

Etude de la robustesse des automates cellulaires bidimensionnels asynchrones

Initiation à la Recherche

HANTZ Marlène – COURTAULT Jean-René



Juin 2009

Sommaire

Remerciements	4
I. Introduction.....	5
A. Historique	7
B. Automate cellulaire	8
1. Importance de la représentation	9
2. Trouver des automates insensibles à leur environnement.....	10
C. Quelques notions	11
II. Les automates cellulaires bidimensionnels asynchrones : premiers pas.....	12
A. Choix des règles à étudier	12
B. L'outil de mesure : Fiatlux	13
C. Topologie.....	13
D. Le jeu de la vie	14
1. Présentation	14
2. Premiers résultats	15
E. Les règles sommatives.....	20
1. Présentation	20
2. Premiers résultats	20
F. Réflexions sur les AC.....	25
III. Automatisation des observations.....	25
A. Préliminaires.....	25
1. Choix des paramètres.....	25
2. Que quantifier ?.....	26
3. Une classification.....	27
B. Jeu de la vie	27
1. Choix de la taille de l'AC	27
On constatera cependant que le type du graph III-4 n'a pas été trouvé en topologie Moore 8.	29
C. Règles sommatives	29
1. Choix de la taille de l'AC	29
2. Quelques résultats.....	29
IV. Conclusion	31
V. Annexe.....	32
A. Réflexion sur le comportement des automates cellulaires synchrone	32
1. Choix d'une méthode	32

2.	Démonstration	32
B.	Réflexion sur le comportement des automates cellulaires asynchrone	33
1.	Cycle de taille supérieur ou égale à 2.....	33
2.	Point fixe.....	33
C.	Représentation dans l'espace des configurations et des transitions des automates cellulaires synchrones.....	34
1.	Expérience	34
2.	Démonstration	35
VI.	Bibliographie.....	37

Remerciements

Nous tenons à remercier particulièrement :

- M Nazim FATES pour nous avoir encadrés dans ce module,
- Le petit Maximilien rien que pour être le plus beau bébé du monde,
- Mme Marinette LATINI pour avoir pris le temps de nous relire,

I. Introduction

Ce rapport présente notre activité dans le cadre de l'UE (unité d'enseignement) « initiation à la recherche » que nous avons effectuée au cours de notre M1 informatique durant le deuxième semestre de l'année 2008-2009. Cette matière a pour objectif de nous faire découvrir le monde de la recherche et s'est déroulée au Loria¹, au sein de l'équipe Maia² et a été encadrée par M Nazim FATES.

L'équipe MAIA s'intéresse à la modélisation, la construction et la simulation de systèmes composés d'un ou plusieurs **agents**. Un agent peut prendre différentes formes : physique (comme un robot mobile, ou un robot d'anesthésie), ou logiciel (softbot, par exemple un assistant intelligent) ou biologique (humains, insectes sociaux).

En guise d'introduction, nous allons faire une petite expérience. Imaginons quatre personnes, placées les unes à côté des autres, la personne la plus à gauche tenant un seau d'eau. Maintenant, nous allons introduire « une règle du jeu » définissant le comportement de ces personnes :

- Si mon voisin de gauche a un seau d'eau, alors un seau d'eau apparaît « par magie » dans mes mains. L'expression « par magie » est importante, mais nous y reviendrons plus tard.
- Et si mon voisin de gauche n'a pas de seau d'eau, alors je me retrouve sans seau d'eau dans les mains.

De plus, comme la personne la plus à gauche ne possède pas de voisin, nous allons considérer qu'elle en possède un fictif ne tenant pas de seau d'eau. Ainsi, nous pouvons lui appliquer les règles sans problème.

Nous venons ici de définir un ensemble de personnes ainsi qu'une règle très simple qui va être exécutée par chaque personne à chaque tour. Il est important de remarquer que chaque personne n'a aucune connaissance globale sur le groupe de personnes, mais uniquement sur son voisin de gauche. Autre point important : la règle s'applique à toutes les personnes « en même temps » (cela sera expliqué plus en détail dans l'exemple ci-dessous).

Maintenant, examinons le comportement du groupe, pour cela nous allons numéroter les personnes de gauche à droite (la personne la plus à gauche se voit attribuer le numéro 1 et la personne la plus à droite le numéro 4) :

- Au départ : seule la personne 1 tient un seau, les autres ne tiennent aucun seau.
- Au tour 1 : la personne 1, ayant un voisin gauche imaginaire ne tenant pas de seau d'eau, applique la règle et voit son seau d'eau disparaître. Nous rappelons que la règle s'applique à toutes les personnes « en même temps », cela signifie que pour la personne 2, nous considérons que la personne 1 tient encore son seau d'eau. Le voisin de gauche de la personne 2 tenant donc un seau, la personne 2 voit un seau apparaître dans ses mains. Pour les autres personnes, leur voisin ne possédant pas de seau au tour précédent, toutes ses personnes restent sans seau d'eau.
- Au tour 2, seul la personne 3 possède un seau d'eau.
- Au tour 3, seul la personne 4 possède un seau d'eau.

¹ Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications : <http://www.loria.fr>

² *MAchines Intelligentes Autonomes* : <http://www.loria.fr/equipes/maia/>

- Aux tours suivants : aucune personne n'a de seau d'eau.

Finalement, nous pouvons remarquer que le comportement global de cet ensemble de personnes simule un groupe de personnes se passant un seau d'eau de gauche à droite.

Nous venons, par un exemple, d'introduire la notion d'**automate cellulaire**. Il s'agit d'un ensemble d'individus, appelées **cellules**, dont le comportement est régi par une règle **locale** appelée : **règle (ou fonction) de transition**. Cette règle est dite locale parce qu'elle ne tient pas compte de l'état de l'ensemble des cellules de l'automate cellulaire, mais uniquement de l'état des cellules du voisinage de celle que nous souhaitons mettre à jour. Une définition plus rigoureuse sera donnée ultérieurement. Dans le cas où toutes les cellules sont mises à jour en même temps, nous parlons de mise à jour **synchrone**.

Revenons sur l'expression « par magie » que nous avons utilisée précédemment. Lorsqu'une cellule change de valeur, elle ne prend pas la valeur d'un de ses voisins au sens propre. Plus concrètement, prenons, par exemple, la modélisation suivante : il est affecté la valeur 1 à une cellule s'il elle représente une personne tenant un seau d'eau et la valeur 0 sinon. Si une cellule est dans l'état 0 et que son voisin de gauche est dans l'état 1 alors, à l'**itération suivante** (au coup suivant), son état va passer à 1. Il ne s'agit ici que de modélisation : la cellule de gauche n'a rien donné, au sens propre, à la cellule de droite.

Nous souhaitons aussi faire remarquer que, chez les AC, il n'y a pas forcément « conservation de la matière ». En effet, dans l'exemple, il n'y a qu'un seul seau d'eau au cours du temps (sauf à partir de la 5^{ème} itération). Mais imaginons que la règle de transition soit celle-ci : « quel que soit l'état de mon voisin, mon nouvel état est 1 ». Cela signifierait que toute une personne, que son voisin tienne ou non un seau à la main, aurait à l'itération suivante un seau d'eau à la main. Nous observons bien que cette règle ne conserve pas le nombre de seaux existants à l'état initial.

La première chose remarquable, que nous avons observée, est que les automates cellulaires (AC) font apparaître certaines propriétés « globales », alors qu'ils sont régis par une règle de transition appliquée localement.

Une question que l'on pourrait se poser est la suivante : que se passe-t-il si, à chaque tour, nous ne mettons à jour qu'un seul individu choisi aléatoirement ? Est-ce que le comportement du groupe de personnes sera le même ? Ceci fait intervenir la notion d'**asynchronisme**, c'est-à-dire le fait de ne pas mettre à jour, à chaque tour (appelé **itération**), tous les individus (toutes les cellules de l'AC).

Cette question nous permet d'introduire le sujet qui nous a été proposé :

« Nous proposons d'explorer une large gamme d'automates cellulaires bidimensionnels. Le défi sera d'étudier leur fonctionnement en mode asynchrone, c'est-à-dire qu'une partie seulement des cellules sera mise à jour à chaque pas de temps. Des études ont montré qu'en dimension un, des phénomènes surprenants pouvaient survenir tels que des changements brutaux de comportement engendrés par des petites variations de la mise à jour. L'étude débutera avec des espaces d'automates cellulaires simples, par exemple les règles binaires et nous tenterons d'élargir cette exploration au fur et à mesure. Pour les simulations, les stagiaires utiliseront le logiciel FiatLux développé en Java. »

Il est à noter que cette question, étudiée en une dimension (1), a peu été traitée en dimension 2, offrant ainsi un grand intérêt scientifique.

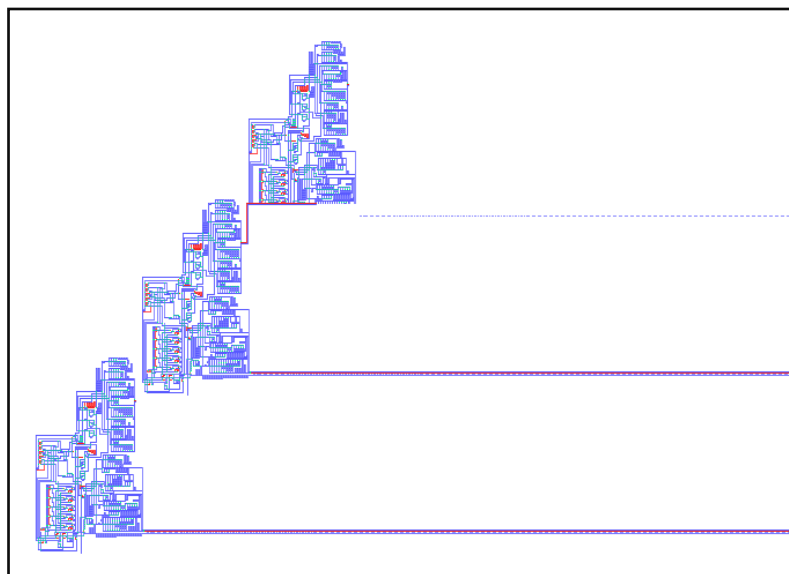
Nous allons, dans un premier temps, présenter plus en détail les AC et poser quelques définitions. Puis, après l'avoir justifié, nous allons réduire notre champ de recherche à quelques familles d'automates cellulaires. Enfin nous allons effectuer une première étude qualitative qui nous permettra d'effectuer nos premières observations. Cette étude va nous permettre d'effectuer nos premières observations dans le but de mettre en avant certaines propriétés dont nous étudierons, par la suite, le comportement face aux modes synchrone et asynchrone.

A. Historique

Au début des années 50, alors que l'industrie automobile et électronique était de plus en plus automatisée, John von Neumann eut l'idée de créer une machine capable de se reproduire elle-même (2). Cependant, l'idée restait difficile à mettre en place avec les technologies de l'époque.

Stanislaw Ulam, qui étudiait la croissance des cristaux en la modélisant sur une grille, conseilla von Neumann, qui décida alors de créer un univers abstrait avec des règles de reproductions. Ceci l'amena à créer un monde à deux dimensions, où chaque cellule de cette structure pouvait prendre 29 états.

A partir de cette structure von Neumann prouva qu'il existait un « pattern » de départ qui se reproduisait lui-même : la machine de Turing universelle.



I-1 Capture d'écran de l'implémentation de la machine universelle

Cela permettait aussi d'étendre les capacités de l'automate, il n'était plus seulement destiné à se dupliquer mais il pouvait s'adapter à un jeu d'instruction qui lui serait donné.

Durant les années 1970, John Horton Conway imagina un automate cellulaire, certainement le plus connu : le jeu de la vie. Dans cet automate, chaque cellule peut prendre la valeur 0 représentant la « mort » ou 1, la « vie ». Chacune de ces cellules met à jour son état en fonction de

ses voisins, généralement ses 8 voisins. Les mises à jour sont définies par des règles, par exemple pour passer à 1, une cellule a besoin d'avoir 3 voisins à 1 et pour survivre elle doit avoir entre 2 et 3 voisins à 1, et dans les autres cas, la cellule passe ou reste à 0.

Cet automate permet « d'ouvrir une fenêtre » sur un univers alternatif.

Cet automate étant facile à programmer, beaucoup de personnes se sont mises à l'étudier afin d'en faire ressortir un catalogue de figure stable produit par celui-ci. De plus, il a été montré que ce modèle possède une capacité de calcul illimité. Il devient donc possible de concevoir une machine de Turing Universelle dans le Jeu de la vie et d'y créer un automate autoreproducteur.

B. Automate cellulaire

Un automate cellulaire est un ensemble de cellules défini par :

- une règle de transition,
- une **topologie** (cellules prises en compte par la fonction de transition),
- un mode de mise à jour (synchrone / asynchrone),
- une taille (finie ou non)
- et l'ensemble de valeurs que peut prendre une cellule.

Une première propriété importante, chez les AC, est la symétrie : toutes les cellules sont identiques, au sens où elles sont soumises à la même règle et à la même topologie. Un phénomène remarquable est que malgré la simplicité des règles des AC (de son fonctionnement) et de sa constitution, ceux-ci peuvent représenter des phénomènes très complexes. Nous pouvons citer en exemple la circulation automobile (3), la croissance des végétaux (3), la propagation des feux de forêt (4), les coulées de lave (5)...

Autre notion importante : celle de la **discrétisation** (du temps et de l'espace). Certains problèmes, comme la plupart des phénomènes sociaux (6) sont très difficiles à modéliser. De plus, les liens entre ces phénomènes sont bien souvent **non linéaires** (6). Les AC ont la particularité de pouvoir modéliser ces phénomènes de manière simple.

Un dernier phénomène intéressant est cette remarquable présence des automates cellulaires dans le monde animal. La photo ci-dessous montre des formes (triangles) rappelant fortement certaines figures pouvant être obtenues avec des AC, comme par exemple la règle sommative n°2 sur un AC à une dimension (les règles sommatives seront décrites ultérieurement)



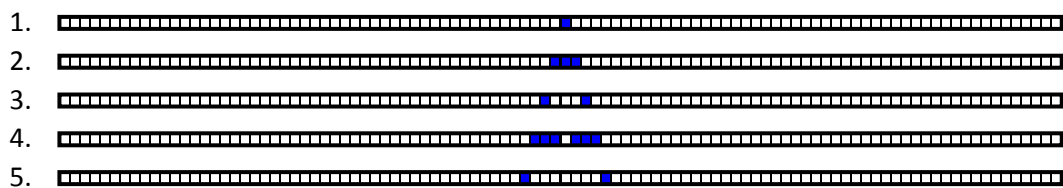
Conus textile présentant sur sa coquille un motif similaire à certains automates cellulaires

1. Importance de la représentation

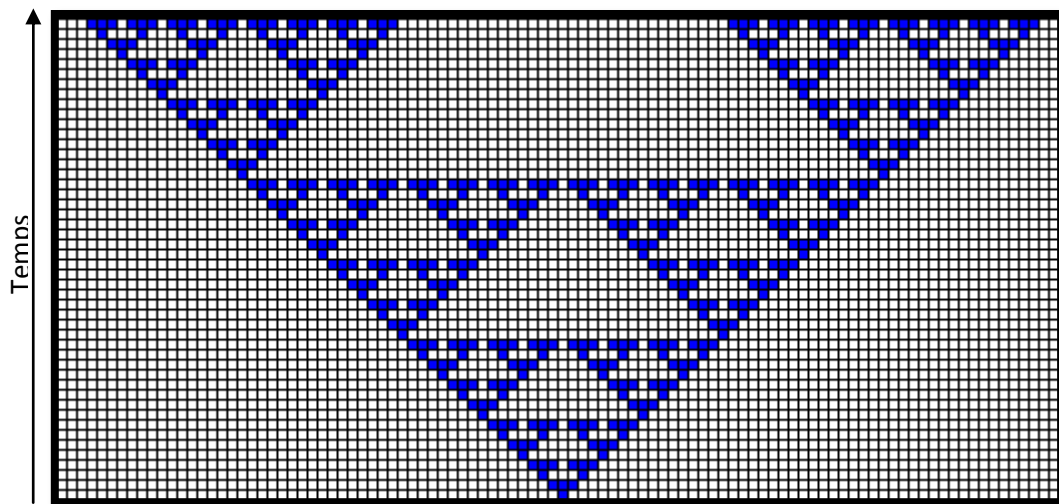
Certains automates font apparaître des propriétés « graphiques » dans certaines conditions. Examinons un cas particulier : un automate à une dimension dans la règle est la règle sommative suivante :

Nombre de voisins	0	1	2
Nouvelle valeur	0	1	0

Voici les cinq premières itérations obtenues avec cet automate cellulaire. Pour information, la couleur bleue correspond à la valeur 1 et la couleur blanche à la valeur 0 :



Maintenant, nous allons représenter cet automate en plaçant les images obtenues les unes au-dessus des autres. Les images les plus récentes seront situées en haut :



Ici, nous pouvons observer très clairement une propriété « graphique » qui apparaît uniquement dans une représentation bien particulière...

Ceci nous amène donc à penser qu'il pourrait en être de même pour les automates cellulaires en deux dimensions en les représentant en trois dimensions. Pour vérifier cela, nous avons comme idée de nous servir des méthodes utilisées en médecine pour les images de scanner : permettre à l'observateur de pouvoir passer d'une itération à l'autre en utilisant un « **fader** » (appelé aussi slider) lui offrant la possibilité d'avoir l'illusion d'une représentation en trois dimensions. Un fader est un bouton que l'on peut glisser de droite à gauche (ou de haut en bas) et qui, dans ce cas, ferait défiler les images des itérations de l'AC dans un sens ou dans l'autre. Cette solution aurait l'avantage d'être simple à mettre en place mais l'illusion de la troisième dimension pourrait être limitée.

Une autre méthode consiste à utiliser un moteur 3D. Cette solution aurait l'inconvénient d'être plus longue à mettre en place donc de diminuer notre temps d'expérimentation.

2. Trouver des automates insensibles à leur environnement

Notre étude va débuter par des automates toriques, car ceux-ci vont nous permettre, dans un premier temps, de ne pas avoir à choisir quelles valeurs donner aux cellules du bord.

Mais, étudiant la robustesse des automates, nous aimerions aussi découvrir des automates dont les bords n'influencent pas le comportement. En effet, certains automates ont la particularité de représenter certains phénomènes physiques / biologiques. Or, ces phénomènes ne se produisent pas en milieu torique. De plus, bien souvent l'environnement dans lequel est placé le système étudié n'est pas figé. Pour cela, nous avons comme autre objectif d'étudier des automates cellulaires dont les valeurs des bords changent aléatoirement à chaque itération. Si nous trouvons un groupe d'automates gardant certaines propriétés dans ces conditions et aussi dans des conditions de mise à jour asynchrone, nous aurons mis en avant des automates robustes n'étant ni dépendant de leur mode de mise à jour ni de l'environnement dans lequel ils sont placés.

Malheureusement, cette piste n'a pas pu être explorée pour des raisons de temps...

C. Quelques notions

Ce rapport étudiant une partie des automates cellulaires, il est important de définir tous les points permettant de décrire un automate cellulaire.

- **Fonction de transition** : désigne la fonction (les règles) permettant de mettre à jour l'automate à chaque itération. Cette fonction prend comme argument l'état du voisinage de la cellule à mettre à jour et retourne le nouvel état de la cellule.
- **Configuration** : une configuration désigne l'état dans lequel se trouve chaque cellule à un instant donné.
- **Torique / à bords** : nous allons, ici, considérer des automates cellulaires à une dimension.

- **Torique** :

A							B
---	--	--	--	--	--	--	---

Ici les cellules A et B n'ayant qu'un seul voisin, nous considérons que B est le voisin gauche de A et que A est le voisin droit de B.

- **A bord** :

A'	A					B	B'
----	---	--	--	--	--	---	----

Ici, nous avons rajouté à la grille deux bords (A' et B') afin que A et B aient deux voisins. Les cellules A' et B' ne sont pas modifiées par la fonction de transition à chaque itération.

- **Point fixe** : si lorsqu'un automate a atteint une certaine configuration et si quelque soit le nombre d'itérations que l'on applique, l'automate reste dans la même configuration, alors cette configuration est un point fixe.
- **Synchrone / asynchrone** : synchrone signifie que chaque cellule de l'automate cellulaire est mise à jour à chaque itération. Par opposition, asynchrone signifie le contraire. Il existe différents types d'asynchronisme :
 - **α -asynchronisme** : nous associons à l'automate une probabilité α . A chaque itération, nous mettons à jour chaque cellule avec cette probabilité.
 - **Asynchronisme total** : à chaque itération une seule cellule, choisie aléatoirement, est mise à jour. Il existe deux types d'asynchronisme total :
 - **A mémoire** : si l'automate possède n cellules, alors nous gardons en mémoire les cellules mise à jour de sorte que durant toutes les n itérations, chaque cellule n'est été mise à jour qu'une seule fois.
 - **Sans mémoire** : ici, à chaque itération, nous choisissons aléatoirement une cellule à mettre à jour, peu importe les mises à jour précédentes.
- **Densité** : dans le cas, par exemple, d'un automate cellulaire où les états de chaque cellule sont 0 ou 1, la densité de « 1 » est le nombre de cellules ayant la valeur 1 divisé par le nombre total de cellules.
- **Robuste** : robuste signifie que l'automate garde ses propriétés quel que soit le type de synchronisme / asynchronisme choisi.

- **Structures stables** : un ensemble de cellules qui n'évolue plus.
- **Structures périodiques** : un ensemble de cellules qui se transforme de manière cyclique, c'est-à-dire qui prend plusieurs formes avant de retrouver sa forme initiale.
- **Jardin d'Eden** : une configuration qui n'est successeur d'aucune autre configuration.
- **Seuil** : valeur de α pour laquelle un changement qualitatif brutal apparaît.

II. Les automates cellulaires bidimensionnels asynchrones : premiers pas

A. Choix des règles à étudier

Avant de commencer l'étude de la robustesse des automates cellulaires bidimensionnels asynchrones, nous avons commencé par calculer, dans le cas général, le nombre de règles existantes, afin de pouvoir estimer l'étendue du travail à réaliser.

Soit q le nombre d'états que peut prendre une cellule. Soit v le nombre de voisins utilisés par la fonction de transition.

Etudions un exemple, où $q = 2$ et $v = 3$:

Etat du voisinage	000	001	010	011	100	101	110	111
Nouvelle valeur de la cellule	0	1	0	0	1	0	0	0

Déterminons le nombre de fonctions de transition possibles pour $q = 2$ et $v = 3$. Nous devons d'abord calculer le nombre de colonnes n qui composent le tableau :

$$n = 2^3$$

Pour finir, déterminons le nombre de tableaux (de fonction de transition) N que l'on peut créer :

$$N = 2^n = 2^{2^3}$$

Le même raisonnement se généralise ainsi :

$$n = q^v$$

$$\Rightarrow N = q^n = q^{q^v}$$

Concrètement, nous étudions des automates cellulaires à deux dimensions qui ont un voisinage de neuf cellules (les huit cellules adjacentes ainsi que la cellule centrale) au plus et dont chaque cellule ne prendra qu'une valeur parmi deux. Calculons le nombre d'automates cellulaires à étudier :

$$N = 2^{2^9} = 2^{512} \sim 10^{150}$$

Nous pouvons donc conclure que le nombre de règles à étudier est gigantesque. Nous nous limiterons donc à l'étude des règles du type **jeu de la vie** ainsi que des règles dites **sommatives**.

B. L'outil de mesure : Fiatlux

L'étape suivante va consister à effectuer une étude qualitative des règles de transition choisies sur certaines topologies.

Que ce soit pour effectuer cette étude qualitative ou pour l'étude quantitative à venir, nous avons besoin d'un outil permettant de réaliser les simulations ainsi que les mesures. Pour ce faire, nous avons choisi le logiciel FiatLux (7).

Ce logiciel a la particularité d'être libre et gratuit. De plus, de par sa qualité, il est possible d'y rajouter aisément des nouvelles fonctionnalités (nouvelles topologie, nouvelles règles), ainsi que d'y créer des protocoles d'expérimentations. Ce que nous ferons par la suite afin d'effectuer l'étude quantitative.

L'outil FiatLux permet dans un premier temps de définir le modèle de l'automate. FiatLux possède différents modèles d'automate prédéfinis, toutefois, dans notre cas nous nous concentrerons sur les modèles des règles sommatives et du jeu de la vie. On peut aussi définir la topologie que l'on souhaite étudier. FiatLux met également à notre disposition d'autres paramètres comme la taille de la grille, l'initialisation de la grille ou encore le choix des conditions aux bords de la grille (torique ou avec bord). Et il existe une option « plot » qui permet d'afficher différentes statistiques pendant la simulation.

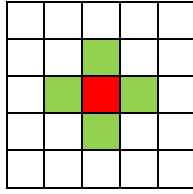
Lors de la simulation, on peut également changer l'initialisation de la grille et le taux d'asynchronisme que l'on souhaite appliquer au déroulement de l'automate.

Cet outil est donc complet et met à notre disposition toutes les fonctionnalités dont nous aurons besoin pour les études de la robustesse des automates cellulaires asynchrones.

C. Topologie

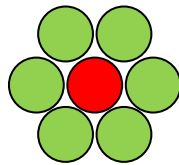
L'étude du jeu de la vie et des règles sommatives va s'effectuer sur quatre topologies. Le choix de ces topologies nous a été imposé.

- **Voisinage NESW (North East South West) pour les règles sommatives:** dans ce cas, le voisinage comprend les quatre cellules adjacentes à la cellule à considérer. Ci-dessous, la cellule rouge correspond à la cellule à mettre à jour et les cellules vertes correspondent aux cellules dont la valeur est utilisée par cette règle.



II-1 Topologie NSEW

- **Voisinage vonNeumann5 pour les règles sommatives** : le principe est identique au voisinage précédent, à l'exception que nous considérons en plus la valeur de la cellule à mettre à jour (en rouge) pour le calcul de sa nouvelle valeur. Cette topologie sera étudiée uniquement dans les règles sommatives.
- **Les 8 voisins** : il s'agit toujours du même principe. Ici, les huit cellules adjacentes seront prises en compte par la règle de transition. Cette topologie sera étudiée uniquement dans le jeu de la vie.
- **Voisinage hexagonal** : chaque cellule possède, dans cette topologie, six voisins. La règle de transition tient compte des états de ces six cellules voisines...



II-2 Topologie hexagonale

D. Le jeu de la vie

1. Présentation

Il s'agit d'un automate cellulaire à deux dimensions, où chaque état conduit mécaniquement à l'état suivant à partir de règles définissant les conditions de « vie ou de mort » d'une cellule par rapport à ses voisins. Les règles sont les suivantes :

- Pour rester en vie une cellule a besoin d'avoir entre 2 et 3 voisins vivants
- Pour naître, d'avoir au moins 3 voisins vivants
- Dans les autres cas, la cellule restera morte ou mourra.

L'observation de cet AC a permis de montrer la création de différentes structures. Les principales sont :

- **Les vaisseaux** : une structure qui est capable de produire une copie d'elle-même après plusieurs cycles et à un endroit différent de la grille.
- **Les canons** : une structure capable de créer des vaisseaux après un certain nombre de cycles.

Nous allons donc étudier le comportement du jeu de la vie en introduisant de l'asynchronisme dans les mises à jour des cellules, nous appellerons **alpha** le taux d'asynchronisme, et nous

modifions les règles de « vie ou de mort » des cellules. L'intérêt de modifier les règles est de détecter si certaines règles sont plus robustes que d'autres à l'asynchronisme.

Dans un premier temps nous considérerons uniquement la topologie des 8 voisins puis une topologie hexagonale.

Toutefois une grande partie de l'étude a été faite sur la topologie Moore 8. Et nous avons ensuite essayé de voir si les remarques faites sur cette première topologie étaient applicables sur une topologie hexagonale.

2. Premiers résultats

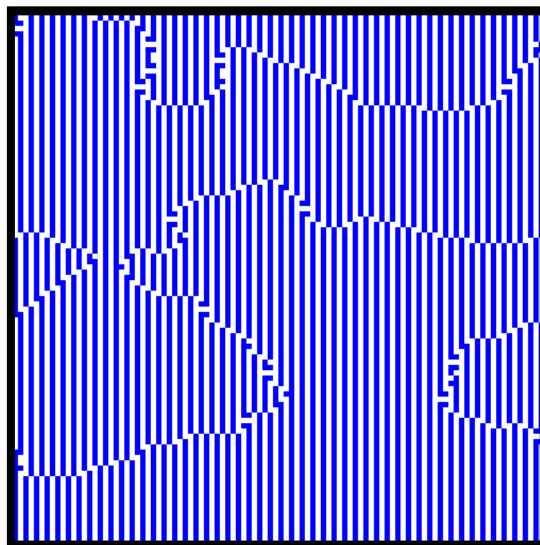
Après une première étude du jeu de la vie en mode asynchrone avec une topologie de type 8 voisins, nous avons constaté plusieurs choses :

- Dans le cas où l'automate, en mode asynchrone, n'a pas le même comportement qu'en mode synchrone, nous nous sommes aperçus qu'il existait un « seuil ». C'est-à-dire qu'à partir d'un α donné, l'automate aura le même comportement pour tout α inférieur à ce seuil. Toutefois, cet α varie en fonction des paramètres de l'automate. De même on constate que dans ce cas, lorsqu'on diminue α , on converge de plus en plus rapidement, et à partir d'un nouveau seuil, cette convergence ralentit de nouveau.
- De plus dans certain cas, l'asynchronisme introduit une certaine forme « d'organisation », c'est-à-dire que lorsque l'on est synchrone, l'automate donne des formes discontinues et en introduisant de l'asynchronisme on va obtenir des figures plutôt géométriques.

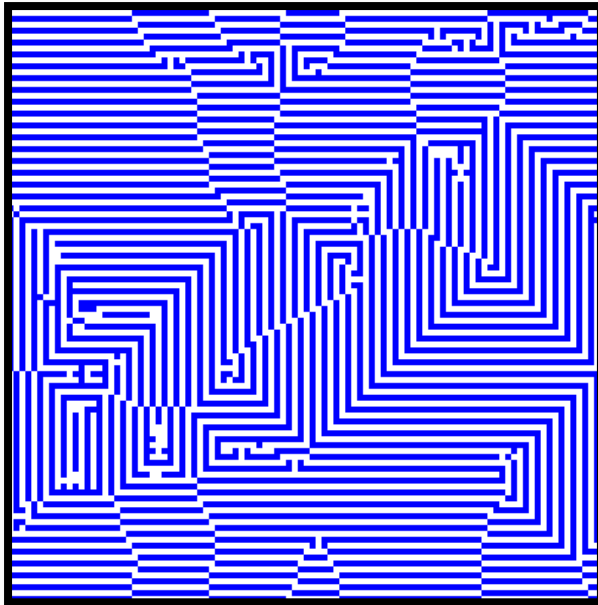
a) Topologie Moore 8

Les observations suivantes ont été faites avec une initialisation de type Bernoulli.

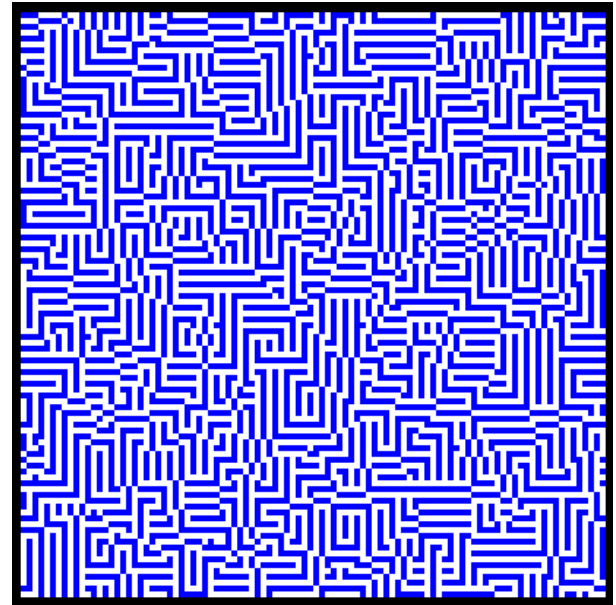
- La figure suivante est l'une des figures qui revient le plus souvent, sous différentes formes, plus ou moins bien « formée » en fonction des paramètres et du taux d'asynchronisme :



II-3 Jeu de la vie paramétré (0-3 2-3) $\alpha=50$

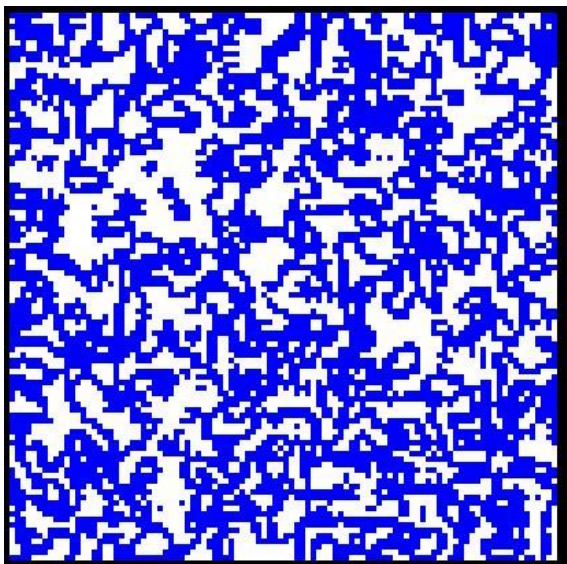


II-5 Jeu de la vie paramétré (1-3 2-3) $\alpha=30$

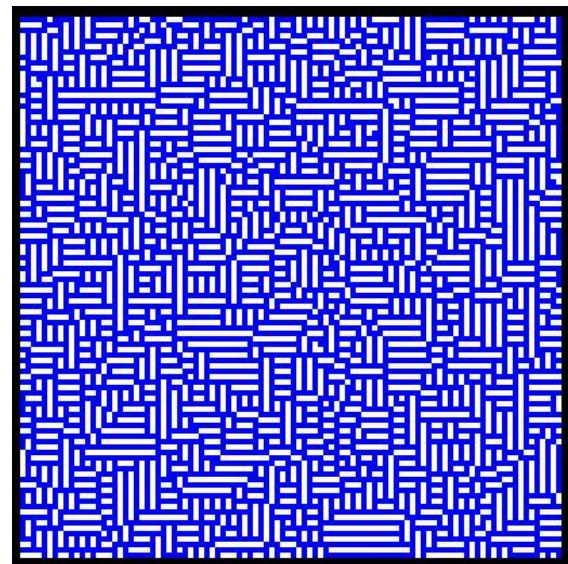


II-4 Jeu de la vie paramétré (1-2 2-3) $\alpha=20$

Les deux figures suivantes vont permettre d'illustrer « l'organisation » des cellules introduites par l'asynchronisme. Sur la figure de gauche, on voit l'un des états obtenus en synchrone et sur celle de droite le point fixe obtenu avec un α de 50%. Si on observe l'automate lorsque l'on fait varier α entre 100 et 50, on constate que l'on voit apparaître « petit à petit » le résultat obtenu avec un α de 50%.



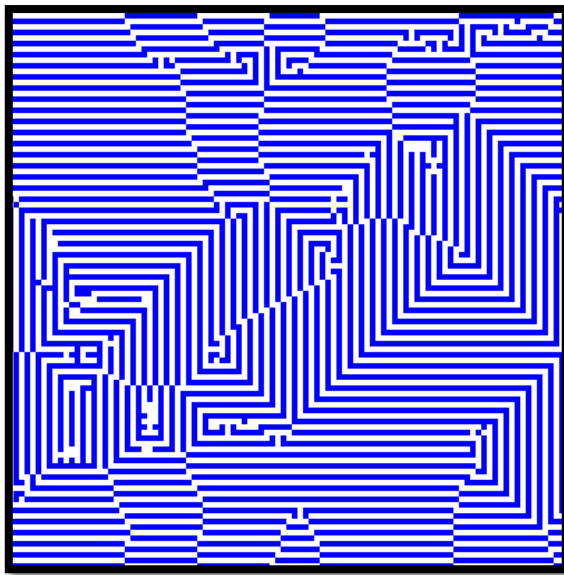
II-7 Jeu de la vie paramétré (2-5 2-5) $\alpha=100$



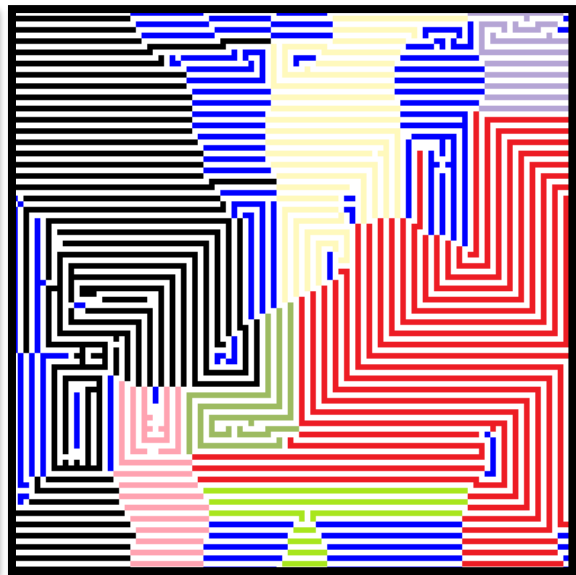
II-6 Jeu de la vie paramétré (2-5 2-5) $\alpha=50$

Afin de pouvoir mieux observer ces figures, nous en avons « coloriées » une. Le résultat est assez surprenant. Lorsque l'on regarde la figure II-8, on a l'impression qu'il y a des « cassures », mais

en réalité si l'on apporte de la couleur à l'image, on s'aperçoit qu'il y a une continuité dans ces cassures.



II-8 Jeu de la vie paramétré (1-3 2-3) $\alpha=30$



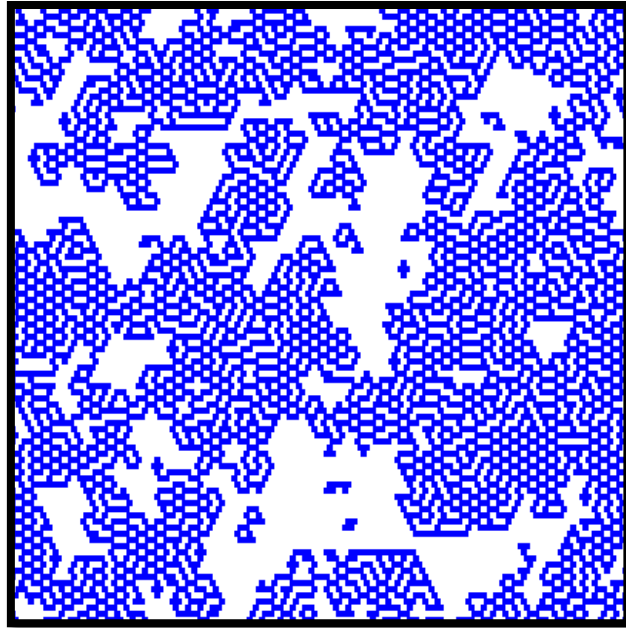
Même image que précédemment mais coloriée

b) *Topologie hexagonale*

Après observation du jeu de la vie paramétré dans le cas d'une topologie hexagonale, nous nous sommes aperçus que malgré des différences, que nous verrons par la suite, nous pouvons faire la même remarque générale que pour la topologie des 8 voisins. C'est-à-dire que l'on constate l'existence d'un « seuil », au niveau de l'asynchronisme.

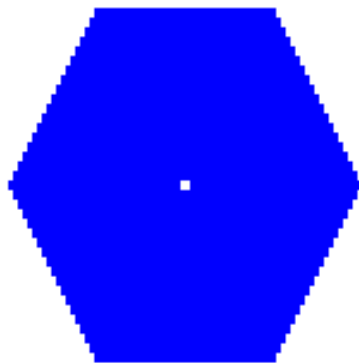
Toutefois, dans cette étude, nous initialiserons l'automate avec un seul point central. En effet, l'un des buts étant d'essayer de recréer la construction d'un nid d'abeilles, il était préférable de partir d'une initialisation qui est la plus « naturel »

On peut cependant constater que, comme le montre la figure suivante, à l'aide d'une initialisation de Bernoulli et des paramètres classiques du jeu de la vie, on peut obtenir des formes alvéolées. On constate aussi que la densité des alvéoles varie en fonction du taux d'asynchronisme.

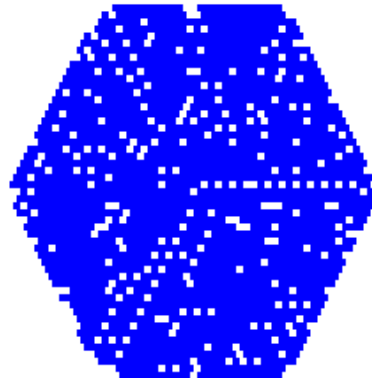


Jeu de la vie paramétrée (3-3 2-3) alpha=50

Dans le cas de l'étude avec une initialisation à un point, on ne peut pas appliquer tous les paramètres possibles du jeu de la vie. Puisqu'il n'y a qu'un point d'initialisation, le paramètre minimum de naissance d'une cellule doit obligatoirement être à un, sinon l'automate ne pourra pas évoluer. Toujours dans l'idée de modéliser la construction d'un nid d'abeille, la survie d'une cellule se fait dans tout les cas. Cependant, pour pouvoir observer quelque chose, nous sommes obligés de supposer qu'une cellule n'a besoin que d'un et un seul voisin pour naître. Si elle peut en avoir plus et avec des paramètres de survie qui empêche la « mort » de la cellule, on observe la progression suivante :

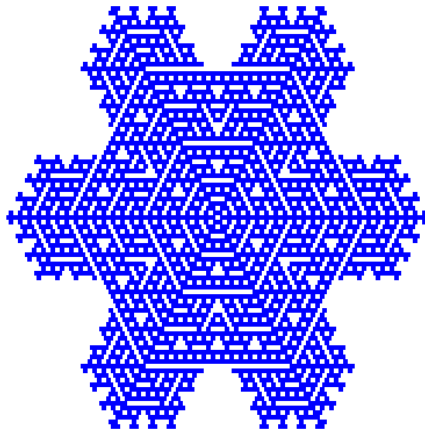


II-9 Jeu de la vie paramétré (1-2 1-8) alpha=100



II-10 Jeu de la vie paramétré (1-2 1-8) alpha=90

Bien évidemment, si on introduit de l'asynchronisme avec ces paramètres, on a une figure beaucoup moins linéaire. A noter que les formes obtenues sont des progressions à partir du point de départ et que la figure continue à se développer, « à grossir ».



II-11 Jeu de la vie paramétré (1-1 1-8)
alpha=100

Plus on diminue alpha, plus la « linéarité » de la progression disparaît.

Observons maintenant l'automate du jeu de la vie avec pour paramètres 1-1 1-8.

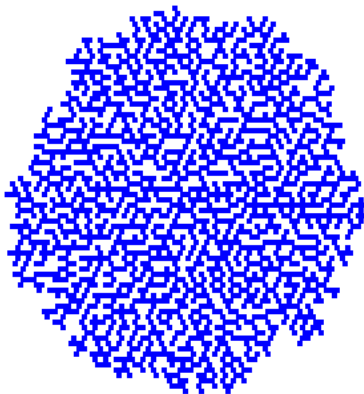
Dans le cas du synchronisme total, on a une figure parfaitement linéaire et symétrique, comme montré sur la figure II-11.

Et là encore, plus on va introduire de l'asynchronisme, plus cette symétrie va disparaître. Des défauts vont apparaître en fonction du taux d'asynchronisme. Il en est de même pour la progression, qui va petit à petit, perdre de sa

linéarité. A noter qu'une toute petite dose d'asynchronisme permet de déstabiliser l'évolution de l'automate. La figure suivante possède la même initialisation que la précédente, mais avec 99% d'asynchronisme. On peut déjà constater les effets de l'asynchronisme.



Figure II-12 Jeu de la vie paramétré (1-1 1-8) alpha=99



II-13 Jeu de la vie paramétré (1-1 1-8)
alpha=50

Si maintenant on regarde le même automate, mais avec 50% d'asynchronisme (figure II-13). On s'aperçoit qu'il n'y a plus aucune continuité dans la progression de l'automate.

On constate néanmoins que même si l'on continue de diminuer le taux d'asynchronisme, la progression va être de plus en plus lente, mais restera identique à celle présentée ci-dessus.

c) *Comparaison des deux topologies*

Le premier constat que nous pouvons faire est que, peu importe les paramètres, le jeu de la vie dans le cas d'une topologie hexagonale en asynchrone n'a pas le même comportement que dans le cas d'une topologie de 8 voisins en asynchrone également. Alors que les comportements sont généralement identiques lorsque l'automate est synchrone. C'est-à-dire que lorsqu'il converge vers un point fixe avec une topologie 8 voisins, il va également converger avec une topologie hexagonale.

La seconde remarque est que pour des mêmes paramètres et un même taux d'asynchronisme, la topologie hexagonale se stabilise plus souvent que la topologie des 8 voisins.

E. **Les règles sommatives**

1. **Présentation**

Les règles sommatives, dans le cas où les états des cellules ne peuvent avoir que deux valeurs (0 ou 1), consistent à déterminer la nouvelle valeur d'une cellule en fonction du nombre de cellules voisines ayant la valeur 1.

Il est possible d'observer une grande variété de voisinages concernant les règles sommatives, mais nous allons uniquement nous concentrer sur les topologies NESW, vonNeumann-5 et hexagonale.

Pour finir, voici un exemple de règle sommative vonNeumann5:

Nombre de voisins	0	1	2	3	4	5
Nouvelle valeur	1	0	1	0	0	0

Afin de simplifier la notation de la règle, nous allons considérer la deuxième ligne du tableau. Nous obtenons ainsi un nombre binaire (ici : 000101, en lisant de nombre de droite à gauche). En le convertissant en décimal, nous obtenons une autre façon de nommer cette règle : il s'agit de la règle 5.

Concernant cette règle, la nouvelle valeur de la cellule sera 1 si elle possède zéro ou deux voisins ayant la valeur 1. Dans le cas contraire, sa nouvelle valeur sera 0.

2. **Premiers résultats**

Les premières observations ont été réalisées sur une grille torique de 400 x 400 cellules.

Nous avons remarqué que, d'une manière générale, lorsque α (la probabilité de mise à jour d'une cellule) était compris entre 0.8 et 1, l'impact était très peu important sur le comportement de l'automate cellulaire, en comparaison au mode synchrone. Nous avons donc, pour chaque règle, choisi d'observer l'automate cellulaire :

- En mode synchrone
- En mode asynchrone, avec :
 - o $\alpha = 0.8$
 - o $\alpha = 0.7$

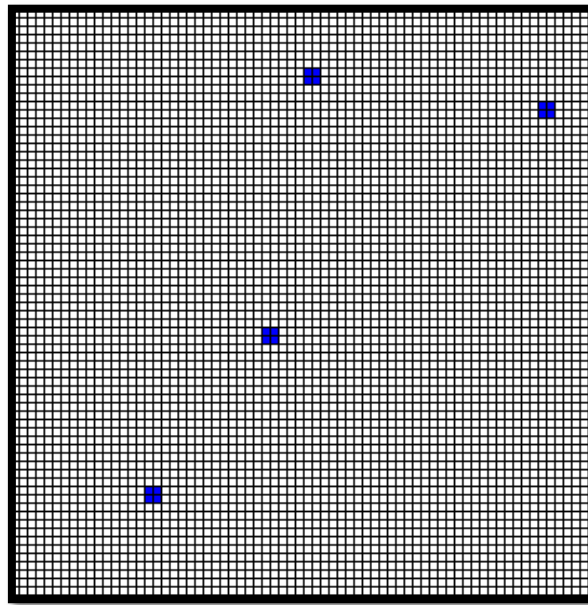
- $\alpha = 0.1$

a) *Topologie : VonNeuman-5*

(1) Configuration initiale : Bernoulli (50%)

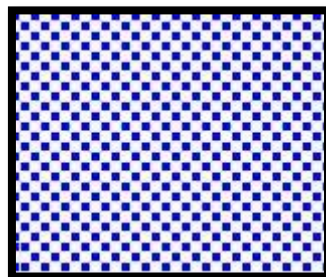
Nous avons observé ces différents phénomènes :

- **Disparition** : ce phénomène est caractérisé par l'arrivée sur un point fixe où la majorité des cellules ont la même valeur. Souvent, il peut rester quelques « résidus », comme le montre cet exemple (règle 8)



II-14 "Disparition avec résidu"

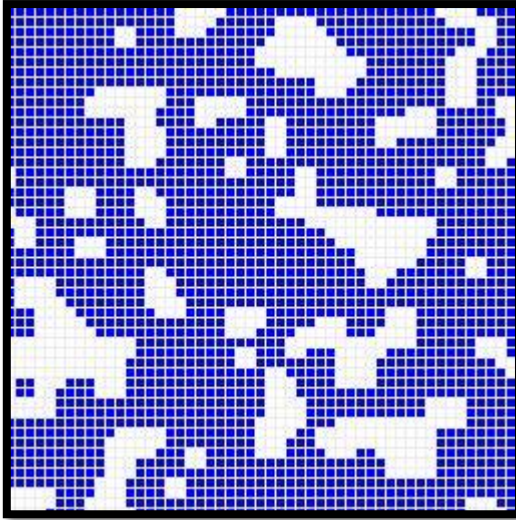
- **Motif damier** : ce motif apparaît souvent, sur certains automates cellulaires. Ce fragment de configuration provient de l'automate cellulaire 14 ($\alpha = 0.7$)



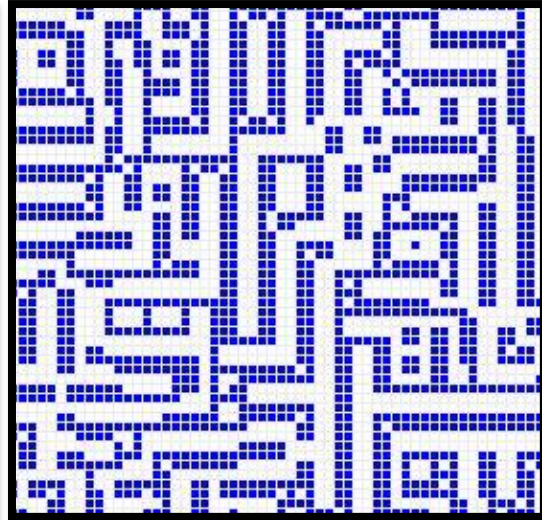
II-15 Motif apparaissant régulièrement (damier)

- **Clignotement** : ce phénomène apparaît sous différentes formes. Il s'agit de zones de l'automate cellulaire dont toutes les cellules, de la zone en question, alternent leur valeur de manière synchrone. Un exemple : automate n° 31 ($\alpha = 1$)

- **Surface lunaire** : cet exemple provient de l'automate n° 7 ($\alpha = 1$)

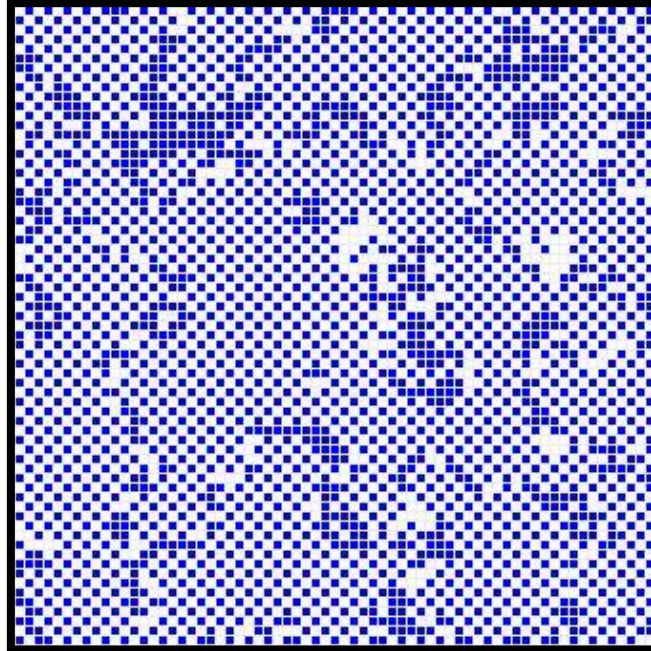


II-17 "Surface lunaire"



II-16 Labyrinthe

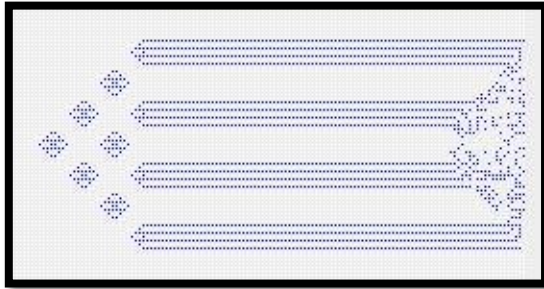
- **Labyrinthe** : l'automate cellulaire n° 6 ($\alpha = 1$) fait apparaître cette structure en labyrinthe.
- **Les veines** : On peut remarquer la présence du « motif damier ». Ce type de phénomène semble tendre vers un point fixe.



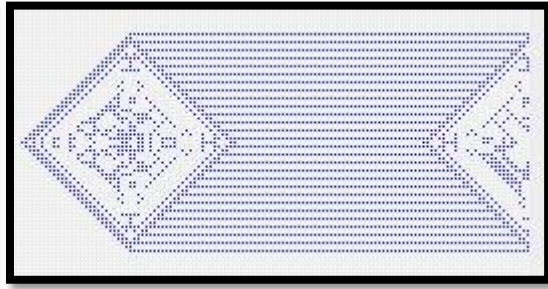
II-18 Veines

(2) Configuration « One Zone » (ZoneLength = 200)

L'un des phénomènes les plus étonnants est l'apparition d'une figure géométrique, sous différentes variantes. En voici 2 :



II-20 Figure géométrique OneZone - variante 1 (règle n° 2, $\alpha = 1$)



II-19 Figure géométrique OneZone - variante 2 (règle n° 6, $\alpha = 1$)

b) *NESW-4*

Nous retrouvons certains points communs avec la topologie « VonNeumann-5 ». Par exemple, le « damier » dans les règles 1 ou 3 (par exemple) pour des mises à jour asynchrone.

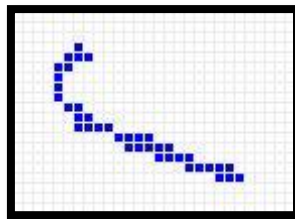
De nouvelles propriétés ont aussi été observées :

- L'automate cellulaire n°4 (en mode synchrone) fait apparaître des éléments (sous-ensemble de cellules) ayant un cycle de taille 2. Les deux configurations de ces cellules sont les suivantes :



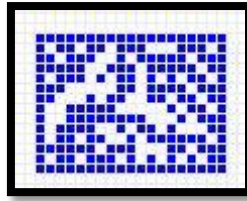
II-21 Cycle de taille 2 (règle n° 4, $\alpha = 1$)

- Autre phénomène intéressant : l'apparition d'asynchronisme, toujours concernant l'AC n°4, a pour conséquence la disparition de ces éléments cycliques.
- Un phénomène encore plus étonnant concerne l'AC n°12. La propriété que nous allons présenter est robuste à l'asynchronisme. Nous avons remarqué (mais non démontré) que quelle que soit la configuration de départ, par exemple celle-ci :



II-22 Configuration de départ (règle n° 12, $\alpha = 0.5$)

L'AC fait apparaître une « enveloppe convexe ayant comme contrainte d'être rectangulaire ».
La figure suivante fait apparaître le résultat :



II-23 Configuration après 200 itérations (règle n° 12, $\alpha = 0.5$)

c) *Topologie hexagonale*

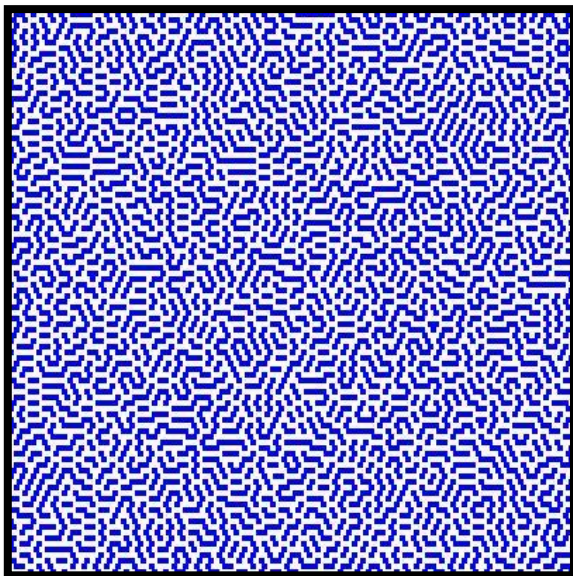
Parmi tous les phénomènes observés, quatre se démarquent des autres :

- Un motif apparaît quelque fois. Celui-ci fait penser au « **damier** » apparaissant dans les deux topologies précédentes. Les cellules étant disposées de manière hexagonale, il est bien entendu impossible de retrouver un damier « parfait ». Mais le motif observé (ci-dessous) possède certaines similitudes :

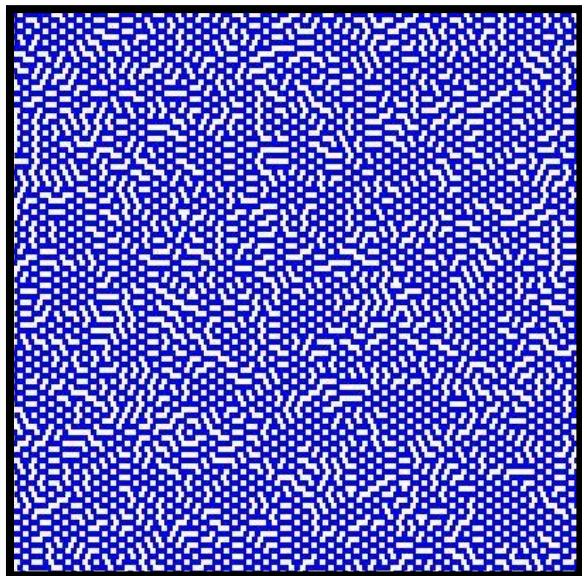


II-24 AC règle sommative Configuration de départ (règle n° 3, $\alpha = 0.5$)

- **Labyrinthe** : nous retrouvons ce phénomène présenté lors de l'observation de la topologie vonNeumann-5. La particularité de la topologie hexagonale a pour conséquence la disparition des angles droits que l'on pouvait observer précédemment.



II-26 Labyrinthe (règle n° 6, $\alpha = 0.5$)



II-25 Mosaique (règle n° 12, $\alpha = 0.5$)

- **Mosaïque** : point fixe observé pour certaines règles. Nous pouvons apercevoir à certains endroit le « damier ».
- **Etoiles** : certaines règles font apparaître ces étoiles :



II-27 Etoile (règle n° 31, $\alpha = 1$)

F. Réflexions sur les AC

M Fatès nous a amené à réfléchir sur des généralités concernant les AC. Les trois grands points de réflexions ont été : le comportement des AC en mode synchrone, puis en mode asynchrone et enfin la représentation dans l'espace des configurations ainsi que de leurs transitions des AC synchrones.

Tous les résultats et démonstrations ont été placés en annexe et nous invitons les lecteurs curieux à s'y référer.

III. Automatisation des observations

A. Préliminaires

1. Choix des paramètres

Dans cette partie, nous allons passer à une étude quantitative des règles observées précédemment.

Nous devons, pour cela, effectuer de nombreux choix concernant les paramètres. En effet, pour une règle et une topologie données, nous allons faire varier le taux d'asynchronisme afin d'étudier son effet sur le comportement de l'AC. Mais nous allons devoir fixer les autres paramètres tels que :

- La taille de l'automate cellulaire,
- Le nombre d'itérations avant les premières mesures (transient time),
- Le nombre d'itérations durant lesquelles vont être effectuées les mesures (experiment time),
- Le nombre de fois que vont être effectuées chaque expérience en vue d'effectuer une moyenne,
- La configuration initiale,
- Choix des bords.

Il est important de bien fixer ces paramètres, mais il est impossible de choisir des paramètres « parfaits », car nous possédons peu de connaissance sur ces AC (le but de cette étude étant justement d'essayer d'en apporter).

Or, nous avons déjà effectué une étude qualitative qui nous a apporté l'information suivante : en règle générale, lorsque les AC font apparaître des propriétés géométriques, celles-ci

apparaissent avant 1000 itérations. Nous avons donc choisi de fixer le transient time à 1000 itérations.

Cependant cette information n'a pas été démontrée, mais est seulement le fruit de nos premières observations. A ce stade, nous devons faire un choix et nous tentons de le faire « au mieux ».

Concernant l'experiment time : nous avons choisi de le fixer arbitrairement à 2000 itérations. Un nombre d'itérations trop petit peut entraîner une perte d'information, mais un nombre trop grand va entraîner un temps de calcul trop long.

Pour fixer le nombre de fois que nous allons effectuer chaque expérience, nous avons fait appel à notre étude qualitative : en règle générale, nous avons remarqué que les propriétés des AC observés apparaissaient aux alentours du même nombre d'itérations. Cela laisse penser que le comportement de ces AC varie peu. Afin de ne pas augmenter le temps de calculs inutilement, nous avons donc choisi de fixer le nombre de mesures à 10.

Ensuite, nous avons choisi d'utiliser une configuration initiale de Bernoulli (50%) et des bords de type toriques. L'avantage des bords toriques est que nous n'avons pas à choisir de valeur à leur affecter.

Pour terminer, le choix de la taille de l'AC va être décrit dans les rubriques suivantes. Nous nommerons cette taille L. Ainsi L=100 signifiera une taille de 100 cellules sur 100.

2. Que quantifier ?

Maintenant que nous venons de fixer tous les paramètres, il nous faut trouver une fonction nous permettant de quantifier ce que nous souhaitons mettre en avant...

Mais ici se pose une question intéressante. En effet, nous venons d'effectuer une première étude qualitative qui nous a fait remarquer deux grands phénomènes :

- Passage d'une évolution chaotique à une évolution structurée (ou inversement) et apparition de motifs communs,
- Existence d'un seuil de synchronisme autour duquel se produit un changement qualitatif.

La question qui se pose à nous est la suivante : lequel de ces phénomènes allons nous quantifier ?

Inspirés des travaux de M Fatès (1), nous avons choisi d'étudier le deuxième phénomène en utilisant la densité (nombre de cellules ayant la valeur 1 divisé par le nombre de cellules totales). Mais, comme nous avons été très impressionnés par le premier phénomène, nous avons tenté de trouver une autre fonction permettant de détecter (au mieux) ces motifs.

La particularité de la plupart de ces motifs est que ce sont des points fixes de l'AC (pour les règles et le taux d'asynchronisme concernés). Ceci nous a donné l'idée d'introduire la notion **d'activité**, c'est-à-dire le nombre de cellule dont l'état a changé, durant l'itération, divisé par le

nombre de cellules totales. Cette mesure va donc nous permettre de vérifier si le taux d'asynchronisme a un effet sur le nombre de cellules dont l'état change à chaque itération.

Pour terminer, l'activité et la densité n'étant pas, a priori, deux mesures dépendantes l'une de l'autre, nous avons choisi de les utiliser toutes les deux pour quantifier l'effet de l'asynchronisme sur les AC.

3. Une classification

L'un des objectifs principaux de notre travail est d'effectuer une classification des AC en fonction de leur robustesse à l'asynchronisme.

Revenons sur la notion de robustesse : un AC est robuste à l'asynchronisme s'il garde le même comportement, quelle que soit la valeur de α .

Prenons le cas de n'importe quel AC ayant au moins un état n'étant pas un point fixe. Nous nommerons $C1$ cette configuration de l'AC. En mode synchrone, l'itération suivante aboutira toujours à la même configuration $C2$ différente de la configuration $C1$ (puisque $C1$ n'est pas un point fixe). Soit E l'ensemble des cellules dont l'état change durant la transition de $C1$ à $C2$. Passons maintenant à un mode de mise à jour asynchrone. Cela signifie que les cellules ne sont pas obligatoirement toutes mises à jour au cours d'une itération. Autrement dit, il est possible qu'une cellule de E ne soit pas mise à jour en mode asynchrone. Donc la configuration suivante à $C1$ n'est pas nécessairement $C2$. Nous venons donc de mettre en évidence que si un AC possède une configuration n'étant pas un point fixe en mode synchrone, le mode asynchrone peut engendrer un changement du comportement de l'AC (au moins sur cette configuration). Donc nous pouvons dire que cet AC n'est pas robuste (quelle que soit la règle et la topologie choisie, à condition qu'il existe une configuration qui n'est pas point fixe).

En conséquence, nous pouvons dire que les AC possédant au moins une configuration n'étant pas un point fixe ne sont pas robustes à l'asynchronisme.

Au final, nous allons donc effectuer une classification des AC en fonctions de l'existence ou non d'un seuil (valeur de α pour laquelle un changement qualitatif brutal apparaît).

B. Jeu de la vie

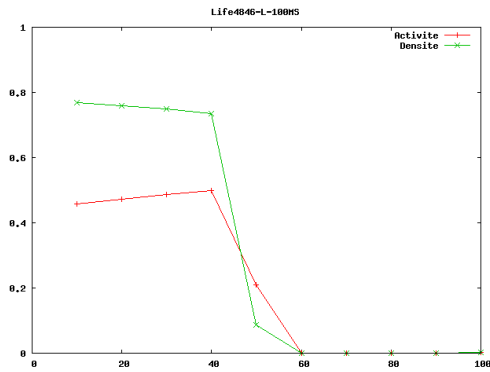
1. Choix de la taille de l'AC

Le nombre de règles du jeu de la vie étant considérable (1296 règles), nous n'avons certainement pas étudié tous les phénomènes produits par l'automate lors de l'étude qualitative. Nous avons décidé de procéder à un échantillonnage des règles et de regarder leur comportement pour une taille $L=20$, $L=40$ et $L=60$. L'échantillonnage a porté sur 10% des règles tirées au hasard. Nous avons ainsi pu constater que la taille de la grille n'avait que très peu d'impact sur la densité et l'activité de l'automate. Toutefois, certains « pic » observé sur les courbes, avec une taille basse, se retrouve également sur les automates de taille supérieur mais plus « lissé ». Mais dans le souci de perdre le moins d'information possible, nous avons fixé la taille de la grille à 100.

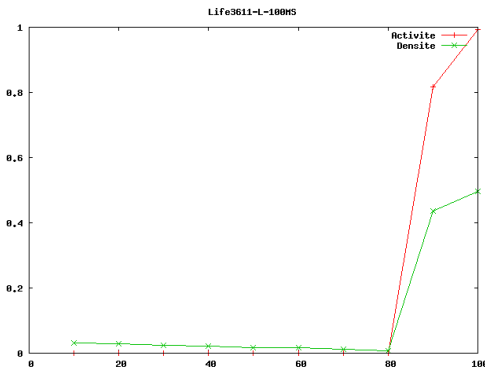
a) *Topologie Moore 8*

Après observation des différents résultats, nous nous sommes rendu compte que lors de notre étude qualitative, nous nous sommes principalement intéressés aux règles « centrales » du jeu de la vie, soit les règles ayant des valeurs entre 2-4. Alors que d'après les graphes, des choses surprenantes apparaissent pour des règles moins usuelles.

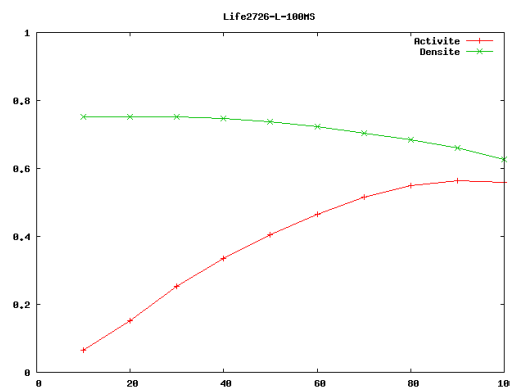
Voici quelques exemples de résultats, avec seuil



III-1 Jeu de la vie paramétré 4-8 4-6



III-2 Jeu de la vie paramétré 3-6 1-6

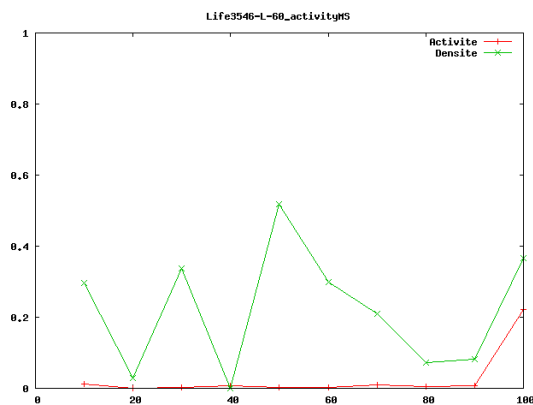


III-3 Jeu de la vie paramétré 2-7 2-6

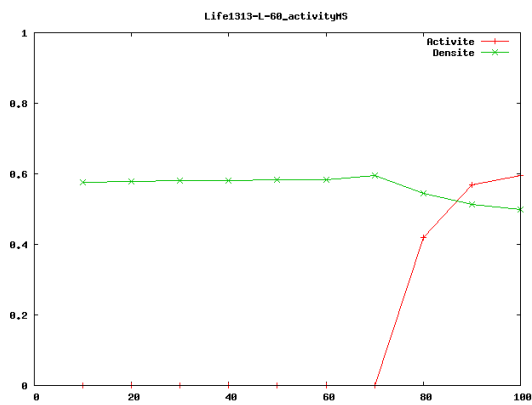
b) *Topologie hexagonale*

Dans un souci de temps de calcul, les expériences en topologie hexagonale ont été étudiées avec une taille de 60.

Voici quelques exemples d'automates :



III-4 Jeu de la vie paramétré 3-5 4-6



III-5 Jeu de la vie paramétré 1-3 1-3

On constatera cependant que le type du graphe III-4 n'a pas été trouvé en topologie Moore

8.

C. Règles sommatives

1. Choix de la taille de l'AC

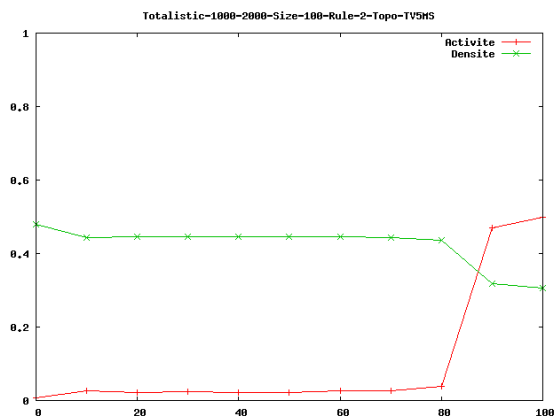
Pour déterminer le choix de la taille de l'AC sur lequel nous allons effectuer les mesures, nous avons choisi pour chaque phénomène présenté lors de l'étude qualitative, un AC représentatif (un AC possédant le phénomène comme caractéristique).

Puis nous avons observé leurs comportements pour une taille de $L=20$, puis $L=30$ et enfin $L=40$. Ayant observé que les phénomènes étaient toujours présents, $L=20$ semblait être une « bonne valeur » pour ce paramètre. En effet, une petite valeur permet de réduire de temps de calcul. Mais nous avons préféré fixer L à 100, ce qui permet de diminuer l'impact des bords sur le comportement de l'AC.

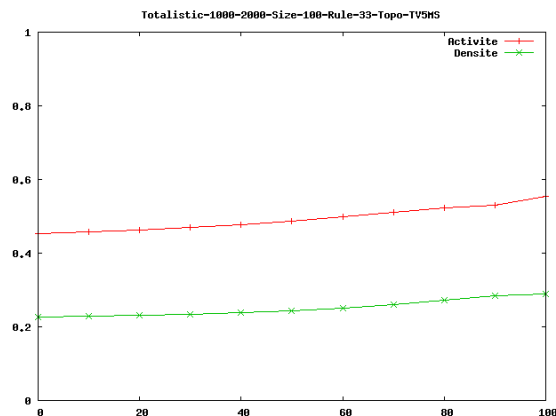
2. Quelques résultats

a) Topologie Von-Neuman5

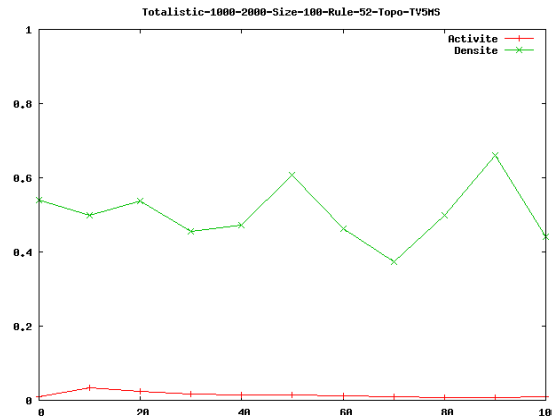
Ci-dessous, vous pourrez observer trois règles extraites de l'ensemble des règles de cette topologie :



III-7 Topologie TV5 - règle 2



III-6 Topologie TV5 - règle 33



III-8 Topologie TV5 – règle 52

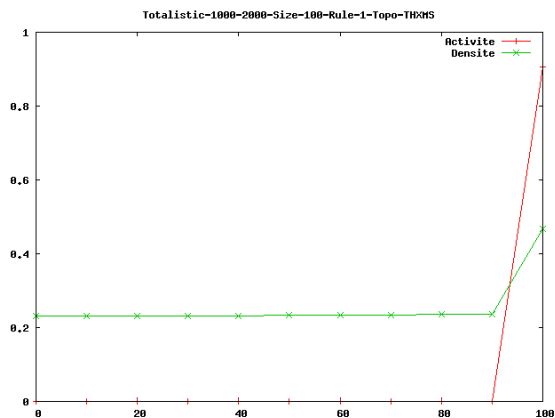
Une observation que nous avons faite est la suivante : un seuil apparaissant lors de la mesure de la densité, apparaît aussi lors de la mesure de l'activité et pour la même valeur de α (cf règle 2 – topologie TV5). La réciproque est aussi vraie.

Nous faisons remarquer que la règle 52 a un comportement particulier concernant la densité.

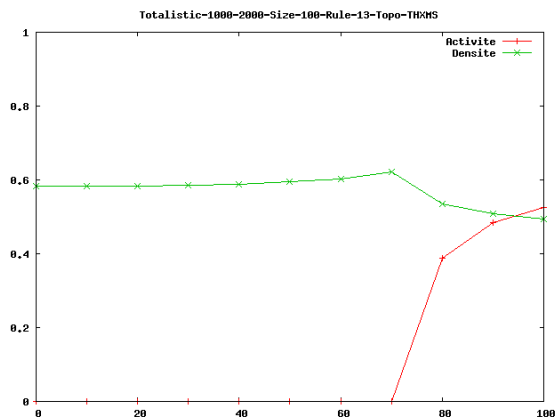
b) *Topologie NESW-4*

Nous n'avons rien observé ici de particulier qui ne l'a été lors de l'observation de la topologie Von-Neumann5.

c) *Topologie hexagonale*



III-10 Topologie THX – règle 1



III-9 Topologie THX – règle 13

La règle 1 (figure III-11) est particulière : elle ne met pas réellement en évidence un seuil, mais une « sensibilité à l'asynchronisme ». En effet, dès introduction d'une petite quantité d'asynchronisme, le système change de comportement en atteignant point fixe.

IV. Conclusion

Nous avons pour objectif d'étudier la robustesse à l'asynchronisme des automates cellulaires en deux dimensions. Après avoir réduit le champ de recherche aux règles sommatives et au jeu de la vie, nous avons effectué une première classification (robuste / non robuste) en utilisant la densité et l'activité.

Nous avons pu remarquer, qu'en règle générale, pour les règles sommatives, l'activité ne permet pas de mieux détecter les seuils (valeur de α pour laquelle un changement qualitatif brutal apparaît) par rapport à la densité. Mais, concernant le jeu de la vie, sans la mesure de l'activité, certains seuils n'auraient pas pu être observés.

L'objectif de cette matière n'était pas uniquement de nous apporter de nouvelles connaissances dans un domaine scientifique. Il était aussi de nous faire découvrir la recherche. Deux points nous ont marqués :

- Nous avons pu observer qu'une qualité nécessaire attendue était la rigueur. Par exemple, nous avons pu remarquer que les chercheurs accordent une grande importance au langage, aux mots, que nous employons. Mais de la rigueur nous a aussi été demandée dans les choix que nous avons faits. Quelques soient les choix effectués, nous avons toujours dû les justifier. Nous pouvons citer en exemple le choix de la grille de simulation des automates cellulaires pour les mesures quantitatives.
- Mais, à notre grande surprise, nous avons aussi remarqué que l'originalité était une qualité fortement appréciée. Par exemple, lorsque nous avons eût l'idée d'introduire l'activité comme outil permettant de mesurer la robustesse des AC à l'asynchronisme, l'idée n'a pas été rejetée. Bien au contraire, nous avons été encouragés dans cette direction.

Ce rapport nous a amené à effectuer des recherches bibliographiques. Nous avons remarqué que certaines publications, réalisées par des laboratoires publics, pouvaient être difficiles d'accès, ou même payantes. Ce qui, à notre avis, est regrettable, d'une part car cela limite l'accès des connaissances au « grand public », et d'autre part, cela nous empêche, en tant qu'étudiant, de nous rendre compte du travail effectué par le monde de la recherche. Etant étudiant, nous rêvons d'une encyclopédie libre et gratuite, en ligne, dans laquelle chaque article aurait été rédigé par des chercheurs et/ou enseignants, nous servant de référence solide et facilitant aussi l'accès pour le public à la connaissance.

Nous aimerions terminer ce rapport par une question que l'on s'était posée et à laquelle nous n'avons pas travaillé. Il s'agit du fait que certains automates ont un comportement apparemment chaotique en mode synchrone et s'organisent en mode asynchrone. Nous pensons que cette particularité est importante. Prenons l'exemple du corps humain : toutes les cellules qui le composent, ne sont pas synchronisées. Pourtant, une très forte organisation est bien réelle : à partir d'une simple cellule fécondée, le processus de développement abouti, par exemple, à la présence d'organes. On pourrait même parler d'attracteur, puisque, d'une manière générale, tous les individus ont les mêmes caractéristiques (même nombre de bras, de dents...). Nous avons donc l'intuition que l'étude de cette propriété peut apporter des réponses fortement intéressantes, pouvant avoir des conséquences sur différents domaines tels que la biologie ou la physique.

V. Annexe

A. Réflexion sur le comportement des automates cellulaires synchrones

1. Choix d'une méthode

En observant quelques automates cellulaires, nous avons remarqué que certains avaient un comportement apparemment chaotique. Une question c'est donc posée : est-ce que le comportement observé est réellement chaotique ou bien sont-ils cycliques ?

Deux méthodes pour répondre à cette question ont été imaginées :

- Une première qui consiste à enregistrer une série d'itérations et à vérifier la présence de cycle.
- Une deuxième consistant à répondre mathématiquement à la question.

La première méthode a été abandonnée car il est tout à fait possible qu'en partant d'une configuration C_1 , l'automate cellulaire, en passant par des configurations C_i , arrivent sur une configuration C_n , puis retombe à nouveau sur la configuration C_1 . Mais le fait d'observer un cycle sur un nombre fini d'itérations ne garantit pas que l'automate ne sortira jamais de ce cycle aux itérations suivantes.

Nous avons donc utilisé la deuxième méthode...

2. Démonstration

Soit un automate cellulaire synchrone ayant un nombre c fini de cellules, une fonction de transition déterministe dont chaque cellule ne peut avoir qu'un nombre fini d'états compris entre 1 et n . Nous pouvons donc calculer le nombre de configurations Q totales de l'automate :

$$Q = n^c$$

Maintenant, considérons que l'on effectue Q itérations : nous pouvons donc observer $Q + 1$ configurations. L'automate cellulaire ne pouvant avoir que Q configurations, il apparaît, au minimum, deux fois la même configuration.

Considérons que ces deux configurations apparaissent au temps a et au temps b . En notant C_i la configuration au temps i , nous pouvons noter C_a et C_b les deux configurations mises en avant. (Il est important de noter que $a \neq b$)

Nous allons montrer par récurrence que : $\forall j, C_{a+j} = C_{b+j}$

1. Cas de base :

Comme l'automate cellulaire est synchrone (toutes ses cellules se mettent à jour simultanément), comme la fonction de transition est déterministe et comme $C_a = C_b$ alors :

$$C_{a+1} = C_{b+1}$$

2. Hypothèse d'induction : $C_{a+i} = C_{b+i}$

Avec les mêmes arguments nous pouvons montrer que :

$$C_{a+i+1} = C_{b+i+1}$$

Nous venons donc de montrer par récurrence que :

$$\forall j, \quad C_{a+j} = C_{b+j}$$

a étant différent de b , nous venons donc de mettre en évidence un cyclique de longueur $a - b - 1$, constitué de la suite finie des configurations suivantes : C_{a+i} avec $i \in [0..b - a - 1]$

B. Réflexion sur le comportement des automates cellulaires asynchrone

1. Cycle de taille supérieur ou égale à 2

Nous allons examiner le comportement d'un AC asynchrone.

Nous allons démontrer par l'absurde que si cet AC a un cycle, il ne peut pas être supérieur ou égal à deux.

Supposons donc qu'il existe un cycle de taille i , avec $i \geq 2$. Soit C_1, C_2, \dots, C_{i+1} le cycle en question (les C_i étant les configurations de l'AC).

Nous faisons remarquer que si C_1, \dots, C_{i+1} est un cycle, une configuration quelconque de ce cycle ne peut pas être un point fixe.

Cela signifie que lorsque l'on applique la fonction de transition sur un nombre aléatoire de cellules de C_j (avec $j \in [1..i]$) nous obtenons systématiquement C_{j+1} , sinon il n'y aurait pas de cycle. De plus, C_j et C_{j+1} sont différentes, car cela signifierait qu'il y aurait un point fixe, ce qui est en contradiction avec la remarque précédente.

C_j et C_{j+1} étant différentes, alors il existe au moins une cellule (que l'on note c) dont l'état change au cours de l'itération passant de C_j à C_{j+1} .

Le mode de mise à jour étant asynchrone, toutes les cellules ne sont pas mises à jour. Supposons que c ne soit pas mise à jour, alors la configuration qui va suivre C_j ne sera pas C_{j+1} ce qui est absurde et en contradiction avec le fait que les deux configurations doivent être différentes.

Nous pouvons donc conclure qu'il ne peut pas y avoir de cycles de taille au plus 2 chez les AC asynchrones.

2. Point fixe

Nous faisons rapidement remarquer qu'un AC asynchrone peut avoir un point fixe, puisque :

- Si la cellule n'est pas mise à jour : son état ne change pas.
- Si la cellule est mise à jour : son état ne change pas, puisque nous sommes sur un point fixe.

Au final : aucune cellule ne change d'état, donc nous restons sur le point fixe.

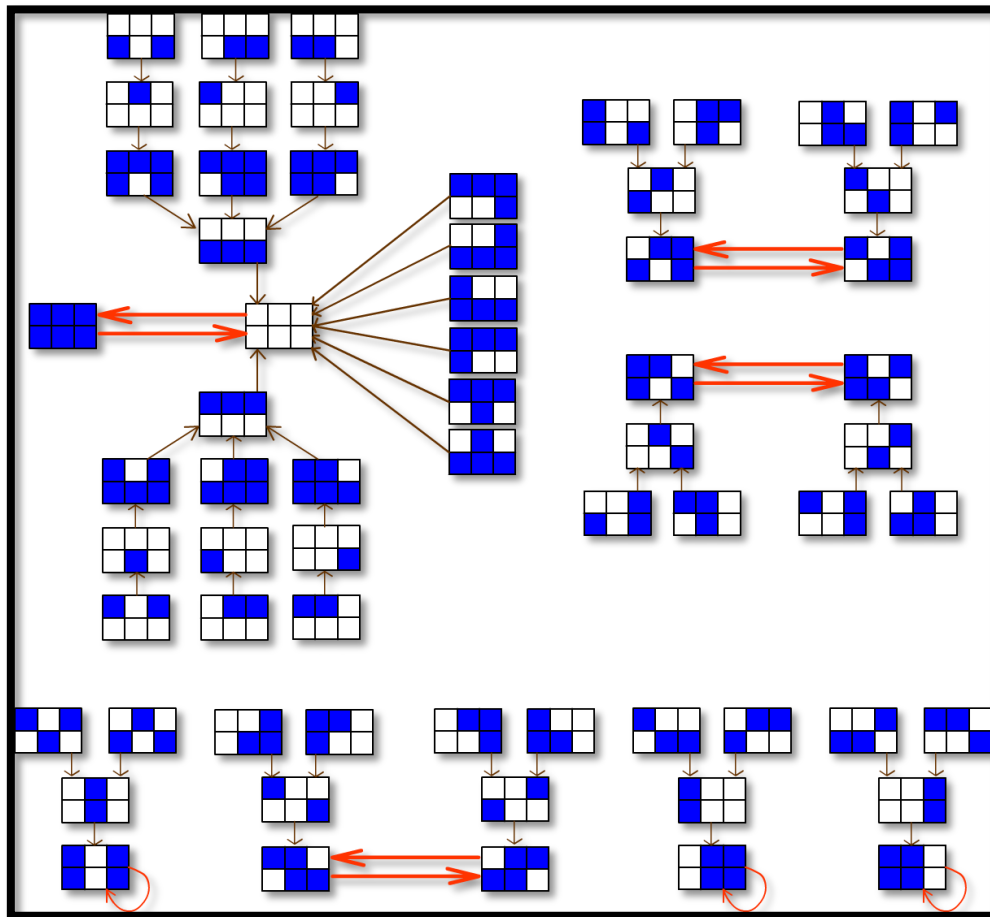
C. Représentation dans l'espace des configurations et des transitions des automates cellulaires synchrones

1. Expérience

Nous allons ici examiner l'automate cellulaire suivant :

- Règle sommative (n°19)
- Topologie « vonNeumann5 »
- Bords toriques
- Taille : 2x3
- Mises à jour synchrones

Pour chaque configuration possible de l'automate, nous allons dessiner ces configurations ainsi que les transitions permettant de passer d'une configuration à une autre. Voici les résultats de l'expérience :



V-1 Transitions de l'automate n°19 (règle sommative), topologie « vonNeumann5 », bords toriques, mises à jour synchrone

Nous pouvons donc observer des cycles auxquels se rattachent, par la racine, des arbres dont chaque nœud n'a qu'un fils mais peut avoir plusieurs pères...

2. Démonstration

La fonction de transition est déterministe et définie pour tout état des cellules du voisinage d'une cellule quelconque de l'AC. Donc pour toute cellule de l'automate cellulaire à l'instant t , la valeur de cette cellule à l'instant $t + 1$ est définie et unique. Toutes cellules de l'AC étant définies et uniques à l'instant $t + 1$, nous pouvons conclure que toute configuration a une et une seule configuration suivante.

Imaginons que toutes les configurations possibles de l'automate cellulaire soient face à nous. Essayons de placer les transitions entre ces configurations :

Choisissons une configuration C_1 . Cette configuration a, comme nous venons de la voir, une et une unique configuration suivante. Deux cas sont possibles :

- La configuration suivante est C_1 : nous venons de trouver un point fixe.
- La configuration suivante n'est pas C_1 . Nous la noterons C_2 et nous venons de mettre en évidence un chemin de longueur 2 ($C_1 \rightarrow C_2$).

Supposons qu'en continuant le processus nous trouvons toujours, comme configuration suivante, une configuration encore jamais rencontrée. Alors nous allons parcourir une infinité de configurations. Ceci est absurde puisque le nombre de configurations d'un automate cellulaire est fini (nous faisons l'hypothèse que le nombre de cellules de l'AC est fini et que le nombre d'état que peut prendre une cellule est fini). Donc nous pouvons dire qu'en continuant le processus, nous allons rencontrer une configuration déjà « visitée ». Ainsi, nous venons de mettre en évidence un cycle.

A cette étape de la démonstration, nous venons de montrer qu'en partant d'une cellule C_1 quelconque, il existe un chemin du type :

$$C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_i \rightarrow \dots \rightarrow C_{i-1} \rightarrow C_i \rightarrow \dots$$

Nous venons en réalité de montrer qu'il existe un cycle (ou un point fixe) auquel peut être raccroché une « branche ».

Mais il peut y avoir des configurations encore non examinées. Examinons ces configurations, dans l'hypothèse où elles existent.

Ces configurations vont avoir le même comportement :

- Nous pouvons trouver un deuxième point fixe (ou même un cycle)
- Ou, nous pouvons trouver un autre chemin, qui va se raccrocher (car il y a obligatoirement une configuration suivante à n'importe quelle configuration choisie) à :
 - un des deux cycles mis en évidence précédemment
 - au chemin $C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_{i-1}$.

Pour terminer, le fait que plusieurs chemins s'accrochent les uns aux autres, en réalité, fait apparaître une structure arborescente.

Au final, nous venons de montrer que la représentation dans l'espace des configurations et des transitions des automates cellulaires synchrones fait apparaître un ou plusieurs cycles auxquels peuvent se raccrocher un ou plusieurs arbres.

VI. Bibliographie

1. **Fatès, Nazim et Morvan, Michel.** An Experimental Study of Robustness to Asynchronism for Elementary Cellular Automata. *Complex Systems*. s.l. : Complex Systems Publications, 2005. 16.
2. **Poundstone, W.** *The Recursive Universe*. s.l. : Contemporary, 1985.
3. **Delorme, Marianne et Mazoyer, Jacques.** La riche zoologie des automates cellulaires. *Ji/ Interstices*. [En ligne] http://interstices.info/jcms/c_19162/la-riche-zoologie-des-automates-cellulaires.
4. **Le Page, Christophe et Bousquet, François.** Automate cellulaire feu de forêt. *Cormas*. [En ligne] <http://cormas.cirad.fr/fr/applica/fireautomata.htm>.
5. **VILLECHALANE, Axel et BOUCHEREAU, Frantz.** *Simulation d'une éruption par un automate cellulaire*. [En ligne] http://australie.uco.fr/polisima/IMG/pdf/eruption_volcanique.pdf.
6. **CARTIER, Manuel et FORGUES, Bernard.** Intérêt de la simulation pour les sciences de gestion. *CAIRN*. [En ligne] http://www.cairn.info/article_p.php?ID_ARTICLE=RFG_165_0125.
7. **Fatès, Nazim.** FiatLux, logiciel de simulation d'automates cellulaires. [En ligne] <http://webloria.loria.fr/~fates/fiatlux.html>.
8. *Gnuplot, logiciel qui a permis de tracer les graphiques*. [<http://www.gnuplot.info/>]