (11.15) admit a common solution $v_{12} = c_i^\perp$ for $i = 2, 3$, or 4 . By relabeling if necessary, we can assume $v_{12} = c_4^\perp$. Suppose, for a contradiction, that c_4^\perp is the unique common solution of Equations (11.14) and (11.15).

By Lemma 93, any point in the intersection of the conic $|v|^2 = 0$ and the common component of the sextic (11.12) and the conic (11.13) satisfies Equations (11.14) and (11.15). Thus any such point satisfies $v_{12} = c_4^\perp$ and $|v|^2 = 0$, and is equal to one of the two points of coordinates $(c_4^\perp : \pm i|c_4|)$. Hence the common component contains at least one of these two points.

The common component of the sextic (11.12) and the conic (11.13) is either the conic itself or a line. In the latter case, the equation of the line is real because otherwise its conjugate is also contained in the conic and in the sextic (since their equations are real); the sextic then contains the conic, which corresponds to the first case. Hence the equation of the common component is real in both cases. Thus, since the common component contains one of the two points $(c_4^\perp : \pm i|c_4|)$, it also contains its conjugate, hence the two points.

We now discard the case where the common component is the conic by deriving a contradiction with our assumption that no three centers are collinear. If the conic is contained in the sextic, it meets $|v|^2 = 0$ in the two points $(c_4^\perp : \pm i|c_4|)$, which are therefore tangency points. This means that Equation (11.16), which is our conic mod $|v|^2 = 0$, has a double root at $v_{12} = c_4^\perp$. Since any degree-two polynomial in $v_{12} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ that has c_4^\perp as double root is proportional to $(c_4 \cdot v_{12})^2$, we get that

$$\Psi_2(v_{12}) \cdot c_4 = \alpha(c_4 \cdot v_{12})^2$$

for some $\alpha \in \mathbb{C}$ and all $v_{12} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Computing $\det(M_{12})M_{12}^{-1}$ gives the matrix with columns $[-c_3^\perp c_2^\perp]$, thus our equation becomes

$$\Psi_2(v_{12}) \cdot c_4 = \frac{1}{\det(M_{12})} [(c_3^\perp \cdot c_4)(c_2 \cdot v_{12})^2 - (c_2^\perp \cdot c_4)(c_3 \cdot v_{12})^2] = \alpha(c_4 \cdot v_{12})^2.$$

Since the four centers form a trapezoid we have $c_4 = \nu(c_2 - c_3)$ for some $\nu \in \mathbb{R}^3$. Replacing c_4 by its expression and simplifying by factor $c_3^\perp \cdot c_2 = -c_2^\perp \cdot c_3$ yields

$$(c_2 \cdot v_{12})^2 - (c_3 \cdot v_{12})^2 = \kappa((c_2 - c_3) \cdot v_{12})^2,$$

for some $\kappa \in \mathbb{C}$. Writing $v_{12} = xc_2^\perp + yc_3^\perp$ we obtain

$$(c_2 \cdot c_3^\perp)^2(y^2 - x^2 - \kappa(x + y)^2) = 0$$

for all $(x, y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, which forces the proportionality of c_2 and c_3 and their alignment with c_1 . Thus, if no three centers are aligned the conic cannot be contained in the sextic.

Now we examine the second alternative, when the common component of the sextic (12) and the conic (13) is a line. This line contains the two points $(c_4^\perp : \pm i|c_4|)$ and thus contains the point $(c_4^\perp : v_3)$ for all $v_3 \in \mathbb{C}$. Thus all the coefficients of the sextic (11.12) viewed as an equation in v_3 with coefficients depending on $v_{12} = c_4^\perp$ must vanish. In particular the constant and the coefficient of v_3^2 minus $|c_4|^4$ times the coefficient of v_3^6 both vanish and are equal to

$$\begin{aligned} \Psi_2(c_4^\perp) \cdot c_4^\perp + |c_4|^2 \Psi_0 \cdot c_4^\perp &= 0, \\ |\Psi_2(c_4^\perp)|^2 + 2|c_4|^2 \Psi_2(c_4^\perp) \cdot \Psi_0 &= 0. \end{aligned}$$

From the proof of Lemma 94, we know that $\Psi_2(c_4^\perp) = \lambda c_4^\perp$ with $\lambda = -c_2 \cdot c_4^\perp = -c_3 \cdot c_4^\perp$. Thus, the relations become

$$\begin{aligned} |c_4|^\perp (\lambda + \Psi_0 \cdot c_4^\perp) &= 0, \\ \lambda |c_4|^\perp (\lambda + 2\Psi_0 \cdot c_4^\perp) &= 0. \end{aligned}$$

Since no three centers are aligned, $\lambda \neq 0$ and $|c_4|^\perp \neq 0$, and these two equations imply $\lambda = 0$, a contradiction. \square

Lemma 96. *The sextic (11.12) and the conic (11.13) cannot have a component of positive dimension of common solutions.*

Démonstration. Assume that the sextic (11.12) and the conic (11.13) have a common component of positive dimension. Lemmas 94 and 95 yield that Equations (11.14) and (11.15) then have at least two distinct solutions among $\{c_2^\perp, c_3^\perp, c_4^\perp\}$. By relabeling the centers, we may assume these solutions are c_2^\perp and c_3^\perp . Lemma 94 gives that

$$c_2^\perp \cdot (c_4 - c_3) = 0 \quad \text{and} \quad c_3^\perp \cdot (c_4 - c_2) = 0.$$

Thus, c_2 is proportional to $c_4 - c_3$, and c_3 is proportional to $c_4 - c_2$. Therefore, $c_2 + c_3 = c_4$ and the centers form a parallelogram. By translating our frame to the center of that parallelogram, we may assume that the centers are at $a = (a_1, a_2, 0)$, $b = (b_1, b_2, 0)$, $-a$ and $-b$, with corresponding radii r_i , $i = 1, \dots, 4$. On occasion, we abuse notation, and allow a and b to stand for (a_1, a_2) , respectively (b_1, b_2) .

Subtracting Equation (11.5) for $i = 1$ from its expression for $i = 3$ leads to

$$4(a \cdot p) = r_3^2 - r_1^2,$$

and the same operation for $i = 2$ and $i = 4$ yields

$$4(b \cdot p) = r_4^2 - r_2^2.$$

This shows that the first two coordinates p_{12} of p are determined by centers and radii alone, and remain constant. Thus, all the common tangents to the four spheres meet the line perpendicular to the plane of the centers in p_{12} .

A theorem in the preprint [62] addresses a situation of this nature and shows that the common tangents to three spheres which meet at the same time a fixed line cannot be infinitely many unless their three centers are collinear. We give here an independent proof which continues the above line of thought.

Recall that (12) and (13) were obtained from (1)-(3) by eliminating p . Operating "in reverse", it is easy to see that a one-dimensional component of solutions for (12) and (13) would produce a one-dimensional family of solutions for (1)-(3). We show now this cannot happen.

Rewriting (11.5) for the centers a and b gives

$$(a \cdot v)^2 = |v|^2 \left(|a|^2 + |p|^2 - \frac{1}{2}(r_1^2 + r_3^2) \right), \quad (11.18)$$

$$(b \cdot v)^2 = |v|^2 \left(|b|^2 + |p|^2 - \frac{1}{2}(r_2^2 + r_4^2) \right). \quad (11.19)$$

Let $\alpha = |a|^2 - \frac{1}{2}(r_1^2 + r_3^2)$ and $\beta = |b|^2 - \frac{1}{2}(r_2^2 + r_4^2)$. Subtracting (11.19) from (11.18) gives the conic

$$((a + b) \cdot v_{12}) ((a - b) \cdot v_{12}) = |v|^2 (\alpha - \beta). \quad (11.20)$$

Multiplying (11.18), (11.19), and v_3^2 together and dividing by $|v|^2$ gives

$$(a \cdot v_{12})^2(\beta + |p_{12}|^2 + p_3^2)v_3^2 = (b \cdot v_{12})^2(\alpha + |p_{12}|^2 + p_3^2)v_3^2,$$

or equivalently, using (11.10),

$$(|p_{12}|^2 v_3^2 + (p_{12} \cdot v_{12})^2)((a+b) \cdot v_{12})((a-b) \cdot v_{12}) = v_3^2(\alpha(b \cdot v_{12})^2 - \beta(a \cdot v_{12})^2). \quad (11.21)$$

For the conic (11.20) and the quartic (11.21) to have a common one-dimensional component, it is necessary that equality holds for any $v_{12} \in \mathbb{P}^1$ and some adequate value(s) for v_3 . Indeed, the projection $v \mapsto v_{12}$ of the common component cannot be constant, for with fixed v_{12} and (already known) fixed p_{12} , equations (11.10) and (11.18) (or (11.19)) would determine only a finite number of solutions v_3 .

Evaluating (11.20) and (11.21) at $v_{12} = (a+b)^\perp$, we find no possible value for v_3 , unless $\alpha = \beta$. Returning this necessary condition into (11.20) implies $v_{12} = (a \pm b)^\perp$ contradicting the fact that (11.20) and (11.21) holds for all $v_{12} \in \mathbb{P}^1$. \square

We now conclude on the case of spheres with coplanar centers.

Proof of Proposition 91. By Lemmas 92 and 96, there are finitely many directions along which the spheres have a common tangent. For each such direction v , a line tangent to the four spheres projects onto a plane orthogonal to v into a point that lies on the common intersection of the four circles obtained as the boundary of the projection of each sphere. There are thus at most two lines tangent to the four spheres per direction. Hence there are finitely many lines tangent to the four spheres. Now, the bound of 12 directly follows from the non-coplanar case (Proposition 90) by continuity. \square

11.5 Collinear centers

We conclude in this section the proof of Theorem 88. We first establish the following lemma.

Lemma 97. *The common tangents to three distinct spheres with collinear centers and no common intersection are, if any, the ruling(s) of a single quadric of revolution with symmetry axis the line through all centers. This quadric can be a cone, a cylinder or a hyperboloid of one sheet.*

Démonstration. Suppose that three distinct spheres with collinear centers admit a common tangent. Such a tangent is not orthogonal to the axis of the three spheres since they have no common intersection. Furthermore, such a tangent remains tangent after a rotation about this axis. Thus the common tangents to the three spheres are the rulings of a collection \mathcal{Q} of quadrics of revolution with symmetry axis the line through all centers (see Figure 11.1); these quadrics have to be cylinders, cones, or hyperboloids of one sheet. Assume for a contradiction that \mathcal{Q} consists of more than one quadric.

We take the line through the centers to be the y -axis in some (x, y) -plane. This plane intersects the quadrics of \mathcal{Q} into a collection \mathcal{C} of conics symmetric with respect to the y -axis which have equations of the following form :

$$x^2 + Ay^2 + By + C = 0, \quad A \leq 0, \quad B^2 - 4AC \leq 0. \quad (11.22)$$

The (x, y) -plane also intersects the three spheres into three circles, with centers $(0, \alpha_i)$ and radii r_i , $i = 1, \dots, 3$, that are tangent to the conics of \mathcal{C} . Since these conics and circles are symmetric

with respect to the y -axis, two of them are tangent if and only if they intersect in exactly two points with same y -coordinate. Thus a conic (11.22) and a circle of center $(0, \alpha_i)$ and radius r_i are tangent if and only if

$$(x^2 + Ay^2 + By + C) - (x^2 + (y - \alpha_i)^2 - r_i^2) = 0$$

has a double solution in y , i.e. the discriminant vanishes :

$$\delta_i = (B + 2\alpha_i)^2 - 4(A - 1)(C + r_i^2 - \alpha_i^2) = 0. \quad (11.23)$$

For the three circles, this gives a system of three equations in the three indeterminates (A, B, C) . This system is linear in C (with a non-zero coefficient since $A \leq 0$) and thus has more than one solution only if the linear system in (A, B)

$$\begin{cases} \delta_1 - \delta_2 = ((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - (r_1^2 - r_2^2))A + (\alpha_1 - \alpha_2)B + r_1^2 - r_2^2 = 0 \\ \delta_1 - \delta_3 = ((\alpha_1^2 - \alpha_3^2) - (r_1^2 - r_3^2))A + (\alpha_1 - \alpha_3)B + r_1^2 - r_3^2 = 0 \end{cases}$$

does, that is only if the determinant of the coefficients of A and B , and the determinant of the constant coefficients and the coefficients of B both vanish. The sum of these determinants also vanishes and is equal to

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 & \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1^2 - \alpha_3^2 & \alpha_1 - \alpha_3 \end{vmatrix} = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3).$$

Hence at least two centers are equal which implies that one sphere is strictly contained in another. The three spheres thus have no common tangent, a contradiction. \square

Remark. Actually solving the system (11.23), $i = 1, 2, 3$, yields, in terms of radii and oriented distances between centers $d_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$:

$$A = \frac{1}{D} (r_1^2 d_{23} + r_2^2 d_{31} + r_3^2 d_{12}),$$

$$B^2 - 4AC = \frac{-1}{d_{23}d_{31}d_{12}D} (r_1 d_{23} + r_2 d_{31} + r_3 d_{12}) (r_1 d_{23} + r_2 d_{31} - r_3 d_{12})$$

$$(r_1 d_{23} - r_2 d_{31} + r_3 d_{12}) (-r_1 d_{23} + r_2 d_{31} + r_3 d_{12}),$$

where $D = d_{23} d_{31} d_{12} + r_1^2 d_{23} + r_2^2 d_{31} + r_3^2 d_{12}$.

We can now prove Theorem 88.

Proof of Theorem 88. Consider four distinct spheres with infinitely many real common tangents. By Propositions 90 and 91, the centers of at least three of the spheres are aligned.

If these three spheres intersect in a circle, their common tangents are the tangents to that circle in its plane. To be tangent to infinitely many of these lines, the fourth sphere has to contain that circle (and, if that circle is degenerate to a point, the four spheres must have the same tangent plane at this point). Thus all four spheres have aligned centers.

If the three spheres with aligned centers do not have a common intersection, then by Lemma 97 their common tangents are the rulings of a single quadric having their axis as axis of revolution. To be tangent to infinitely many lines contained in this quadric, the fourth sphere must have its center on the axis of the quadric (and adequate radius as determined below), hence the four spheres have aligned centers.

Conversely, four spheres with aligned centers and at least one common tangent have infinitely many common tangents, by symmetry of revolution. This concludes the proof of Theorem 88 and provides the finer geometric characterization stated in Section 11.1. \square

As shown above, four spheres with collinear centers and no common intersection admit infinitely many real common tangents if and only if there exists a conic (11.22) whose coefficients A, B, C satisfy Equation (11.23) for all $i = 1, \dots, 4$. These four equations admit a solution if and only if the relation obtained by eliminating A, B, C is satisfied. One can put the result in the permutation invariant form in terms of the oriented distances $d_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$ and the radii r_k :

$$\sum_{k=1}^4 \frac{r_k^2}{\prod_{i \neq k} d_{ki}} = 0. \quad (11.24)$$

In order to obtain infinitely many *real* common tangents, the coefficients A, B, C must also satisfy the semi-algebraic conditions

$$A \leq 0, \quad B^2 - 4AC \leq 0 \quad (11.25)$$

noted in (11.22). A and $B^2 - 4AC$ can be obtained in terms of the d_{ij} and r_k by solving the system of equations, as illustrated after Lemma 7.

The case of four spheres intersecting in a common circle or tangent in a common point is a limit case of the situation above, and thereby subject to the same algebraic and semi-algebraic conditions.

Remark. When a configuration of four spheres is given in terms of the Cartesian coordinates of the four centers $c_i = (x_i, y_i, z_i)$ and the corresponding radii r_i , expressing the collinearity of the centers involves quadratic equations in their coordinates, and, in view of $\frac{d_{ij}}{d_{ik}} = \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i} = \frac{y_j - y_i}{y_k - y_i} = \frac{z_j - z_i}{z_k - z_i}$ and $d_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2$, testing Conditions (11.24) and (11.25) amounts to evaluating polynomials of degree at most five in the Cartesian coordinates and radii.

11.6 Conclusion

This paper answers a question left open for several years by characterizing the sets of four spheres of various radii with infinitely many common tangent lines. This completes the description of degeneracies for common tangents to spheres in \mathbb{R}^3 .

Some of our results generalize to the case of quadric surfaces. In a companion paper [13] we characterize the families of quadrics in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ whose common tangents sweep another quadric surface. The result of the present paper appears as a particular case obtained by considering *real* tangents to *real* spheres. Extending our characterization to quadruples of quadrics with infinitely many real common tangents remains an open problem.

Results of the kind proved in this paper have applications in the field of 3D visibility. Given a 3D scene, combinatorial changes appearing in the view of a moving observer occur when traversing special surfaces known as *visual event surfaces*. Such surfaces are swept by lines having prescribed contact with the objects of the scene. Various data structures based on visual events, like the visibility complex or the visibility skeleton [37], have been proposed to speed up visibility computations. The 0-dimensional elements of these structures appear as discrete lines tangent to four objects. Failing to recognize that four objects admit infinitely many tangent lines leads to errors in the computations of these types of data structures. Hence, recognizing configurations of four objects with infinitely many tangent lines is crucial to the robustness of visibility computations. Our theorem settles the case of four spherical objects in \mathbb{R}^3 .

Cinquième partie

Conclusions

L'approche globale des problèmes de visibilité décrit les relations de visibilité d'une scène au moyen de paquets de rayons induits par ses objets ou, plus simplement, de leurs droites support. Cette thèse étudie certains aspects combinatoires et algorithmiques de cette approche en s'intéressant à la géométrie de ces ensembles de droites.

Un cadre théorique pertinent. L'étude de la visibilité tridimensionnelle par le biais d'ensembles de droites remarquables nous semble une approche prometteuse. Tout d'abord, cette formalisation est féconde en questions théoriques fondamentales et non triviales, comme par exemple le problème étudié au Chapitre 11. Ces questions ont d'ailleurs de profond liens avec plusieurs domaines tels que la *géométrie énumérative*, la *géométrie combinatoire des droites*²⁵ ou encore la *géométrie intégrale*. Certaines techniques utilisées dans cette thèse sont classiques dans ces domaines (*c.f.* Chapitres 6 et 11 par exemple); inversement, nous avons pu résoudre certaines questions propres à ces domaines [13, 22, 23] en appliquant les techniques utilisées dans cette thèse. Ensuite, plusieurs aspects des questions de visibilité de l'espace sont encore mal compris, en particulier ceux liés à la robustesse des algorithmes. Des travaux préliminaires sont encore en cours, comme par exemple la mise au point de prédicats efficaces pour le calcul de visibilité ou la description des configurations dégénérées [17]. Enfin, ces structures nous semblent offrir des perspectives très intéressantes pour le traitement de scènes cinématiques, problème encore très mal résolu actuellement.

Une mise en pratique à développer. Cette thèse pose les premières bases du traitement théorique global des problèmes de visibilité en trois dimensions. La validation, voire la mise en œuvre, de cette approche reste un travail considérable, tant pour les aspects théoriques que pratiques. Le principal obstacle à surmonter reste la taille potentiellement énorme des structures de visibilité globale; les bornes établies dans cette thèse sur leur combinatoire suggèrent que cette taille n'est pas nécessairement prohibitive mais il reste à l'évaluer en pratique. L'implantation de l'algorithme du Chapitre 8 en vue d'appliquer le squelette de visibilité au calcul de contours d'ombre a été initiée dans le prolongement de cette thèse. Obtenir une implantation à même de traiter des scènes pratiques, à savoir arbitrairement dégénérées et de grande taille, demandera entre autres une étude fine des prédicats utilisés. Divers raffinements de ce même algorithme semblent envisageables, par exemple rendre sa complexité adaptative, traiter les polyèdres généraux sans les décomposer préalablement en convexes ou encore autoriser une construction paresseuse du squelette de visibilité pour ne calculer que les contours d'ombre associés à une source lumineuse particulière. Par ailleurs, il semblerait intéressant d'étudier la mise en œuvre des outils algébriques pour implanter tout ou partie du calcul du complexe de visibilité d'objets courbes décrit au Chapitre 10. Seule une des opérations requises par notre algorithme n'est pas disponible à ce jour, la description d'une composante connexe d'un ensemble semi-algébrique comme ensemble semi-algébrique.

Perspectives. Soulignons que deux des thèmes abordés dans cette thèse n'en sont encore qu'à leurs balbutiements. Il s'agit de l'utilisation des outils de géométrie réelle effective en géométrie algorithmique et de la mise au point de modèles d'analyse pertinents pour des données géométriques. Ces deux thèmes nous semblent des directions de recherche intéressantes où beaucoup de travail reste à faire.

Les outils de géométrie réelle effective sont très généraux en regard des problèmes de géométrie sur des objets classiques, sphères ou surfaces de faible degré par exemple. Les algorithmes sont souvent de complexité exponentielle en la taille des objets manipulés, aussi leur efficacité pratique

²⁵En anglais, *geometric transversal theory*.

s'avère rapidement limitée. Dans cette thèse, nous avons ramené divers problèmes à des questions de géométrie sur les ensembles de droites induits par des objets simples. Dans certains cas, ces ensembles de droites présentent des propriétés combinatoires qui suggèrent que la complexité effective des problèmes correspondant pourrait-être, encore une fois, éloignée du cas le pire. Déterminer les propriétés combinatoires pertinentes du point de vue des outils de géométrie réelle effective et comprendre dans quel cadre géométrique elles sont vérifiées nous semble une question intéressante à creuser.

Traditionnellement, les algorithmes géométriques sont analysés en mesurant leur complexité dans le cas le pire. Cette mesure peut s'avérer peu représentative de leurs performances pratique, notamment dans le cas des problèmes de visibilité. La mise au point de méthodes d'analyse d'algorithmes géométriques plus pertinentes que l'étude du cas le pire nous semble une autre direction intéressante à explorer. Une solution peut être la définition d'un modèle probabiliste des données géométriques susceptibles d'être traitées. Une alternative émergente est la mesure sur les scènes étudiées de critères géométriques analogues au *rapport d'aspect* (*fatness*) pouvant être prises en compte dans l'analyse des algorithmes [19]. Les modèles actuels figurant les scène d'infographie sont largement insatisfaisant : une distribution uniforme de sphères n'a manifestement pas les mêmes propriétés de visibilité qu'une scène architecturale.

Bibliographie

- [1] P. Agarwal. On stabbing lines for convex polyhedra in 3d. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 4(4) :177–189, 1994.
- [2] P. K. Agarwal, B. Aronov, and M. Sharir. Line transversals of balls and smallest enclosing cylinders in three dimensions. *Discrete and Computational Geometry*, 21 :373–388, 1999.
- [3] P. K. Agarwal and J. Erickson. Geometric range searching and its relatives. In B. Chazelle, J. E. Goodman, and R. Pollack, editors, *Advances in Discrete and Computational Geometry*, volume 223 of *Contemporary Mathematics*, pages 1–56. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [4] P. K. Agarwal and M. Sharir. Davenport-Schinzel sequences and their geometric applications. In Jörg-Rüdiger Sack and Jorge Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, pages 1–47. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [5] P.K. Agarwal, B. Aronov, V. Koltun, and M. Sharir. On lines avoiding unit balls in three dimensions. *Discrete and Computational Geometry*, 2005. To appear.
- [6] H. Alt, M. Glisse, and X. Goaoc. On the worst-case complexity of the silhouette of a polytope. In *Canadian Conference on Computational Geometry*, 2003.
- [7] P. Angelier. *Algorithmique des graphes de visibilité*. PhD thesis, Université Paris 7, 2002.
- [8] P. Angelier and M. Pocchiola. A sum of squares theorem for visibility complexes and applications. *Discrete and Computational Geometry*, 25 :79–139, 2003.
- [9] B. Aronov, H. Brönnimann, A. Chang, and Y.-J. Chiang. Cost prediction for ray shooting. In *Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 293–302, 2002.
- [10] S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy. Complexity of computing semi-algebraic descriptions of the connected components of a semi-algebraic set. In *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 25–29, 1998.
- [11] S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy. A new algorithm to find a point in every cell defined by a family of polynomials. In B. Caviness and J. Johnson, editors, *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, pages 341–350. Springer-Verlag, 1998.
- [12] M. Bern, D.P. Dobkin, D. Eppstein, and R. Grossman. Visibility with a moving point of view. *Algorithmica*, 11 :360–378, 1994.
- [13] C. Borcea, X. Goaoc, S. Lazard, and S. Petitjean. On tangents to quadric surfaces. manuscript, 2004.
- [14] C. Borcea, X. Goaoc, S. Lazard, and S. Petitjean. Tangents to spheres in \mathbb{R}^3 . *Discrete and Computational Geometry*, 2005. to appear.

- [15] H. Brönnimann, O. Devillers, V. Dujmovic, H. Everett, M. Glisse, X. Goaoc, S. Lazard, H.-S. Na, and S. Whiteside. On the number of lines tangent to four polyhedra. In *Canadian Conference on Computational Geometry*, 2002.
- [16] H. Brönnimann, O. Devillers, V. Dujmovic, H. Everett, M. Glisse, X. Goaoc, S. Lazard, H.-S. Na, and S. Whiteside. The number of lines tangent to arbitrary polytopes in \mathbb{R}^3 . In *Proceedings of the 20th ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 46–55, 2004.
- [17] H. Brönnimann, H. Everett, S. Lazard, F. Sottile, and S. Whitesides. Transversals to line segments in three-dimensional space. *Discrete and Computational Geometry*, 2005. To appear.
- [18] H. Brönnimann, H. Everett, S. Lazard, F. Sottile, and S. Whitesides. Transversals to line segments in \mathbb{R}^3 . In *Canadian Conference on Computational Geometry*, 2003.
- [19] F. Cazals and M. Sbert. Some integral geometry tools to estimate the complexity of 3d scenes. Report, INRIA Technical report No. 3204, 1997.
- [20] CGAL. The Computational Geometry Algorithm Library. <http://www.cgal.org/>.
- [21] A.Y. Chang. A survey of geometric data structures for ray tracing. Report, Polytechnic University technical report TR-CIS-2001-06, 2001.
- [22] O. Cheong, X. Goaoc, and H.-S. Na. Disjoint unit spheres admit at most two line transversals. In *Proceedings of the European Symposium on Algorithms*, pages 127–135, 2003.
- [23] O. Cheong, X. Goaoc, and H.-S. Na. Geometric permutations of disjoint unit spheres. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 30 :253–270, 2005.
- [24] F. S. Cho and D. Forsyth. Interactive ray tracing with the visibility complex. *Computers and Graphics, Special Issue on Visibility - Techniques and Applications*, 23(5) :703–717, 1999.
- [25] M. F. Cohen and J. R. Wallace. *Radiosity and realistic image synthesis*. Academic Press Professional, 1993.
- [26] R. Cole and M. Sharir. Visibility problems for polyhedral terrains. *Journal of Symbolic Computation*, 7 :11–30, 1989.
- [27] F. Cuny, L. Alonso, and N. Holzschuch. A novel approach makes higher order wavelets really efficient for radiosity. *Computer Graphics Forum*, 19(3) :C99–108, Sep 2000. (Eurographics 2000 proceedings).
- [28] M. de Berg, H. Everett, and L.J. Guibas. The union of moving polygonal pseudodiscs – combinatorial bounds and applications. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 11 :69–82, 1998.
- [29] M. de Berg, D. Halperin, M. Overmars, and M. van Kreveld. Sparse arrangements and the number of views of polyhedral scenes. *International Journal on Computational Geometry and Applications*, 7(3) :175–195, 1997.
- [30] O. Devillers, V. Dujmovic, H. Everett, X. Goaoc, S. Lazard, H.-S. Na, and S. Petitjean. The expected number of 3d visibility events is linear. *SIAM Journal on Computing*, 32(6) :1586–1620, 2003.
- [31] O. Devillers, B. Mourrain, F. P. Preparata, and P. Trebuchet. On circular cylinders by four or five points in space. *Discrete and Computational Geometry*, 29 :83–104, 2003.
- [32] O. Devillers and P. Ramos. Personal communication, 2001.
- [33] M. Safey El Din. RAG’Lib. Real Algebraic Geometry Library. <http://www-calfor.lip6.fr/safey/RAGLib/>.

-
- [34] M. Safey El Din and E. Schost. Polar varieties and computation of one point in each connected component of a smooth real algebraic set. In *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 2003. To appear.
- [35] F. Duguet and G. Drettakis. Robust epsilon visibility. *Computer Graphics Proceedings of Annual Conference Series*, 2002.
- [36] F. Durand. *3D Visibility : Étude Analytique et Applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1999.
- [37] F. Durand. A multidisciplinary survey of visibility. In *ACM Siggraph Course Notes : Visibility, Problems, Techniques, and Applications*, 2000.
- [38] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. The visibility skeleton : A powerful and efficient multi-purpose global visibility tool. In *SIGGRAPH 97 Conference Proceedings*, Annual Conference Series, pages 89–100. ACM SIGGRAPH, Addison-Wesley, 1997.
- [39] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. Fast and accurate hierarchical radiosity using global visibility. *ACM Transactions on Graphics*, 18(2) :128–170, 1999.
- [40] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. The 3D visibility complex. *ACM Transactions on Graphics*, 21(2) :176–206, 2002.
- [41] H. Edelsbrunner and E.P. Mücke. Simulation of simplicity : a technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. *ACM Transactions on Graphics*, 9 :66–104, 1990.
- [42] A. Efrat, L. Guibas, O. Hall-Holt, and L. Zhang. On incremental rendering of silhouette maps of a polyhedral scene. In *Proceedings of the 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 910–917, 2000.
- [43] Z. Gigus, J. Canny, and R. Seidel. Efficiently computing and representing aspect graphs of polyhedral objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6) :542–551, June 1991.
- [44] Z. Gigus and J. Malik. Computing the aspect graph for line drawings of polyhedral objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(2) :113–122, 1990.
- [45] M. Glisse. Personal communication, 2003.
- [46] X. Goaoc and S. Petitjean. The visibility complex in a nutshell. manuscript, 2004.
- [47] J. E. Goodman, R. Pollack, and R. Wenger. Geometric transversal theory. In J. Pach, editor, *New Trends in Discrete and Computational Geometry*, volume 10 of *Algorithms and Combinatorics*, pages 163–198. Springer-Verlag, 1993.
- [48] G. R. Grimmett and D. R. Stirzaker. *Probability and Random Processes (2nd edition)*. Clarendon Press - Oxford, 1992.
- [49] L. J. Guibas. Kinetic data structures — a state of the art report. In P. K. Agarwal, L. E. Kavvaki, and M. Mason, editors, *Proceedings of the Workshop on Algorithmic Foundation of Robotics*, pages 191–209. A. K. Peters, Wellesley, MA, 1998.
- [50] D. Halperin. Arrangements. In Jacob E. Goodman and Joseph O’Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 21, pages 389–412. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.
- [51] D. Halperin and M. Sharir. New bounds for lower envelopes in three dimensions, with applications to visibility in terrains. *Discrete and Computational Geometry*, 12 :313–326, 1994.
- [52] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. Chelsea Publishing Company, 1952.

- [53] M. Hohmeyer and S. Teller. Determining the lines through four lines. *Journal of Graphics Tools*, 4(3) :11–12, 1999.
- [54] N. Holzschuch, F. Sillion, and G. Drettakis. An efficient progressive refinement strategy for hierarchical radiosity. In *Proceedings of the 5th Eurographics Workshop on Rendering*, pages 353–357, 1994.
- [55] J.J. Koenderink and A.J. VanDoorn. The singularities of the visual mapping. *BioCyber*, 24 :51–59, 1976.
- [56] J.J. Koenderink and A.J. VanDoorn. The internal representation of solid shape with respect to vision. *BioCyber*, 32 :211–216, 1979.
- [57] A. Laurentini. The visual hull concept for silhouette-based image understanding. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(2) :150–162, 1994.
- [58] T. Leyvand, O. Sorkine, and D. Cohen-Or. Ray space factorization for from-region visibility. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 22(3) :595–604, 2003.
- [59] I.G. Macdonald, J. Pach, and T. Theobald. Common tangents to four unit balls in \mathbb{R}^3 . *Discrete and Computational Geometry*, 26 :1–17, 2001.
- [60] A. M. Mathai. *An Introduction to Geometrical Probability : Distributional Aspects with Applications*. Gordon and Breach Sciences Publishers, 1999.
- [61] G. Megyesi. Lines tangent to four unit spheres with coplanar centers. *Discrete and Computational Geometry*, 26 :493–497, 2001.
- [62] G. Megyesi and F. Sottile. The envelope of lines meeting a fixed line and tangent to two spheres. *Discrete and Computational Geometry*, 33 :617–644, 2005.
- [63] G. Megyesi, F. Sottile, and T. Theobald. Common transversals and tangents to two lines and two quadrics in \mathbb{P}^3 . *Discrete and Computational Geometry*, 2003. To appear.
- [64] S. Mohaban and Micha Sharir. Ray shooting amidst spheres in three dimensions and related problems. *SIAM Journal on Computing*, 26 :654–674, 1997.
- [65] B. Mourrain. Personal communication, 2001.
- [66] B. Nadler, G. Fibich, S. Lev-Yehudi, and D. Cohen-Or. A qualitative and quantitative visibility analysis in urban scenes. *Computers and Graphics*, 23(5) :655–666, 1999.
- [67] R. Orti, S. Rivière, F. Durand, and C. Puech. Radiosity for dynamic scenes in flatland with the visibility complex. In *Computer Graphics Forum : Proceedings of Eurographics'96*, volume 15(3), pages 237–248, 1996.
- [68] Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 3rd ed.* McGraw-Hill, 1991.
- [69] M. Pellegrini. Ray shooting on triangles in 3-space. *Algorithmica*, 9 :471–494, 1993.
- [70] M. Pellegrini. On lines missing polyhedral sets in 3-space. *Discrete and Computational Geometry*, 12 :203–221, 1994.
- [71] M. Pellegrini. Ray shooting and lines in space. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 32, pages 599–614. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.
- [72] S. Petitjean. *Géométrie énumérative et contacts de variétés linéaires : applications aux graphes d'aspects d'objets courbes*. PhD thesis, CRIN / CNRS – INRIA Lorraine, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1995.

-
- [73] S. Petitjean. The number of views of piecewise-smooth algebraic objects. In *Proceedings of the Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science LNCS 900*, pages 571–582, 1995.
- [74] S. Petitjean, J. Ponce, and D. Kriegman. Computing exact aspect graphs of curved objects : Algebraic surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 9(3) :231–255, 1992.
- [75] H. Plantinga and C. R. Dyer. Visibility, occlusion, and the aspect graph. *International Journal of Computer Vision*, 5(2) :137–160, 1990.
- [76] M. Pocchiola and G. Vegter. Topologically sweeping visibility complexes via pseudo-triangulations. *Discrete and Computational Geometry*, 16 :419–453, December 1996.
- [77] M. Pocchiola and G. Vegter. The visibility complex. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 6(3) :279–308, 1996.
- [78] H. Pottmann and J. Wallner. *Computational Line Geometry*. Springer, 2001.
- [79] S. Rivière R. Orti, F. Durand and C. Puech. Using the visibility complex for radiosity computation. In *Applied Computational Geometry*, volume LNCS 1148, pages 177–190, 1996.
- [80] S. Rivière. Topologically sweeping the visibility complex of polygonal scenes. In *Proceedings of the 11th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 36–37, 1995.
- [81] S. Rivière. *Calculs de visibilité dans un environnement polygonal 2D*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1997.
- [82] S. Rivière. Dynamic visibility in polygonal scenes with the visibility complex. In *Proceedings of the 13th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, 1997.
- [83] S. Rivière. Walking in the visibility complex with applications to visibility polygons and dynamic visibility. In *Canadian Conference on Computational Geometry*, 1997.
- [84] L.A. Santaló. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley Pub., 1976.
- [85] M. Sharir and P. K. Agarwal. *Davenport-Schinzel sequences and their geometric applications*. Cambridge university press, 1995.
- [86] Micha Sharir. Algorithmic motion planning. In Jacob E. Goodman and Joseph O’Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 40, pages 733–754. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.
- [87] Waterloo Maple Software. The Maple System. <http://www.maplesoft.com/>.
- [88] F. Sottile and T. Theobald. Lines tangent to $2n - 2$ spheres in \mathbb{R}^n . *Transactions of the AMS*, 354(12) :4815–4829, 2002.
- [89] J. Stolfi. *Oriented Projective Geometry : A Framework for Geometric Computations*. Academic Press, 1991.
- [90] L. Szirmay-Kalos, V. Havran, B. Balazs, and L. Szecsi. On the efficiency of ray-shooting acceleration schemes. In *Proceedings of the Spring Conference on Computer Graphics, Budmerice, Slovakia*, pages 89–98, 2002.
- [91] L. Szirmay-Kalos and G. Márton. Worst-case versus average case complexity of ray-shooting. *Computing*, 61(2) :103–131, 1998.
- [92] T. Theobald. How to realize a given number of tangents to four unit balls in \mathbb{R}^3 . *Mathematika*, 48 :51–62, 2001.
- [93] T. Theobald. An enumerative geometry framework for algorithmic line problems in \mathbb{R}^3 . *SIAM Journal on Computing*, 31 :1212–1228, 2002.

- [94] R. Wenger. Helly-type theorems and geometric transversals. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 4, pages 63–82. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.
- [95] C. K. Yap. Robust geometric computation. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 35, pages 653–668. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.

Table des figures

2.1	Lancer de rayon.	7
2.2	Exemple de subdivision de l'espace (ici, un <i>quadtrees</i> dans le plan) accélérant le lancer de rayon : on ne teste l'intersection du rayon qu'avec les objets des cellules traversées.	8
2.3	Facteur de forme entre deux surfaces en 3D : certaines droites intersectant T_1 et T_2 sont interceptées par des bloqueurs.	9
2.4	Facteur de forme entre deux convexes en 2D vu comme différence de longueurs de courbes élastiques croisée et non croisée, avec ou sans obstacles.	10
2.5	Calcul de facteur de forme 3D par échantillonnage et lancer de rayon.	10
2.6	Lumière, pénombre et ombre (à gauche) et les limites d'ombre associées (à droite).	11
2.7	Partition de l'espace des rayons suivant la visibilité.	12
2.8	Rayons issus d'un objet et rayons tangents.	13
2.9	Cellule trouée.	13
2.10	Lancer d'un rayon ramené à un problème de localisation.	14
2.11	Lancer un ensemble de rayons revient à intersecter un ensemble (ici une courbe) avec la subdivision.	14
4.1	Rayons ayant la même vue.	22
4.2	Les cellules du complexe peuvent concerner la vue avant ou la vue arrière.	22
4.3	Le complexe de visibilité 2D : un recollement de feuillets 2D.	23
4.4	Segments libres maximaux induisant des surfaces d'événement visuel pour les objets convexes et lisses par morceaux : T++T (à gauche) et T+T+T (à droite).	24
4.5	Une famille de segments libres maximaux tangents à 3 objets avec changement d'arêtes support (à gauche) forme deux arcs du squelette et un sommet (à droite).	25
4.6	L'espace des segments n'encode pas l'orientation des rayons qu'il "représente".	26
4.7	Discontinuité apparaissant dans l'espace des segments mais pas dans l'espace des classes de rayons.	26
4.8	Exemples de segments libres maximaux tangents dans le cas d'objets tangents.	28
4.9	Subdivision d'une 2-face due à des objets alignés : la situation en 3D (à gauche) et les 2-faces formées de segments libres maximaux dans le plan Π	29
4.10	Trois objets générant une face de dimension 2 (le long des arêtes coplanaires) et une face de dimension 1 (le long d'un autre triplet d'arêtes). Vues en perspective (à gauche) et de dessus (à droite).	30
4.11	Un sommet et une arête ne définissant pas un plan bitangent à leurs polytopes respectifs.	31

5.1	Des ensembles de sphères de \mathbb{R}^3 . À gauche, un ensemble de droites tangentes à deux sphères qui correspond à une 2-face du complexe qui n'est incidente à aucune arête ou sommet. À droite, un ensemble de droites tangentes à trois sphères qui correspond à une arête du complexe qui n'est incidente à aucun sommet.	36
5.2	k convexes disposés "en cercle" dont le complexe de visibilité est de taille $\Omega(k^2 + n)$	37
5.3	Un complexe de visibilité dont la taille est d'ordre n^4 : exemples de grilles et d'un terrain.	37
5.4	Un terrain induisant un espace de droites libres de complexité quadratique.	39
6.1	$\mathcal{H}(p_i, p_l, 2)$ and $\mathcal{H}(t_i, t_l, 1)$ are shown shaded.	52
6.2	For the sketch of the proof of Lemma 16 ($v \in (0, 1)$).	58
6.3	For the sketch of the proof of Lemma 19.	60
6.4	For the proof of Lemma 21.	61
6.5	Quadratic view from the origin [32].	66
6.6	For the proof of Lemma 30.	68
6.7	Illustration for the case of polygons of bounded aspect ratio.	70
6.8	For the definition of t and C (C is shown from the side view).	72
6.9	For the definition of a, a', b, b'	72
6.10	The height from p_l to \mathcal{P} is greater than $ t_i t_l \cos \theta - 1$	73
6.11	The part E of $\mathcal{H}(p_i, p_l, 1)$ outside F	75
6.12	G , a part of ∂F enclosing $E \cap \partial F$	76
6.13	The region H and a plane Π	76
6.14	Section of H by a plane Π intersecting segment $p_i p_l$ at p	76
6.15	The length of the circular arcs ab	78
6.16	For the computing a bound on $\Delta\theta$	79
6.17	For the proof of Proposition 39.	80
6.18	For the proof of Proposition 39, case 1.	81
7.1	A terrain of size n with $\Omega(n^4)$ maximal non-occluded line segments tangent in four points.	86
7.2	A line tangent at a vertex of each of k polytopes.	88
7.3	Plane Π_t contains edge e and intersects polytopes \mathbf{P} , \mathbf{Q} , and \mathbf{R} in polygons P_t , Q_t , and R_t	90
7.4	A bitangent to P_t and Q_t is tangent to P_t along an edge. The plane Π_t is F-critical.	91
7.5	Plane Π_t is F-critical : it contains a line that lies in a plane Ψ containing a face of \mathbf{P} such that the line is tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ at a point not on l_e	92
7.6	Plane Π_{t^*} contains a line m such that (i) m lies in a plane $\Psi \neq \Pi_{t^*}$ containing a face of \mathbf{P} , and (ii) m is tangent to polygon $\mathbf{P} \cap \Psi$ at some point not on l_e ; however m is not tangent to $\mathbf{Q} \cap \Psi$. If the definition of F-critical planes was not considering such plane Π_{t^*} to be F-critical then Lemma 45 would not hold. Indeed the set u of supports of line $\Pi_{t^*-\varepsilon} \cap \Psi$ is a maximal (P_t, Q_t) -tuple for some but not all t in any open neighborhood of t^* , and, although Π_{t^*} is V-critical, there exists no V-critical event (t^*, v) such that u contains v or an edge with endpoint v	93
7.7	Lines through x in Π_t and tangent to P_t and Q_t	94
7.8	Line m is tangent to \mathbf{P} along a face in plane $\Psi \neq \Pi_{t^*}$	98
7.9	m is tangent to \mathbf{P} along a face in Ψ and (a) to $\mathbf{Q} \cap \Psi$ only on l_e or (b) to \mathbf{Q} along a face in Ψ	99
7.10	Lower bound examples for Lemmas 65 and 66.	105

8.1	Sommet et arête du squelette 3D apparaissant dans un plan de balayage.	107
8.2	Un balayage s'effectue entre les plans supportant les faces incidentes à l'arête de référence.	108
8.3	Un V-event initial.	114
8.4	Un V-event initial crée de nouvelles bitangentes entre le point et les polygones (à gauche). Juste après le V-event initial, les bitangentes se répartissent entre les arêtes incidentes au sommet (à droite).	115
8.5	La subdivision du cercle des directions associée à un polygone convexe.	115
8.6	Recherche du support d'une bitangente sur un polygone au moyen de son dual.	115
8.7	Un V-event terminal.	116
8.8	Un exemple de T-event.	117
8.9	Deux bitangentes qui deviennent alignées sans générer de T-event.	117
8.10	Mise-à-jour du squelette 2D au passage par un T-event : les arcs a, \dots, f incidents aux bitangentes avant la fusion se redistribuent entre les bitangentes après la fusion. Les ensembles de droites pointillées représentent les arcs du squelette 2D incidents aux bitangentes.	118
8.11	Un exemple de V-event.	119
8.12	Traitement d'un V-event : des sommets 2D fusionnent (ici $ \mathcal{F}_d = 3$) puis le sommet obtenu dans le plan du V-event se sépare en plusieurs nouveaux sommets (ici $ \mathcal{F}_a = 4$). Les bitangentes qui s'appuyaient sur les sommets disparus se répartissent entre les nouveaux sommets.	119
8.13	Un exemple de F-event.	120
8.14	La droite caractéristique signalant un F-event.	120
8.15	Un exemple de R-event.	120
8.16	Calcul de la vue d'un point dans une collection de polygones convexes disjoints ramené à un calcul d'enveloppe inférieure d'une famille de segments.	122
9.1	L'arrangement dual traduit des phénomènes qui ne sont pas locaux à une face du complexe : le fait qu'une droite commence à intersecter l'objet A n'affecte en rien le segment libre maximal qui se trouve entre les objets B et C	133
9.2	Trois sphères disjointes et de même rayon intersectées par trois droites selon trois ordres distincts.	133
9.3	Deux droites intersectant trois objets convexes (à gauche) apparaissent connectées sur une quadrique réglée, ici un hyperboloïde à une nappe (à droite).	134
9.4	Une famille de réglages d'une quadrique vue comme courbe dans l'espace des droites.	135
9.5	Plans séparateurs permettant de définir un entonnoir de séparation d'un triplet de sphères (A, B, C)	135
9.6	Les bloqueurs d'un cluster ne sont pas seulement ceux des faces qui le composent.	139
9.7	Les types de 4-cellules du complexe de visibilité : intérieure (i), frontière (f et f') et extérieure (e).	141
9.8	Une scène pour laquelle la taille du complexe projectif (d'ordre quartique) est bien plus grande que celle du complexe affine (d'ordre quadratique).	141
11.1	Two examples of quadruples of spheres with infinitely many common tangents.	155
A.1	Familles de droites de l'espace formant des droites contenues dans Γ	185
A.2	Familles de droites de l'espace formant des plans contenus dans Γ	186

B.1	Droites engendrant les surfaces d'événement visuel $T++T$ (à gauche) et $T+T+T$ (à droite).	188
C.1	Exemples de segments libres maximaux tangents dans le cas d'objets tangents. . .	191
C.2	Un sommet et une arête ne définissant pas un plan bitangent à leurs polyèdres respectifs.	192

Annexe A

Coordonnées de Plücker

Les droites de l'espace fournissent un moyen commode d'exprimer les propriétés de visibilité. Pour manipuler ces droites algorithmiquement il faut les représenter, c'est-à-dire les paramétrer. Notre choix s'est porté sur les coordonnées de Plücker des droites pour deux raisons. D'une part, ce paramétrage est *bicontinu* et garantit donc que les singularités d'un ensemble de paramètres sont exactement celles de l'ensemble de droites qu'il décrit. Cela évite d'ajouter aux dégénérescences, géométriques, propres au problème étudié d'autres dégénérescences, artificielles, dues au paramétrage. D'autre part, ces coordonnées présentent des propriétés *algébriques* intéressantes, permettant entre autres de décrire simplement des ensembles de droites induits par des objets algébriques (*c.f.* Chapitre 9).

Cette annexe rappelle les définitions des coordonnées de Plücker des droites de l'espace et rassemble quelques propriétés utilisées dans ce manuscrit. Nous présentons les notions nécessaires à la lecture de ce document de manière intuitive sans chercher à être exhaustifs. Pour une présentation plus complète nous renvoyons par exemple à l'ouvrage de Pottman et Wallner [78, Chapitre 2].

A.1 Définitions

Notations. Nous notons respectivement $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'espace projectif de dimension n sur les réels et les complexes et \mathbb{S}^n la sphère *réelle* de dimension n . Nous notons le produit scalaire \cdot et le produit vectoriel \times .

Droites projectives. Considérons deux points distincts A et B de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ de coordonnées respectives (a_0, a_1, a_2, a_3) et (b_0, b_1, b_2, b_3) . La matrice

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

présente exactement douze mineurs 2×2 distincts et non identiquement nuls que nous désignons par $p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$ pour $i \neq j$. Dans la mesure où $p_{ij} = -p_{ji}$, on se cantonne au sextuplet $L_{AB} = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12})$. Comme les coordonnées de A et B sont définies à multiplication par un scalaire près, il en va de même pour L_{AB} qui est donc un point de l'espace projectif réel de dimension 5, $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$. Comme

$$(\lambda a_i + \mu b_i) b_j - (\lambda a_j + \mu b_j) b_i = \lambda (a_i b_j - a_j b_i),$$

remplacer A – ou B , par symétrie des rôles – par une combinaison linéaire $\lambda A + \mu B$ ne change pas le point de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ représenté par L_{AB} . Ce point ne dépend donc pas du choix d'un couple (A, B) spécifique mais uniquement de la droite projective qu'ils engendrent.

Inversement, la droite définie par A et B est entièrement caractérisée par le point L_{AB} (c.f. par exemple Pottman et Wallner [78, Chapitre 2]). Nous reviendrons sur cette propriété dans le cas, plus intuitif, des droites affines. Les *coordonnées de Plücker* de la droite AB sont les coordonnées du point L_{AB} , et sont donc définies à multiplication par un scalaire près.

Le déterminant de la matrice M_{AB} est nul puisque deux de ses colonnes sont égales. En développant ce déterminant par rapport à la première colonne l'on obtient :

$$a_0 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & b_0 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & b_0 \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & b_0 \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant chacun des déterminants 3×3 par rapport à sa première colonne on obtient (après division par 2) l'identité

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0. \tag{A.1}$$

Cette relation, homogène, définit une hypersurface algébrique de degré 2 de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ connue sous les noms d'*hypersurface de Plücker*, de *quadrique de Plücker*, de *quadrique de Klein* ou de *Grassmannienne* $G_{2,4}$. Tout point de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ qui représente les coordonnées de Plücker d'une droite de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ est sur cette surface, et réciproquement. Nous notons cette hypersurface Γ .

Cette définition s'étend immédiatement aux droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. En fait, un formalisme analogue permet de représenter les sous-espaces projectifs de dimension k de l'espace projectif (réel ou complexe) de dimension n . La relation (A.1) devient alors un ensemble de relations, qui définissent la *Grassmannienne* $G_{k+1,n+1}$. Le lecteur intéressé par cette généralisation via la notion d'algèbre extérieure peut se référer à [78, Chapitre 2].

Droites affines. Il est possible de voir l'espace affine \mathbb{R}^3 comme un espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ auquel on aurait enlevé un plan projectif, appelé *plan à l'infini*. Les droites affines correspondent alors aux droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ non contenues dans ce plan. L'extension des coordonnées de Plücker aux droites affines de \mathbb{R}^3 en découle immédiatement, dépendant toutefois du choix du plan à l'infini. Une convention courante consiste à choisir pour plan à l'infini $\{(x_0, x_1, x_2, x_3) | x_0 = 0\}$, la coordonnée d'indice 0 étant alors appelée *coordonnée d'homogénéisation*. Les coordonnées de Plücker définissent alors un homéomorphisme entre les droites affines de \mathbb{R}^3 et l'hypersurface Γ à laquelle on a enlevé l'ensemble $\{(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}) | p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0\}$.

Les coordonnées de Plücker peuvent s'interpréter simplement en termes géométriques dans le cas des droites affines. Considérons une droite Δ de vecteur directeur \vec{v} et passant par le point A , O désignant l'origine du repère. Les coordonnées de Plücker de Δ sont, avec la convention précédente, $(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12})$ où $(p_{01}, p_{02}, p_{03}) = \vec{v}$ et $(p_{23}, p_{31}, p_{12}) = \vec{v} \times \overrightarrow{OA}$. L'équation (A.1) de l'hypersurface de Plücker se réécrit alors

$$\vec{v} \cdot (\overrightarrow{OA} \times \vec{v}) = 0$$

et est bien évidemment vérifiée par tout point A et tout vecteur \vec{v} .

Observons que les coordonnées de Plücker d'une droite Δ la caractérise. En effet, le triplet (p_{01}, p_{02}, p_{03}) fournit sa direction et le vecteur

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2} \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{23} \\ p_{31} \\ p_{12} \end{pmatrix}$$

indique le point P de Δ le plus proche de O .

Droites affines orientées. Les droites affines orientées peuvent elles-aussi être représentées au moyen des coordonnées de Plücker. Considérons l'application :

$$L : \begin{cases} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (\vec{v}, P) & \longmapsto (\vec{v}, \vec{v} \times \overrightarrow{OP}) \end{cases} .$$

Soit Δ une droite orientée de \mathbb{R}^3 , P un de ses points et \vec{v} un de ses vecteurs directeurs. Puisque

$$L(\vec{v}, P + \lambda \vec{v}) = L(\vec{v}, P) \text{ et } L(\lambda \vec{v}, P) = L(\vec{v}, P)$$

le point $L(\vec{v}, P)$ vu comme un point de l'espace projectif orienté $\mathbb{P}_+^5(\mathbb{R})$ représente la droite orientée Δ .

Optimalité de cette représentation. Les coordonnées de Plücker représentent les droites de l'espace par les points d'une variété de dimension 4 de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$. Ne peut-on pas trouver une correspondance entre les droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ et l'espace $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ tout entier ? La réponse est doublement négative.

D'une part, il n'existe aucune fonction algébrique mettant en bijection les droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ et l'espace $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$. Supposons qu'une telle fonction Φ existe. Puisque Φ est algébrique, elle s'étend naturellement en une paramétrisation Ψ des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ par $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. Étant donné un point p (resp. un plan Π) de l'espace, désignons par L_p (resp. L_Π) les droites passant par p (resp. contenues dans Π). Les coordonnées de Plücker envoient ces ensembles L_p et L_Π sur des 2-plans – *c.f.* Section A.2.3 pour le cas réel. Comme les paramètres d'une droite sont des fonctions algébriques de leurs coordonnées de Plücker – le cas projectif est analogue au cas affine discuté ci-dessus – il s'en suit que l'image par Ψ d'un L_p ou d'un L_Π est une variété algébrique de dimension 2 de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. Deux variétés de dimension 2 s'intersectent nécessairement dans cet espace. Si Ψ existe, pour tout point $p \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ et pour tout plan $\Pi \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ il doit donc exister une droite passant par p et contenue dans Π . Ce n'est évidemment pas le cas. Par conséquent, il n'existe aucun paramétrage algébrique des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ par $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ et le cas réel en découle.

D'autre part, il n'existe même aucune fonction continue mettant en bijection les droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ et l'espace $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ et définissant la même topologie sur les droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ que la Grassmannienne. Cette propriété est bien au-delà de l'objectif de cette annexe et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de Pottman et Wallner [78, Chapitre 2].

Les coordonnées de Plücker mettent donc en bijection les droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ avec une variété algébrique de degré minimal plongée dans un espace de dimension minimale.

A.2 Sous-ensembles remarquables

Au cours de cette thèse nous manipulons certaines familles de droites particulières. Nous proposons dans cette section un tour d'horizon de ces sous-ensembles et de leur représentation via les coordonnées de Plücker.

A.2.1 Side-operator

Droites sécantes. Considérons deux droites AB et CD de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ de coordonnées de Plücker respectives L et L' . Ces deux droites s'intersectent si et seulement si les quatre points sont coplanaires, c'est-à-dire que le déterminant 4×4 de leurs coordonnées projectives s'annule. En développant ce déterminant comme nous l'avons fait pour M_{AB} en Section A.1, d'abord pour la colonne de A puis pour la colonne de B, nous obtenons :

$$\det(A, B, C, D) = p_{01}p'_{23} + p_{02}p'_{31} + p_{03}p'_{12} + p_{23}p'_{01} + p_{31}p'_{02} + p_{12}p'_{03}.$$

Le terme de droite est appelé **side operator** des droites AB et CD , noté $AB \odot CD$ et est un opérateur bilinéaire en leurs coordonnées de Plücker. Deux droites s'intersectent si et seulement si leur side operator s'annule et l'ensemble des droites sécantes à une droite donnée est l'intersection de la Grassmannienne avec un hyperplan de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$.

Notons au passage que l'équation de la quadrique de Plücker (A.1) peut se réécrire plus simplement

$$\{L = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}) | L \odot L = 0\}.$$

Orientation mutuelle de paires de droites orientées. Étant données deux droites orientées $\Delta = (\vec{v}, P)$ et $\Delta' = (\vec{v}', P')$ de \mathbb{R}^3 , leur side-operator s'écrit

$$\Delta \odot \Delta' = \vec{v} \cdot (\overrightarrow{OP'} \times \vec{v}') + \vec{v}' \cdot (\overrightarrow{OP} \times \vec{v}) = \det(\overrightarrow{OP'}, \vec{v}', \vec{v}) + \det(\overrightarrow{OP}, \vec{v}, \vec{v}') = \det(\overrightarrow{PP'}, \vec{v}', \vec{v}).$$

Le signe de cette expression caractérise l'orientation mutuelle des deux droites. En particulier, tester si une droite intersecte un triangle dans l'espace peut se faire en évaluant les signes de trois side-operator. Plus encore, étant données une collection de droites orientées de \mathbb{R}^3 , l'arrangement de leurs hyperplans associés partitionne Γ en cellules dont toutes les droites ont exactement la même orientation par rapport aux droites initiales. Pour de plus amples détails et une application de ce principe au lancer de rayon sur des triangles de \mathbb{R}^3 nous renvoyons à l'article de Pellegrini [69].

Sections de Γ par des hyperplans. Les coordonnées de Plücker permettent de décrire simplement l'ensemble des droites intersectant k droites ℓ_1, \dots, ℓ_k de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, aussi appelées *transversales* à ces droites.

Les transversales à ℓ_i correspondent à l'intersection de Γ par un hyperplan H_i . Les transversales communes à $(\ell_i)_{i=1, \dots, k}$ correspondent donc à l'intersection de Γ avec $\cap_{i=1, \dots, k} H_i$. Si l'on suppose les droites en position générale, l'intersection des hyperplans H_i est générique et consiste en un sous-espace affine de dimension $5 - k$. Pour $k = 4$, on obtient une droite de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ qui soit intersecte la quadrique de Plücker en zéro, un ou deux points, soit est contenue dans Γ ; on retrouve ainsi la propriété classique que 4 droites de l'espace admettent 0, 1, 2 ou une infinité de transversales communes. Pour $k = 3$, on obtient un 2-plan qui intersecte la quadrique de Plücker en une conique; on retrouve ainsi la propriété classique que les transversales à 3 droites de l'espace en position générale engendrent une surface de degré 2.

A.2.2 Intersection par des variétés de plus haut degré

Les droites tangentes à une surface algébrique lisse de degré d de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sont obtenues comme l'intersection de Γ par une variété algébrique de degré $d(d - 1)$ (c.f. Pottman et Wallner [78, Chapitre 7]). Cela permet, via le Théorème de Bezout, d'obtenir des bornes sur le nombre de

droites simultanément tangentes à 4 surfaces algébriques en position générale. En particulier, l'ensemble des droites tangentes à une sphère de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ est l'intersection de Γ par une quadrique de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ et 4 sphères en position générale admettent au plus $2^5 = 32$ tangentes communes. Soulignons que la borne indiquée par le Théorème de Bezout ne concerne que le nombre de solutions complexes au système algébrique sous-jacent ; le nombre de solutions réelles (voire affines) peut, lui, être en deçà. C'est d'ailleurs le cas pour le nombre de droites affines réelles tangentes à 4 sphères, comme nous l'avons montré au Chapitre 11.

A.2.3 Sous-variétés projectives

La quadrique de Plücker contient certains sous-espaces projectifs correspondant à des ensembles de droites remarquables. Nous concluons cette annexe en les passant en revue.

Droites. Une droite Δ de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ est formée par l'ensemble des combinaisons linéaires de deux de ses points u et v . Pour que la droite soit contenue dans Γ l'on doit avoir

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda u + \mu v) \odot (\lambda u + \mu v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 u \odot u + 2\lambda\mu u \odot v + \mu^2 v \odot v = 0.$$

Cela est équivalent aux conditions $u \odot u = 0$, $u \odot v = 0$ et $v \odot v = 0$. Autrement dit, pour que deux points u et v de $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ engendrent une droite contenue dans Γ il faut et il suffit que ce soient les coordonnées de Plücker de deux droites sécantes. Observons par ailleurs que pour tous λ et μ , par linéarité du *side operator*, toute droite sécante à u et v est sécante à la droite $\lambda u + \mu v$. Cette droite $\lambda u + \mu v$ doit donc être contenue dans le plan engendré par u et v et doit de plus passer par leur intersection. Il en résulte qu'une droite contenue dans Γ décrit une famille de droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ qui sont toutes coplanaires et concourantes.

Γ contient donc des droites qui sont exactement les familles maximales de droites à la fois concourantes et coplanaires.

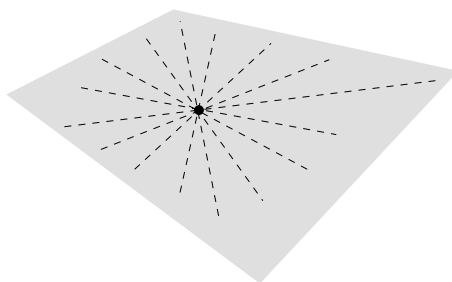


FIG. A.1. Familles de droites de l'espace formant des droites contenues dans Γ .

2-plans. Considérons un 2-plan Π contenu dans Γ et engendré par trois points u, v et w . Par le même raisonnement que précédemment, du fait que toute combinaison linéaire de ces trois points est sur Γ l'on déduit que $u \odot v = 0$, $u \odot w = 0$ et $v \odot w = 0$. La droite w intersecte donc les deux droites coplanaires u et v et les trois droites sont donc concourantes ou coplanaires. Par ailleurs, par linéarité du *side operator*, toute droite sécante à u, v et w est sécante à toute droite de Π . Si u, v et w sont concourantes cela signifie que Π est l'ensemble des droites passant par leur intersection et si elles sont coplanaires alors Π est l'ensemble des droites contenues dans ce plan.

Γ contient donc des 2-plans qui sont exactement les familles maximales de droites concourantes et les familles maximales de droites coplanaires.

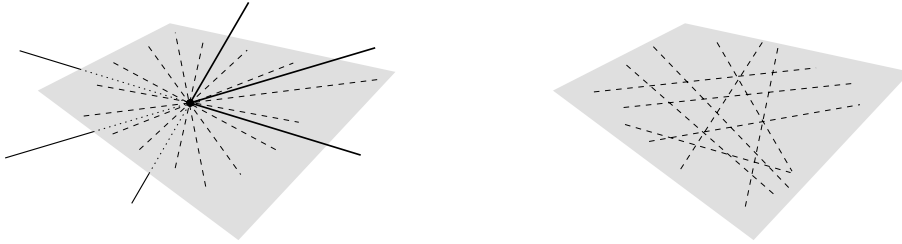


FIG. A.2. Familles de droites de l'espace formant des plans contenus dans Γ .

Autres dimensions. Supposons que Γ contienne un 3-plan Π . Alors tout triplet de 2-plans de Π doit s'intersecter en une droite. Or Π contient une infinité de 2-plans qui sont soit des ensembles de droites concourantes, soit des ensembles de droites coplanaires. Par conséquent, Π contient au moins 2 2-plans correspondant à des droites concourantes ou au moins 2 2-plans correspondant à des droites coplanaires. Dans ces deux cas, l'intersection de cette paire de 2-plans ne peut être une droite contenue dans Γ . Par conséquent, Γ ne contient aucun 3-plan – et encore moins de 4-plans.

Annexe B

Surfaces d'événement visuel d'objets convexes

Cette annexe présente la définition de *surface d'événement visuel* sur laquelle est fondée le *squelette de visibilité*. À notre connaissance, aucune classification des surfaces d'événement visuel n'a été donnée pour le cadre qui nous intéresse, à savoir les polytopes. Mentionnons que les surfaces d'événement visuel induits par l'ensemble des faces d'un polyèdre ont, elles, été décrites par Gigus et Malik [44] et Gigus et al.[43] ; ces surfaces ne sont toutefois d'un sur-ensemble des surfaces d'événement visuel relatives aux polytopes eux-mêmes. Aussi nous reproduisons tout d'abord la définition donnée dans la thèse de Petitjean [72, Chapitre 5] dans un cadre relativement proche, une collection d'objets algébriques lisses et disjoints, avant d'extrapoler cette définition pour le cadre qui nous intéresse.

B.1 Convexes algébriques lisses

Dans sa thèse, Petitjean [72, Chapitre 5] définit les surfaces d'événements visuels pour un objet algébrique lisse ou lisse par morceaux. Cette définition se base sur des points ou ensembles de points particuliers de la surface : points de rebroussement, points d'auto-intersection – formant la *courbe double* – et lieu des points de tangence entre une des droites issues du point de vue et la surface – la *générateur de contour*. Bien entendu, l'union d'objets algébriques lisses est elle-même algébrique et est soit lisse – si les objets sont disjoints – ou lisse par morceaux – si les objets s'intersectent. Si ces objets sont de plus convexes, alors leur union ne contient aucun point de rebroussement.

Nous examinons le cas d'un objet algébrique lisse, *i.e.* d'une scène d'objets algébriques lisses et disjoints, où les surfaces d'événement visuel sont uniquement définies par le générateur de contour.

Point de vue singulier. Soit p un point de l'espace $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ où \mathcal{S} est l'objet observé. La *vue* de p est la projection sur une sphère centrée en p de la vue des rayons issus de p . Nous nous intéressons à la topologie de cette vue, aussi le choix de la sphère elle-même n'a-t-elle aucune importance. Un point de vue est *régulier* si la topologie de la vue reste la même dans un voisinage de ce point de vue ; dans le cas contraire il est dit *singulier*. L'ensemble des points de vue singuliers est de mesure nulle. Un point de vue singulier correspond, dans le cas d'un objet lisse, à un point de vue par lequel passe une droite ayant un contact d'ordre élevé (3 ou plus) avec la surface.

Codimension. La *codimension* d'un point de vue p est, intuitivement, définie comme 3 moins la dimension de l'ensemble des points ayant la même vue que p , la notion de dimension étant délicate à préciser car n'ayant de sens que localement autour de p . Cette notion peut se formuler rigoureusement au moyen de la théorie des *germes* [72, Chapitre 5]. Les points de vue singuliers apparaissent alors comme ceux de codimension strictement positive.

Surfaces d'événement visuel. Les *surfaces d'événement visuel* sont les lieux des points de vue singuliers de codimension 1. Cette particularisation des singularités de codimension 1 provient essentiellement de considérations pratiques : ce sont en effet les seuls points de vue singuliers observables en raison de questions de précision numérique. Pour un objet lisse, il existe deux types de surfaces d'événement visuel, les *traversées de tangentes* – notée $T++T$ – et les *tritangentes* – notées $T+T+T$. Ces deux types de surfaces sont engendrées par des ensembles de droites ayant des contacts particuliers avec l'objet. Les traversées de tangentes sont balayées par les droites tangentes à l'objet en deux points par lesquels passe un plan qui lui est bitangent. Les tritangentes sont, elles, engendrées par des droites tangentes à l'objet en trois points. Ces deux types de surfaces d'événement visuel sont illustrés Figure B.1.

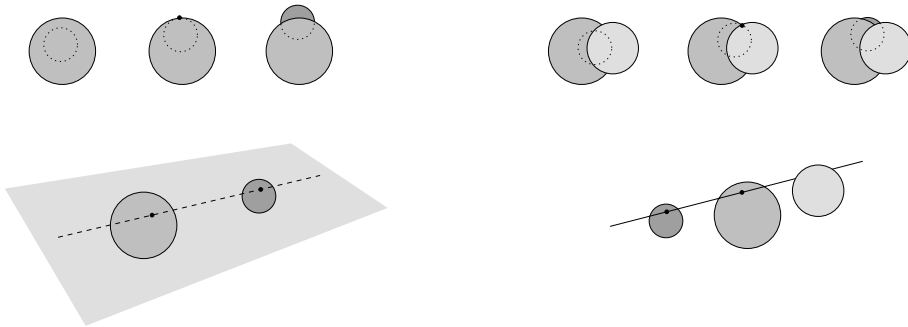


FIG. B.1. Droites engendrant les surfaces d'événement visuel $T++T$ (à gauche) et $T+T+T$ (à droite).

Transparence *versus* opacité. La définition d'événement visuel change bien entendu selon que l'on considère les objets comme transparents ou opaques. La définition donnée au paragraphe précédent concerne les objets transparents. Pour l'adapter au cas des objets opaques, il convient de considérer les surfaces engendrées non par des droites mais par des segments libres soit bitangents dans des plans bitangents, soit tritangents.

Convexes algébriques lisses non disjoints. Si les objets s'intersectent alors leur union a une courbe double. Dès lors, plusieurs autres types d'événements apparaissent [72, Chapitre 5]. Nous ne nous attardons pas sur ce catalogue.

B.2 Polytopes

Nous souhaiterions étendre les notions de surface d'événement visuel à des polytopes. À notre connaissance, aucune formalisation rigoureuse n'a à ce jour été proposée et cela dépasse le cadre de cette annexe. Aussi nous contentons nous d'indiquer l'*hypothèse* sur laquelle se base notre définition donnée en Section C. Nous insistons sur le fait que nous ne démontrons pas cette hypothèse.

Soit \mathcal{S} l'union d'un nombre fini de polytopes disjoints. Commençons par examiner le cas où les objets sont transparents. Soit p un point de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$. La *vue* de p est l'arrangement sur une sphère centrée en p des projections des objets à partir de p . Nous nous intéressons aux projections des polytopes et ignorons toute information relative à leurs facettes. Un point de vue est régulier si sa vue est stable – *i.e.* si la topologie de l'arrangement ne change pas – dans un voisinage de ce point et singulier sinon.

Hypothèse 98. *Tout point de vue singulier est sur une droite tangente à 3 polytopes ($T+T+T$) ou tangente à 2 polytopes dans un plan qui leur est bitangent ($T++T$).*

Si les objets ne sont pas transparents, alors le segment de droite contenant le point de vue et tous les points de tangence doit en outre être *libre*, c'est-à-dire n'intersecter l'intérieur d'aucun objet. Autrement dit, nous faisons l'hypothèse que les surfaces d'événement visuel sont les mêmes pour des polytopes que pour des objets lisses convexes.

Annexe C

Squelette de visibilité de polytopes

Nous reproduisons ici la définition du squelette de visibilité posée au Chapitre 4 en complétant les preuves.

C.1 Terminologie

Un polytope est un polyèdre convexe borné, ce qui peut être vu comme l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. Nous supposons que deux faces d'un même polytope ne sont pas coplanaires (autrement dit, les faces coplanaires sont fusionnées). Un polytope peut être réduit à un polygone convexe, un segment ou un point. Nous appelons *arête ouverte* une arête privée de ses extrémités.

Une droite qui est tangente à un polytope l'intersecte en un ou plusieurs sommets et arêtes ; les *générateurs* de la droite sur ce polytope sont les sommets et les arêtes ouvertes qu'elle rencontre. Seules les droites tangentes à un polytope dans le plan d'une de ses faces peuvent avoir plusieurs générateurs sur ce polytope : deux arêtes ouvertes, une arête ouverte et un sommet, deux sommets ou deux sommets et une arête ouverte.

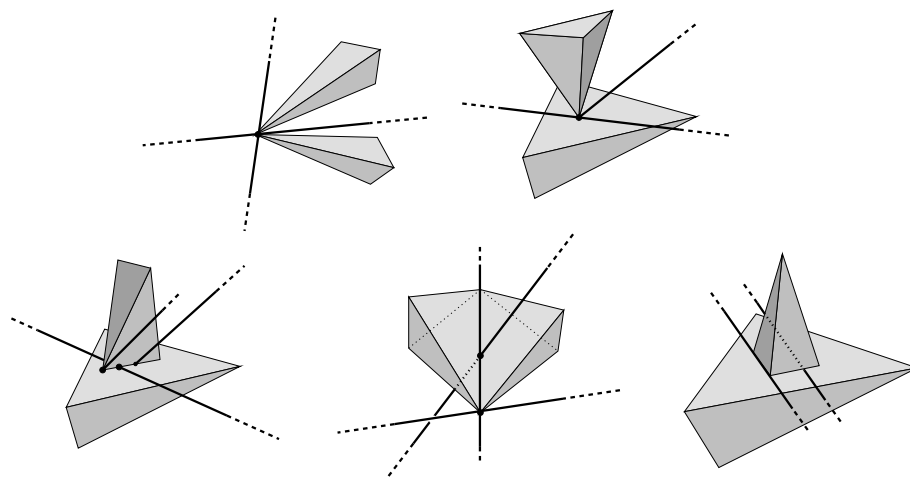


FIG. C.1. Exemples de segments libres maximaux tangents dans le cas d'objets tangents.

Soit \mathcal{C} une collection d'objets convexes en 3D. Un segment est *libre* vis-à-vis de \mathcal{C} s'il n'intersecte l'intérieur d'aucun objet de \mathcal{C} . Un segment *libre maximal* est un segment libre qui n'est

contenu dans aucun segment libre autre que lui-même. Nous notons $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ l'espace des segments libres maximaux vis-à-vis de \mathcal{C} .

Soit s un segment libre maximal. s est *tangent* à un objet \mathcal{O} d'intérieur non vide si et seulement si sa droite support intersecte \mathcal{O} mais pas son intérieur. s est *tangent* à un polygone \mathcal{O} si et seulement si il intersecte une de ses arêtes. Enfin, s est *tangent* à un segment \mathcal{O} si et seulement si il l'intersecte.

Notons que ces définitions de *segment libre* et *segment tangent* sont discutables dans le cas d'objets tangents. La figure C.1 représente des exemples de segments libres maximaux tangents selon notre définition.

Le choix d'une définition excluant tous ou certains de ces cas est principalement guidé par les applications. Un tel choix a bien entendu des implications sur le complexe et le squelette de visibilité qui sont définis par des critères de tangence dans l'espace des segments libres maximaux. Pour l'essentiel, étendre les arguments et algorithmes que nous proposons à d'autres définitions présente surtout des difficultés d'ordre pratique et non théorique. Pour cette raison, nous avons fait le choix d'une définition simple.

Les *générateurs* d'un segment libre maximal sont les sommets et arêtes ouvertes en lesquels il est tangent à des polytopes.

C.2 Contexte

Nous faisons l'hypothèse (*cf.* Annexe B) que les surfaces d'évènement visuel parmi des polytopes sont les mêmes que parmi des objets lisses convexes disjoints, à savoir les T++T et les T+T+T.

Nous définissons le squelette de visibilité afin qu'il encode les surfaces d'évènement visuel engendrés par les polytopes et soit de taille minimale. Notons que la définition du squelette de visibilité de Durand et al. [38] ne saurait être minimale. En effet, les ensembles de segments libres maximaux tangents à deux polytopes en respectivement un sommet et une arête forment des arcs de leur squelette. Or, les segments d'un tel arc n'engendrent pas nécessairement un plan tangent au polytope supportant le sommet (*cf.* figure C.2).

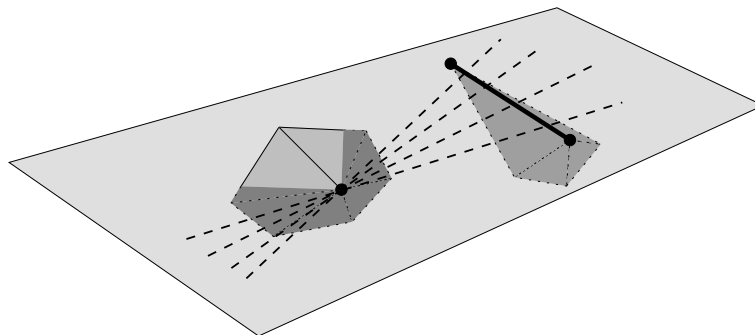


FIG. C.2. Un sommet et une arête ne définissant pas un plan bitangent à leurs polytopes respectifs.

Nous nous limitons à l'étude du squelette de visibilité de *polytopes d'intérieurs disjoints*.

C.3 Le squelette

Dans l'espace des segments libres maximaux on considère deux ensembles : \mathcal{K}_{EV} , l'ensemble des segments tangents à deux polytopes dans un plan bitangent et s'appuyant en un sommet pour l'un et une arête ouverte pour l'autre, et \mathcal{K}_{E3} , l'ensemble des segments tangents à trois polytopes en trois arêtes ouvertes qui ne sont ni concourantes, ni toutes les trois coplanaires. Ces ensembles ne sont pas nécessairement disjoints.

Définition 99. *Le squelette de visibilité est la partition de $\overline{\mathcal{K}_{EV} \cup \mathcal{K}_{E3}}$ en composantes connexes de segments libres maximaux de mêmes générateurs. Une composante connexe est appelée sommet si elle est réduite à un point et arc sinon.*

Les *générateurs d'un arc* sont les générateurs de ses segments libres maximaux. Tout arc du squelette a dans ses générateurs soit un triplet d'arêtes deux à deux non coplanaires, soit un sommet et une arête définissant un plan bitangent à leurs objets.

Nous établissons maintenant que le squelette de visibilité encode de manière minimale les surfaces d'événements visuels en prouvant les 4 propriétés annoncées au Chapitre 4.

Propriété 100. *Tout arc est un ensemble connexe de dimension 1 de segments libres maximaux ayant le même ensemble de générateurs.*

Démonstration. Un arc du squelette est une composante connexe, non réduite à un point, de segments libres maximaux de mêmes générateurs. Par définition, les segments d'un arc ont donc le même ensemble de générateurs.

Les segments d'un arc appartiennent donc tous à l'ensemble \mathcal{K}_{EV} ou à l'ensemble \mathcal{K}_{E3} . Par conséquent, tout arc a dans ses générateurs soit un triplet d'arêtes deux à deux non coplanaires soit un sommet et une arête définissant un plan bitangent à leurs objets respectifs.

L'ensemble des segments libres maximaux engendrés par un sommet et une arête ouverte disjoints est de dimension 0 ou 1 selon que le sommet appartient ou non à la droite support de l'arête. L'ensemble des segments libres maximaux engendrés par trois arêtes ouvertes qui ne sont ni concourantes, ni toutes les trois coplanaires est de dimension au plus 1. Un élément du squelette est donc une sous-partie connexe d'un ensemble de dimension 0 ou 1. Puisqu'un arc ne peut être de dimension 0 par définition, il s'agit par conséquent d'un ensemble de dimension 1. \square

Propriété 101. *Les segments du squelette de visibilité engendrent exactement les surfaces d'événement visuel.*

Démonstration. Les surfaces d'événement visuel sont de deux types, T+T+T et T++T. Soit p un point d'une surface d'événement visuel. Si p est sur une surface T++T, cette surface est engendrée par les segments libres maximaux tangents à deux objets dans un plan bitangent. En particulier, p appartient à un segment libre maximal s tangent soit à une arête et un sommet, soit à deux arêtes coplanaires. Dans le premier cas, $s \in \overline{\mathcal{K}_{EV}}$. Dans le second cas, faisons tourner le segment s autour de p dans le plan défini par les deux arêtes ; soit s peut atteindre une position s' passant un sommet d'une de ces arêtes tout en restant libre – et p appartient alors à un segment $s' \in \overline{\mathcal{K}_{EV}}$, soit s atteint une position s' tangente à un troisième polytope en une arête qui n'est pas coplanaire avec celles engendrant la surface T++T – et p appartient alors à un segment $s' \in \overline{\mathcal{K}_{E3}}$. Si p n'est sur aucune surface T++T alors il est sur une surface T+T+T qui est engendrée par les segments libres maximaux tangents à trois objets distincts. En particulier, p appartient à un segment libre maximal s tangent à trois arêtes (fermées). Ces

trois arêtes sont ni concourantes – les polytopes étant deux à deux disjoints – ni coplanaires – car elles engendreraient une portion de surface $\mathbb{T}++\mathbb{T}$ qui contiendrait p . Donc $s \in \overline{\mathcal{K}_{E3}}$.

Réciproquement, tout segment de $\overline{\mathcal{K}_{EV} \cup \mathcal{K}_{E3}}$ est inscrit dans une surface d'événement visuel. \square

Finalement, notre définition du squelette de visibilité garantit les 4 propriétés suivantes :

1. Le squelette est formé de sommets – des segments libres maximaux isolés – et d'arcs – des ensembles de dimension 1 de segments libres maximaux,
2. les segments libres maximaux d'un arc ont les mêmes générateurs géométriques,
3. toute surface d'événement visuel est balayée par les segments d'un arc,
4. tout segment libre maximal d'un arc est inscrit dans une surface d'événement visuel.

Annexe D

Calcul du squelette : un balayage dans l'espace des droites

Le cadre présenté au Chapitre 9 permet d'interpréter l'algorithme de calcul du squelette de visibilité exposé au Chapitre 8 comme une succession de balayages d'arrangements dans l'espace des droites. Dans cette annexe nous revenons plus en détail sur cette interprétation.

Balayage et section d'un arrangement. Notre algorithme procède par n balayages consécutifs, chacun d'entre eux calculant les sommets et arcs du squelette de visibilité intersectant une droite²⁶ donnée. Étant donnée une droite Δ de l'espace, notons respectivement \mathcal{S}_Δ et \mathcal{D}_Δ les ensembles de segments libres maximaux et de droites qui l'intersectent. D'une part, l'application associant à un segment sa droite support induit une bijection continue²⁷ entre \mathcal{S}_Δ et \mathcal{D}_Δ . D'autre part, cette bijection met en correspondance l'intersection de \mathcal{S}_Δ avec le complexe de visibilité et l'intersection de \mathcal{D}_Δ avec l'arrangement associé au cluster du segment de référence. Aussi, l'opération de balayage autour d'une arête dans notre algorithme correspond-elle au calcul d'une section d'un arrangement dans l'espace des droites par une hypersurface \mathcal{D}_Δ – l'ensemble des droites intersectant la droite support du segment de référence. Notons que si les droites sont paramétrées au moyen des coordonnées de Plücker alors \mathcal{D}_Δ est la section de la Grassmannienne par un hyperplan.

Ainsi, l'algorithme de calcul du squelette de visibilité par balayages peut-être vu comme le calcul de n sections d'arrangements (a priori tous distincts) dans $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ par des hyperplans.

Plusieurs balayages simultanés. Un balayage autour d'une droite – ou arête – consiste à maintenir l'intersection d'une famille de segments libres maximaux avec le complexe de visibilité. Cette famille consiste en l'ensemble des segments libres maximaux contenus dans le plan de balayage et se décompose en deux parties : ceux intersectant l'arête de référence – les *principaux* – et les autres – les *secondaires*. Désignons par A l'ensemble des segments principaux et par B l'ensemble des segments secondaires. Au cours du balayage, nous maintenons les bitangentes et arcs de tangentes. Les bitangentes correspondent aux intersections de A avec les 1-faces du complexe et de B avec les 2-faces – les segments de A ont en effet une tangence de plus que ceux de B , le polytope supportant l'arête de référence. Les arcs de tangentes correspondent aux

²⁶En pratique, nous ne calculons que les parties du squelette qui intersectent un *segment* donné et non une droite ; cette considération n'a aucune incidence sur l'algorithme ou sa complexité.

²⁷Mais pas bicontinue, les extrémités d'un segment libre maximal n'étant pas continues en sa droite support.

intersections de A avec les 2-faces du complexe et de B avec les 3-faces. L'algorithme ne sert *in fine* qu'à calculer les intersections de A avec les 1-faces et 0-faces du complexe, l'intersection avec les 0-faces n'intervenant qu'à certaines positions bien précises. Néanmoins, notre algorithme maintient l'intersection de B avec le complexe afin de pouvoir calculer efficacement l'information voulue. Par exemple, bien que l'intersection du complexe avec A corresponde à l'intersection d'un ensemble de droites avec un arrangement, cet arrangement n'est pas connu à l'avance car seul un petit nombre de surfaces intervient effectivement ; maintenir B est une manière de mettre à jour la liste des surfaces intervenant dans cet arrangement. Ainsi, l'on peut voir un balayage comme ayant deux niveaux, un balayage principal correspondant aux informations recherchées et des balayages secondaires servant à la mise à jour des informations utilisées par le balayage principal.

Notre algorithme de balayage par un plan correspond à plusieurs balayages simultanés dans l'espace des droites, l'un pour calculer l'information voulue – l'intersection de l'arrangement par un hyperplan, mentionnée précédemment – et les autres servant à effectuer ce balayage efficacement.