



Zao Wou Ki, coll. Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1987.

Mathématiques et Informatique: que peut-on modéliser ? Que peut-on prédire ? frontières entre analyse et simulation dans les automates cellulaires

Nazim Fatès

<http://www.loria.fr/~fates/>

Chercheur INRIA - équipe MaIA du LORIA



Conférence APMEP - 30 mars 2011

...

modélisation, analyse, simulation ?

Point de départ

dialogue : δια-λογος

L'informatique est "ubiquitaire"

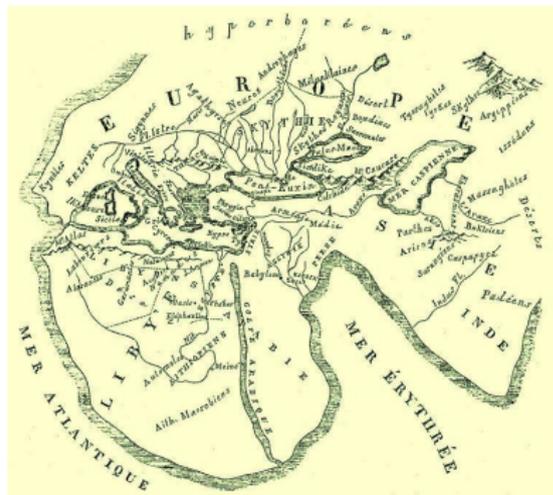
coupure entre ceux qui la maîtrisent et les autres

Science jeune, sciences pour les jeunes ?

Prolégomènes :

- ▶ informatique,
- ▶ intelligence artificielle et modélisation,
- ▶ automates cellulaires.

« le modèle est à la réalité ce que la carte est au territoire »



Terra Incognita?

Qu'est-ce que l'informatique ?

Définition officielle :

- ▶ science du traitement (automatisé) de l'information
- ▶ science du traitement rationnel, notamment par des machines automatiques, de l'information considérée comme le support des connaissances humaines dans les domaines techniques, économiques et sociaux.

Une proposition :

- ▶ technique, dont l'objet principal est la mise en oeuvre de la *logique*

Qu'est-ce que la logique?

ex. H.A . Simon, *Les sciences de l'artificiel*, p. 111

$$\begin{array}{rcccccc} & D & O & N & A & L & D \\ + & G & E & R & A & L & D \\ \hline = & R & O & B & E & R & T \end{array}$$

indice : D= 5

- ▶ méthode “intelligente”, déductive, **séquentielle**
ex. T=0; R impair; E= 9; A = 4; R = 7; etc.
- ▶ méthode brute $10! = 10 \times 9 \times 8 \cdots = 3\,628\,000$ combinaisons

Comment faire évoluer un tel système ? quid de sa robustesse ?

À la découverte
des automates cellulaires

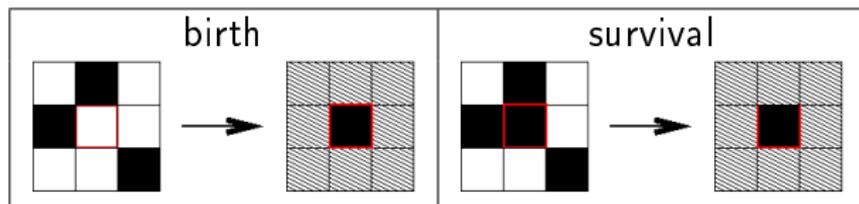
Une première expérience

origine du modèle :

- ▶ von Neumann et Ulam : problème de l'auto-reproduction

le *Jeu de de la vie* (Conway, 1970)

- ▶ état = vivant ou mort, mise à jour **synchrone**.
- ▶ Naissance (mort \rightarrow vivant) si $N_v = 3$.
- ▶ Survie (vivant \rightarrow vivant) si $N_v = 2$ ou $N_v = 3$.



Autres règles : règle de majorité, compteur de parité, etc.

Des limites dans les mathématiques ?

Jusqu'où peut-on pré-voir l'évolution de tels systèmes ?



Il est possible d'inclure une machine de Turing **universelle** dans le jeu de la vie ! (1982)

cf. A. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, 1936.

Puis-je connaître l'évolution de ce système dynamique ?

L'évolution du jeu de la vie est une propriété **indécidable**

Exoloration de règles...

Nous sommes dans le domaine du discret et du fini.
Le nombre de “mondes possibles” est fini.

Exercice! Combien de règles locales peut-on définir si l'on fixe le nombre d'états et le voisinage ?

nombre de règles locales : $\#_{AC} = |Q|^{|Q|^k}$

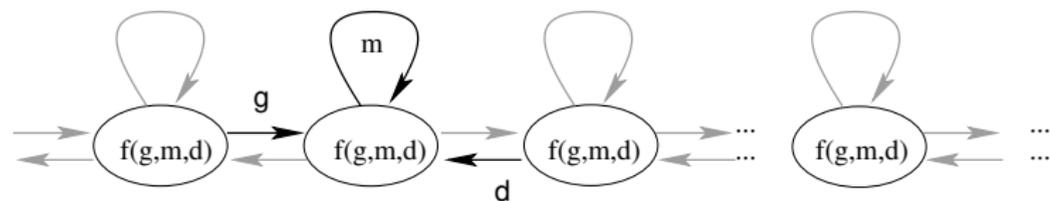
- ▶ en dimension 2 :

Pour $Q = \{0, 1\}$ et $k = 9$, $\#_{AC} = 2^{512} \sim 10^{115}$

- ▶ en dimension 1 :

Pour $Q = \{0, 1\}$ et $k = 3$, $\#_{AC} = 2^8 = 256$

Automates Cellulaires Élémentaires



Notation de Wolfram : ex. majorité = 232_w

000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	1	0	1	1	1

Automates Cellulaires Élémentaires : classification

Grande variété de comportements : Comment lier local & global ?

classification de Wolfram : 1984, **boum !**

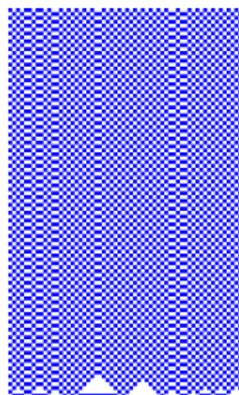
classe I



250_w

homogène

classe II



50_w

périodique

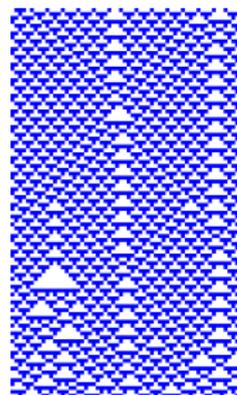
classe III



90_w

chaotique

classe IV



54_w

complexe

Problème : toutes les formalisations aboutissent à l'indécidabilité

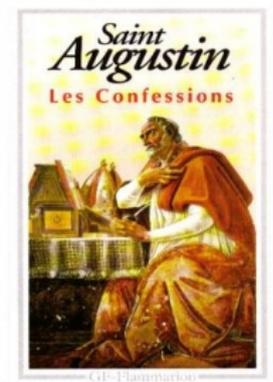
Automates cellulaires et mises à jour asynchrones

La question du temps

Rappel :

techniques de calcul qui utilisent un ensemble de cellules simples en interaction locale sur une grille.

se rapprocher d'un modèle plus...
"physique", supposons qu'il n'y **pas**
d'horloge centrale qui syn-chronise les
transitions.



Il n'y a, en quelque sorte, plus de temps partagé, du moins pas directement...

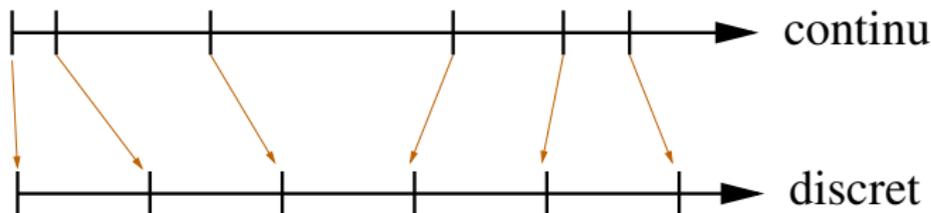
Quel type d'asynchronisme ?

Pour modéliser l'absence d'horloge centrale, les possibilités sont infinies...

Deux méthodes simples :

mode	totalemment asynchrone	α-asynchrone
durée des transitions	infiniment courte	non négligeable
simultanéité	non	oui
mise à jour	une cellule pas à pas	probabilité α
échelle	n	$1/\alpha$

Temps continu versus temps discret :



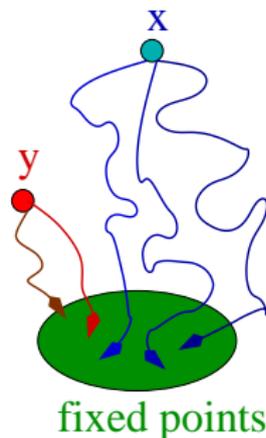
Cadre d'étude

ACE **doublement quiescents** en mode **totalemment asynchrone**

A noter : les points fixes restent les mêmes qu'en synchrone, mais...
les cycles disparaissent.

Quels sont les :

- ▶ points fixes atteignables ?
- ▶ probabilités d'atteindre un point fixe ?
- ▶ temps de convergence en moyenne ?



Plus grand temps de convergence vers un point fixe.

Approche physique => évaluation d'un "temps de relaxation".

Séparer les règles en fonction de leur temps de relaxation

Question récurrente : comment classer les règles ?

- ▶ T_x temps de convergence en partant de $x \in Q^{\mathcal{L}}$
- ▶ on cherche $E[T_x]$ temps moyen
- ▶ on cherche le maximum sur toutes les configs. de taille n

Temps de relaxation :

$$\tau(n) = \max_{\{x \in Q^{\mathcal{L}}\}} E[T_x]/n$$

En remettant le temps à l'échelle (division par n),

Parmi les 25 ACE doublement quiescents, 21 convergent p.s. et 4 n'atteignent pas de point fixe ; leur temps de relaxation est :

$$0, \ln n, \Theta\{n\}, \Theta\{n^2\}, \Theta\{2^n\}, \infty$$

comportement	ACE (#)	Règle	01	10	010	101	PTCM
identité	204 (1)	\emptyset	0
collectionneur vignettes	200 (2)	E	.	.	+	.	$\Theta(\ln n)$
	232 (1)	DE	.	.	+	+	
monotone	206 (4)	B	←	.	.	.	$\Theta(n)$
	132 (2)	BC	←	→	.	.	
	234 (4)	BDE	←	.	+	+	
	250 (2)	BCDE	←	→	+	+	
	202 (4)	BE	←	.	+	.	
	192 (4)	EF	→	.	+	.	
	218 (2)	BCE	←	→	+	.	
marche aléatoire (biaisée)	242 (4)	BCDEF	↔↔	→	+	+	
	130 (4)	BEFG	↔↔	←	+	.	
marche aléatoire	226 (2)	BDEF	↔↔	.	+	+	$\Theta(n^2)$
	170 (2)	BDEG	←	←	+	+	
	178 (1)	BCDEFG	↔↔	↔↔	+	+	
	194 (4)	BEF	↔↔	.	+	.	
	138 (4)	BEG	←	←	+	.	
146 (2)	BCEFG	↔↔	↔↔	+	.		
marche aléatoire (biaisée)	210 (4)	BCEF	↔↔	→	+	.	$\Theta(2^n)$
autre type de convergence	198 (2)	BF	↔↔	.	.	.	∞
	142 (2)	BG	←	←	.	.	
	214 (4)	BCF	↔↔	→	.	.	
	150 (1)	BCFG	↔↔	↔↔	.	.	

Échauffement...

A	B	C	D	E	F	G	H
000	001	100	101	010	011	110	111
0	0	0	1	0	1	1	1

Exercice!

- ▶ Règle E? efface les 1 isolés (010).

Si $|x|_{010} = k$, proba d'effacer = $\frac{k}{n}$.

Temps de convergence en moyenne :

$$T_k(n) = \frac{n}{k} + \frac{n}{k-1} + \dots + \frac{n}{1} \sim n \ln n$$

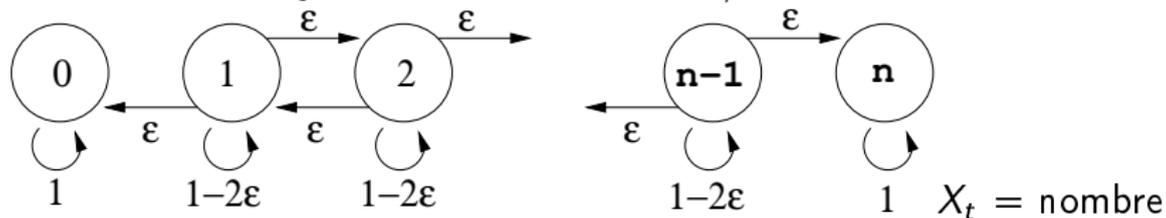
- ▶ Règle DE? idem, mais on peut décroître de 2 ou 3.

Le temps de relaxation vaut $\tau(n) = \Theta(\ln n)$

Règle du décalage

					+									-		
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Proba de mise à jour d'une cellule : $\epsilon = 1/n$



de cellules à l'état 1

Méthode du "pas en avant" :

$$\begin{cases} T_0 = 0, T_n = 0 \\ T_i = \epsilon(T_{i+1} + 1) + \epsilon(T_{i-1} + 1) + (1 - 2\epsilon)(T_i + 1) \end{cases}$$

Résolution :

$$T_i = \frac{i(n-i)}{2\epsilon}$$

Décalage : plusieurs zones

	+	-			+		-		+		-	+		-	
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0

Martingale : $E[X_{t+1}|X_t] = X_t$, d'où : $\forall t, E[X_t] = X_0$.

Application : T temps d'atteinte d'un point fixe (temps d'arrêt)

$$E[X_T] = 0 \cdot \Pr[X_T = 0] + n \cdot \Pr[X_T = n]$$

d'où :

$$\Pr[X_T = n] = X_0/n$$

Caractérisation générale

Lemme :

- ▶ Si un processus X_t est une martingale dans $\{0, \dots, k\}$,
- ▶ si la probabilité d'augmenter de 1 et la probabilité de diminuer de 1 est supérieure à ϵ ,

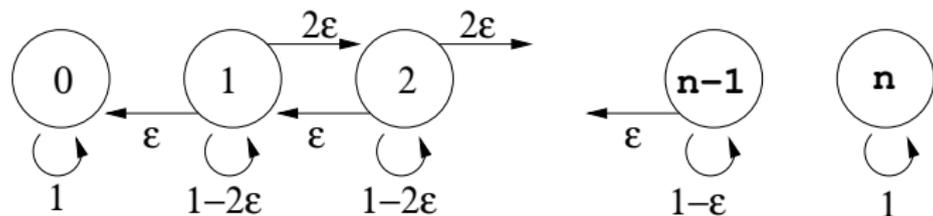
alors le temps de convergence du processus est borné par :

$$\frac{X_0(k - X_0)}{2\epsilon}$$

On obtient donc :

- ▶ pour le décalage : $\tau(n) = \theta(n^2)$
- ▶ pour BCDEFG : $X_t = |x^t|_1 + Z(x^0) + D_t - E_t$

Règle à convergence **très** lente



marche aléatoire biaisée “dans le mauvais sens”

$$T_i = 1 + \varepsilon T_{i-1} + (1 - 3\varepsilon) T_i + 2\varepsilon T_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 2$$

$$T_{n-1} = 1 + \varepsilon T_{n-2} + (1 - \varepsilon) T_{n-1}$$

$$T_0 = 0$$

solution du système $T_i = \frac{2^n}{\varepsilon} (1 - 2^{-i}) - \frac{i}{\varepsilon}$

d'où $\tau(n) = 2^n$

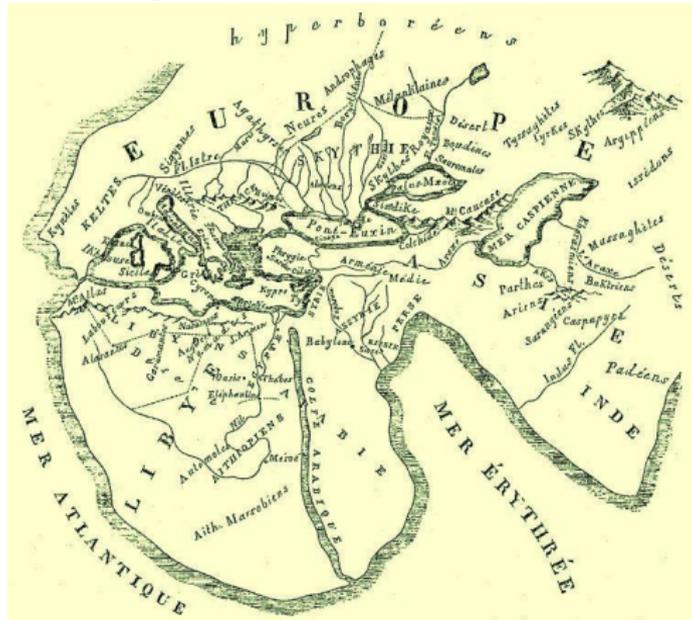
La simulation échoue !

MaLA : techniques de planification pour prouver la convergence.

Enseignements

le hasard ne rend pas les prédictions plus complexes

Comportements très variés dont une petite partie seulement a été défrichée... Terra Incognita !



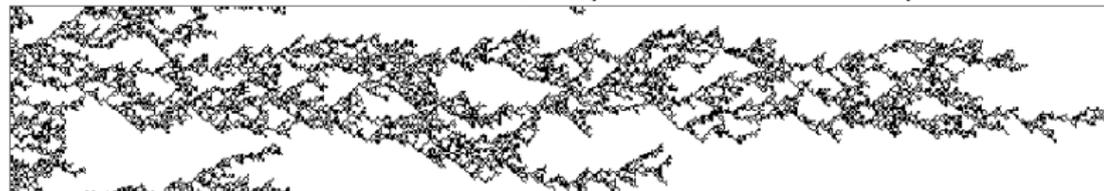
- ▶ Que fait-on lorsque l'analyse échoue ?

...

Quand les modèles de La
physique statistique s'en
mêlent

Transition de phase

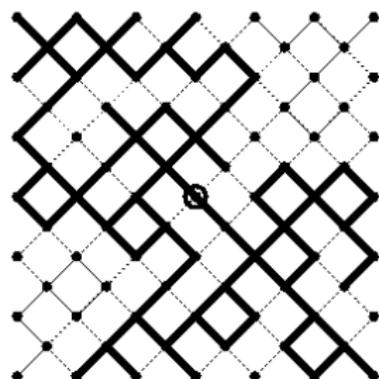
observation près du seuil critique (ACE 50, $\alpha = 0.6$) :



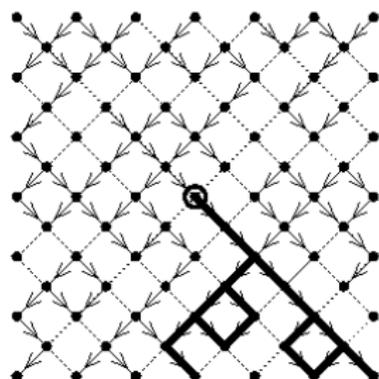
similarités avec la rotation d'un cylindre : transition de phase ?
mêmes lois qui gouvernent des systèmes physiques et
mathématiques !

exposants critiques , classe d'universalité.

Percolation dirigée



isotropic bond percolation



directed bond percolation

- ▶ seuil critique en percolation isotrope : $p_c = 1/2$,
- ▶ seuil critique en percolation dirigée : $p_c < 1/2$.

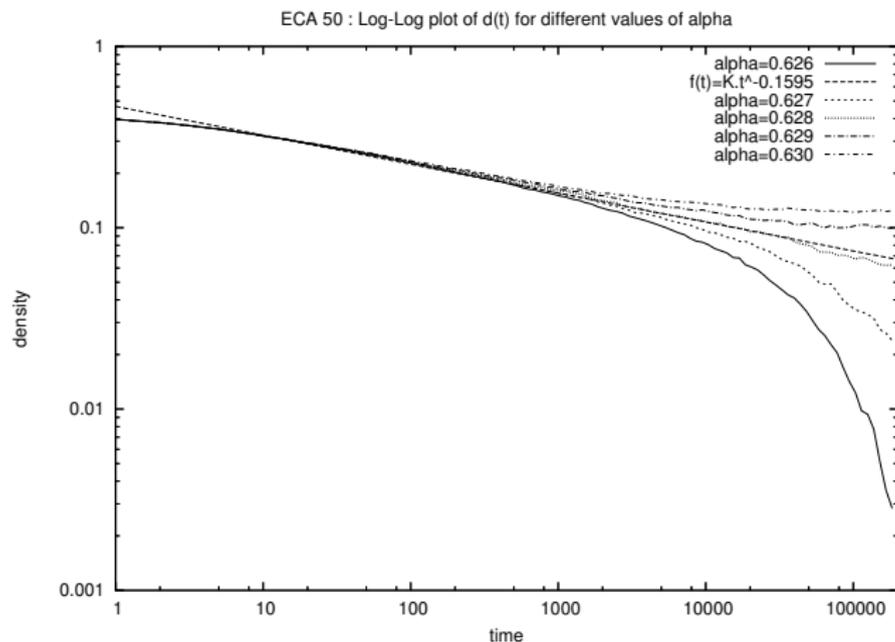
au seuil critique, le nombre de sites touchés évolue en $t^{-\delta}$

pb : prouver (ou infirmer) que δ n'est pas un rationnel

δ fixé uniquement par la dim. : $d \leq 3$ simulation, $d > 3$ analyse

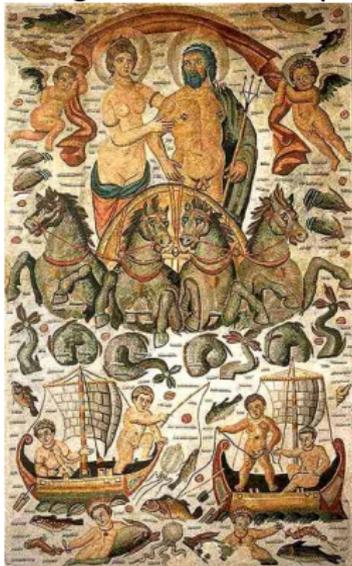
Vérification

Prédictions valides pour n infini, on prend ici $n = 10^4$.



Bilan partiel

Des petits changements dans la méthode de mise à jour peuvent avoir de grandes conséquences sur l'évolution asymptotique...



Paris, Louvre (Constantine)

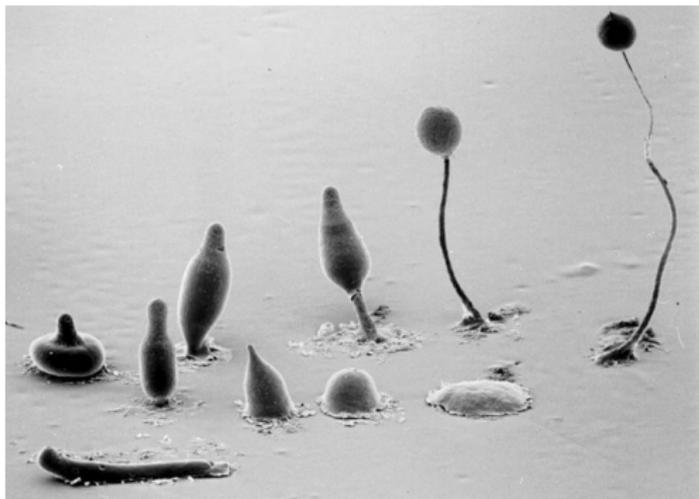


Nancy

...

Modélisation : lier la biologie à l'informatique

Nos amies les amibes

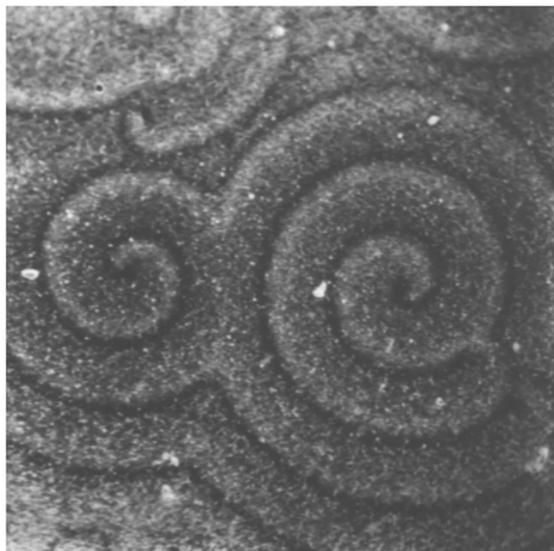


Cycle de vie de l'amibe *Dictyostelium D.*
Photo de Mark Grimson et Larry Blanton.

<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/guide/dicty/>

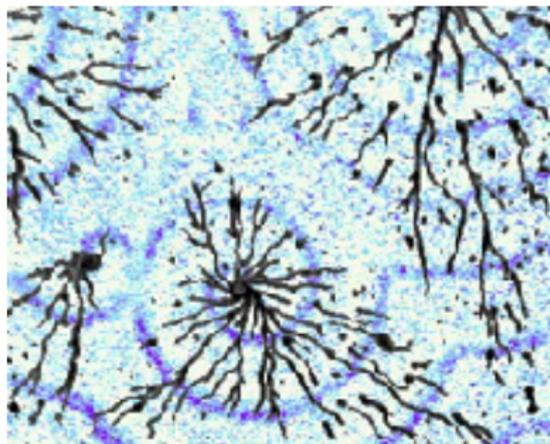
Regroupement décentralisé ?

Nos amies les amibes



Ondes spirales apparaissant durant la phase d'aggrégation de *Dictyostelium D.*

cf. <http://www.uni-magdeburg.de/abp/picturegallery.htm>

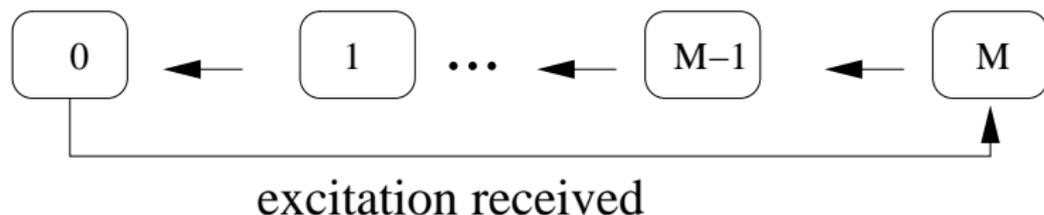


Photographie d'une population de *Dictyostelium D.* en phase d'aggrégation.

cf. <http://www.molbio.princeton.edu>

Construction d'un modèle

Réaction-Diffusion simplifiée (modèle de Greenberg-Hastings) :



Les amibes sont attirées par les fronts d'ondes excitées.

Les amibes déclenchent des excitations de manière aléatoire (p_E).

Démonstration

Un exemple d'**émergence** sur plusieurs niveaux :

- ▶ La réaction-diffusion dans le cas déterministe,
- ▶ Le changement de phase,
- ▶ Les centres de signalisation & les zones d'influence,
- ▶ Les “combats” entre centres

La question de la robustesse : asynchronisme, topologie & obstacles

travail actuel : test des algorithmes sur des robots

...

intelligence artificielle et επισημη

Intelligence artificielle

Qu'est-ce que l'intelligence ?

Comment construire un système intelligent ?

Quels sont les modèles de l'intelligence ?

Intelligence artificielle

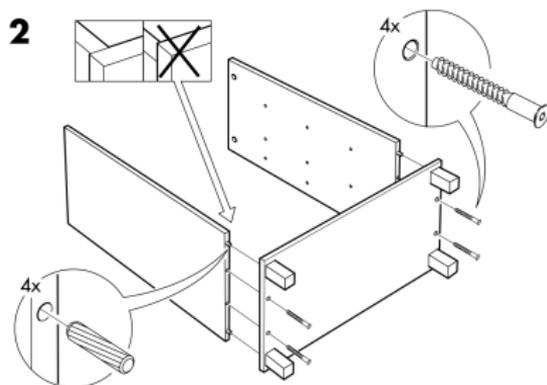
Étymologie

latin *intellegentia*, *intellegere* (comprendre) :

- ▶ *inter* (entre), *legere* (choisir, cueillir) ou *ligare* (lier)

Exemples ?

- ▶ jouer aux échecs
- ▶ reconnaître un visage
- ▶ monter un meuble en kit
- ▶ entendre les mots d'une discussion
- ▶ comprendre ces mots

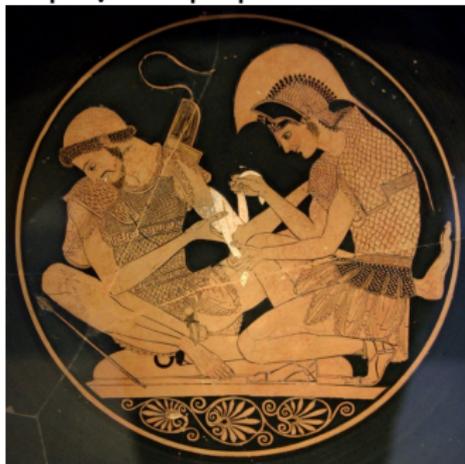


L'informatique : une histoire de symboles ?

Rendre une machine intelligente en lui apprenant des symboles ?

Hymne homérique à Hermès - Achille à la tortue :

« **Σύμβολον** ἤδη μοι μέγ' ὀνήσιμον οὐκ ὀνοτάζω »



Intelligence : de l'homme à la machine

IA :

donner de l'intelligence aux machines

- ▶ Qu'est-ce qu'une intelligence de machine ?
- ▶ Quelle *forme* prend-elle ?

début de la **cybernétique**...

Intelligence : de l'homme à la machine

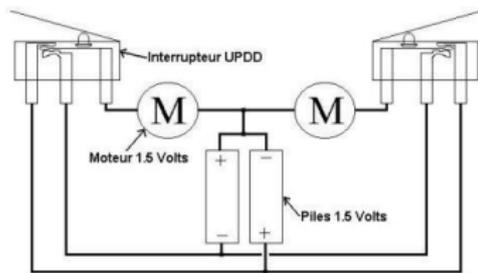
IA :

donner de l'intelligence aux machines

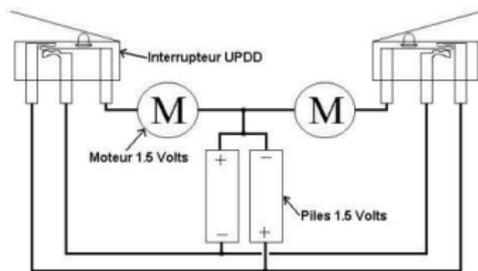
- ▶ Qu'est-ce qu'une intelligence de machine ?
- ▶ Quelle *forme* prend-elle ?

Robot=

- ▶ capteurs (caméras, ...)
- ▶ + effecteurs (roues, bras, ...)
- ▶ + [mécanisme de prise de décision]



Véhicule de Breitenberg



début de la **cybernétique**...

L'oeuvre d'un grand maître

La cybernétique postule que les comportements des êtres vivants peuvent être imités par les machines.

Corollaire : suis-je une machine ?

Turing (1912-1954)

- ▶ Jusqu'où peut aller cette intelligence ?
- ▶ Peut-elle dépasser l'humain ?

Test de Turing :

Machine capable d'imiter la conversation humaine ?



La cybernétique postule que les comportements des êtres vivants peuvent être imités par les machines.

Questions :

- ▶ Qu'est-ce qui **fonde** une telle affirmation ?
- ▶ Qu'est-ce qui **appuie** une telle idée ?

Turing :

Tout **calcul**, si complexe soit-il, peut être effectué par une machine très simple opérant sur un ruban infini.

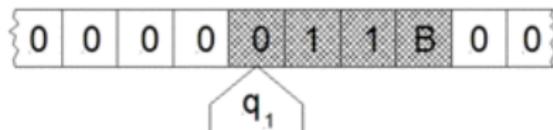
Cette machine permet de préciser la notion informelle d'**algorithme**.

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Connaissez-vous des algorithmes ?

- ▶ écrire un nombre ! (en base 10 ou autre)
- ▶ l'addition, la soustraction, etc.
- ▶ Algorithme d'Euclide
- ▶ Crible d'Erathosthène

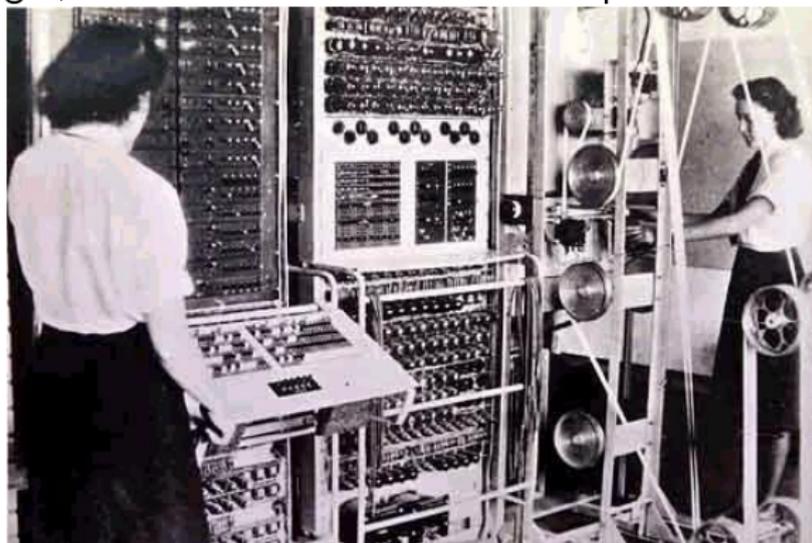
Turing, *On computable numbers*, 1936 : Toutes ces opérations peuvent être effectués par une unique machine !



Les microprocesseurs appliquent ces principes : compilation, récursivité, etc.

Algorithmes séquentiels déterministes

communications numériques : cryptage, authenticité, interception des messages, etc. -> recherche de nombres premiers

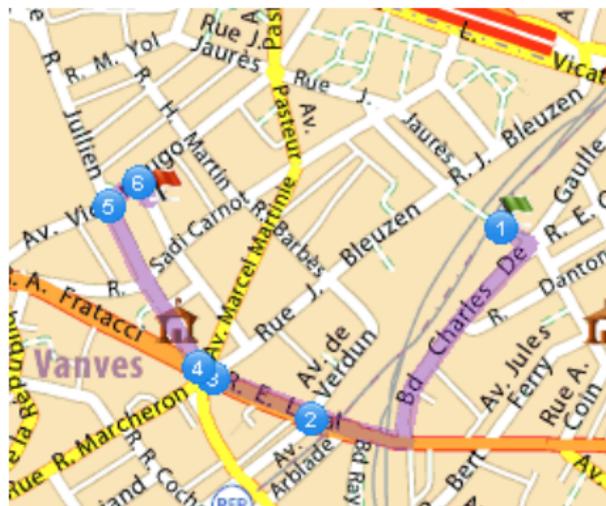


La machine *colossus* utilisée pendant la seconde guerre mondiale

Algorithmes et heuristiques

Étant donné un problème, générer et essayer des solutions jusqu'à en trouver une valide (voire optimale).

Exemple : trouver un “bon” chemin dans un graphe



- ▶ preuve de “théorèmes”
- ▶ jeux (échecs, go, etc.)
- ▶ gestion de stocks
- ▶ logistique, etc.

des problèmes “difficiles” peuvent se résoudre à l'aide du hasard !

L'unité des sciences en question

thèses de Wolfram, *A New Kind of Science*

Tout ce qui s'est fait jusqu'à présent en sciences relève de "cas particuliers", la majorité des phénomènes ne peuvent être saisis par l'analyse mathématique

thèses de l'univers comme complexe calculable
(cf. W. Poundstone, *The recursive universe*)

“ Les diverses branches essentielles de l'étude du monde ou de celle de l'homme nous dévoilent une multitude croissante de lois différentes, qui resteront constamment irréductibles entre elles, malgré les frivoles espérances qu'inspira d'abord notre gravitation planétaire. ”

Auguste Comte (1798-1857), *Catéchisme positiviste*, 1^{re} partie.

L'art et la méthode

Descartes : *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (1637)

« Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée : car chacun pense en être si bien pourvu, que ceux même qui sont les plus difficiles à contenter en toute autre chose, n'ont point coutume d'en désirer plus qu'ils en ont. »

Étienne Gilson : *Introduction aux arts du beau*

« L'art n'est pas une façon de connaissance, mais il relève au contraire d'un ordre distinct de celui du connaître, qui est l'ordre du faire ou, s'il est permis s'exprimer ainsi, de la factivité »
(p. 9, ed. Vrin, 1963).

En guise de conclusion

De vastes régions du savoir restent à explorer.

Notre parcours :

- ▶ automates classiques
- ▶ la question de l'asynchronisme
- ▶ physique statistique
- ▶ un exemple en lien avec *Dictyostelium*

problèmes ouverts : frontières entre analyse et simulation à clarifier

L'étude des automates cellulaires nous incite à la modestie et à la *prudence*

Comment donner à la modélisation une assise solide ? conséquence dans **toutes** les sciences !

Merci

NATURE ET ART - Goethe

Nature et art, ils ont l'air de se fuir
Et, avant que nous en ayons l'idée, voilà qu'ils se sont rencontrés ;
De leur discorde je ne vois plus de trace
Et je me sens attiré à égalité par tous deux



métier de chercheur, métier d'enseignant...

paradoxe : omniprésence des mathématiques et de l'informatique
mais absence d'intérêt

- ▶ **poser** des questions
- ▶ **produire** des programmes, des algorithmes
- ▶ **observer** des simulations
- ▶ **analyser** avec des outils “mathématiques”, classer
- ▶ **synthétiser**, faire le lien avec d'autres disciplines

Augmenter le stock d'exemples ?

ou renouer le dialogue avec les fondateurs... Turing, von Neumann